LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

UM ESTUDO DO SUDOKU 4X4 E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Rafael Zitelli Silva

Sorocaba

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

UM ESTUDO DO SUDOKU 4X4 E UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Rafael Zitelli Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, Sob a orientação do Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr.

Folha de aprovação

Rafael Zitelli Silva

"Um estudo do Sudoku 4x4 e uma proposta de aplicação em sala de aula"

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 30/01/2019.

Orientador ______________________________
Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr.

Membro 2 ______________________________
Prof.ª Dr.ª Graciele P. Silveira

Membro 3 ______________________________
Prof.ª Dr.ª Luciana Takata Gomes

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

RESUMO

O Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), em Licenciatura de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos, Campus Sorocaba, aqui apresentado buscará responder as seguintes questões principais: Qual o número mínimo de elementos necessários à serem fornecidos para que um Sudoku 4x4 tenha solução única? Redigir, aplicar, analisar e discutir os resultados obtidos de uma sequência de atividades didáticas que leve os alunos a compreenderem a matemática envolvida na solução de um Sudoku 4x4, em particular, as condições necessárias; Analisar e discutir como tais atividades influenciaram o processo de ensino e aprendizagem da matemática; e, finalmente, Avaliar como todo o processo de planejamento, elaboração e execução deste TCC influenciou minha formação como futuro professor de matemática, do Ensino Básico brasileiro. Nesse trabalho foi possível confirmar o número mínimo de elementos para se gerar o Sudoku 4x4 bem como o número máximo de Sudokus reduzidos gerados. Uma das atividades baseada nos resultados da pesquisa elaborada terminou sendo aplicada em turmas e anos distintos, a comparação dos resultados obtidos foi então realizada.

Palavras chave: Sudoku 4x4, Sequência de Atividades Didáticas, Número mínimo de elementos fornecidos, Solução única.

ABSTRACT

The Course Completion Work (TCC), in Mathematics Degree, Federal University of São Carlos, Sorocaba Campus, presented here will answer the following main questions: What is the minimum number of elements needed to be provided so that a 4x4 Sudoku has a unique solution? Write, apply, analyze and discuss the results obtained from a sequence of didactic activities that will lead students to understand the mathematics involved in solving a 4x4 Sudoku, in particular, the necessary conditions and the minimum number of elements provided to define a 4x4 Sudoku that has a unique solution; Analyze and discuss how these activities influenced the teaching and learning process of mathematics; and finally, Evaluate how the whole process of planning, elaboration and execution of this TCC influenced my formation of future mathematics teacher, of the Brazilian Basic Education. In this work, the study has confirmed the minimum number of elements to generate Sudoku 4x4 as well as the maximum number of reduced Sudokus generated. One of the activities based on the results of the elaborated research ended up being applied in different classes and years, the comparison of the results obtained was then carried out.

Keywords: Sudoku 4x4, Sequence of Didactic Activities, Minimum number of elements provided, Unique solution.

CAPÍTULO I: Introdução

Este trabalho analisou e respondeu algumas questões sobre o jogo de Sudoku, em particular o Sudoku 4x4, desenvolvido a partir das regras definidas por Howard Garns e inspirado no conceito de quadrado latino, de Leonhard Euler.

O quadrado latino consiste em preencher uma matriz quadrada com um conjunto de números de forma a não ocorrer repetições deles nas linhas e colunas dessa matriz.

Howard Garns, ao criar o Sudoku, além de adotar as regras fixadas por Euler, adicionou a elas a divisão da matriz quadrada em submatrizes, também quadradas e a regra de não poder existir números repetidos em cada uma dessas submatrizes. Desta forma o jogo, que hoje conhecemos pelo nome de Sudoku, foi formulado desde sua primeira publicação, pelo jornal The Times (Londres, Inglaterra), em 2004, e se tornou mundialmente conhecido (Sudoku Essentials, 2012).

Entre as questões a serem abordadas nesse TCC, quatro (4) são as principais:

1ª) Qual o número mínimo de elementos necessário à serem fornecidos para que um Sudoku 4x4 tenha solução única;

2ª) Redigir, aplicar, analisar e discutir os resultados obtidos de uma sequência de atividades didáticas que leve os alunos a compreenderem a matemática envolvida na solução de um Sudoku 4x4, em particular, as condições necessárias;

3ª) Analisar e discutir como tais atividades influenciaram o processo de ensino e aprendizagem da matemática; e, finalmente, 4ª) Avaliar como todo o processo de planejamento, elaboração e execução deste TCC influenciou minha formação como futuro professor de matemática, do Ensino Básico brasileiro.

O segundo capítulo visa detalhar alguns aspectos importantes da vida de Leonhard Euler, buscando mostrar como a matemática evoluiu através de suas descobertas, em particular, a relação entre o “quadrado latino” e o “Sudoku” como hoje definido. O terceiro capítulo trata sobre a descoberta e as regras em torno do quadrado latino e do quadrado mágico e sua importância na construção, posterior, do Sudoku.

O quarto capítulo apresenta uma visão histórica da evolução do Sudoku, desde sua criação, bem como analisa e discute matematicamente a questão do número de elementos mínimos necessários à serem fornecidos para que um Quadrado Latino ou um Sudoku, até a ordem 4x4, tenha solução única.

O quinto capítulo faz uma descrição e análise das atividades didáticas planejadas sobre o Sudoku 4x4, e implementadas junto a alunos do Ensino Médio, bem como uma descrição das abordagens metodológicas utilizadas.

No sexto capítulo são traçadas as principais conclusões tiradas no trabalho realizado, bem como, as contribuições que ele trouxe para minha formação como professor de matemática, do Ensino Básico brasileiro.

Finalmente, o sétimo capítulo traz a bibliografia consultada e citada ao longo desse trabalho, em nível de TCC.

CAPÍTULO II: Um breve relato histórico sobre a vida e obra de Leonhard Euler

Euler nasceu na Basiléia, Suíça, em 15 de abril de 1707. Filho dos pastores Paulus Euler e Margaret Brucker teve duas irmãs mais novas, Anna Maria e Maria Magdalena. Sua família se mudou pouco depois de seu nascimento para Riehen, onde viveu a maior parte da sua infância. Seu pai era amigo da família Bernoulli, cujo patriarca foi um dos maiores matemáticos da época. Euler ingressou na Universidade da Basileia estudando, a maior parte do tempo, por conta própria.

Aos 16 anos, em 1723, Euler recebe o grau de mestre, com uma tese comparando as filosofias de Descartes e de Newton e se tornou discípulo de Bernoulli, que convenceu o pai de Euler sobre seu talento matemático e físico, o qual ainda insistia para que ele seguisse nos estudos teológicos.

A partir de 1726 Euler começa a publicar com o intuito de conseguir uma cadeira na Universidade da Basileia. Seus trabalhos foram muito bem recebidos, mas não chegou a ser professor dessa Universidade, pois emigrou para a Rússia (D'AMBROSIO, 2009).

Naquela época, a Rússia estava criando uma Academia de Ciências e Artes e contratou os dois filhos de Bernoulli. Com a morte de um deles, Euler foi indicado ao cargo, no Departamento Médico, mas, pouco tempo depois, conseguiu se transferir para o Departamento de Matemática. Com a nova posição e um salário melhor, pode se casar com Katharina Gsell com quem, ao longo dos anos, teve 13 filhos.

Mesmo esse período sendo de grande produtividade para Euler, dando grandes contribuições para a navegação, foi um péssimo período político na

Rússia e, em 1741, Euler aceita um convite, e muda-se com a família para Berlim.

> *Nestes dias quase ninguém mais duvida da grande utilidade da matemática, pois as várias disciplinas e artes necessárias para o cotidiano não podem ser tratadas sem sua ajuda. Contudo, muitos dizem que essa utilidade pertence apenas às partes mais simples desta ciência, assim dizendo, aos seus elementos, enquanto à matemática "superior" é negada qualquer utilidade. [...] A crítica à matemática superior, por estar se aprofundando muito na sua busca da verdade, deveria ser considerada uma razão para elogiar esta ciência e não para culpá-la* ***(Euler E790, 4).***

Na Prússia, em 1740, foi coroado o rei Frederico II que queria remodelar a Sociedade de Ciências de Berlim nos moldes da Academia de Ciências de Paris, convidando para isso, vários cientistas notáveis para dar corpo a essa renovação. Em 1743, o Rei Frederico II a considerou completa e mudou seu nome para Real Academia de Ciências, da qual Euler era diretor da seção de Matemática.

Euler se sentia realizado, além de diretor da Real Academia, substituía, em vários momentos, o presidente Pierre-Louis Moreau de Maupertuis. Esse período foi muito produtivo para Euler no qual escreveu cerca de 400 manuscritos, alguns sendo publicados posteriormente a sua morte. Muitos desses artigos renderam livros importantíssimos, entre eles *Methodus Inveniendi*, que se tornou o livro básico para o cálculo das variações.

O ambiente acadêmico, naquela época, era muito disputado entre Descartes, Newton e Leibniz. A reação de Euler a essas disputas e bem como sua vida acadêmica criou certa inimizade com o Rei Frederico II, que, segundo Euler, considerava suas pesquisas "sem importância" e exigindo dele que cuidasse de coisas mais práticas. Em 1763, com o fim da Guerra dos Sete Anos e a morte de Maupertuis, Euler esperava tornar-se presidente da Academia, mas Frederico II se recusou a dar o posto a ele.

Durante a Guerra dos Sete Anos as tropas russas pilharam a propriedade de Euler, mas quando o General soube se desculpou e o indenizou generosamente. Euler nunca foi tratado como estrangeiro pelos russos. Em 1762, quando Catarina II assumiu o poder na Rússia, empenhou-se em estabelecer um altíssimo padrão na Academia convidando Euler para retornar a São Petersburgo, com grandes privilégios.

Desde a infância Euler tinha uma espécie de tuberculose, que degradou sua visão ao longo da vida. Em 1738, ficou quase cego do olho direito depois de uma febre muito forte e, em 1771, ficou completamente cego depois de uma catarata no olho esquerdo. Isso nunca diminuiu sua produtividade sendo ela muito intensa em seus anos finais de vida, graças a sua memória fotográfica e a ajuda de assistentes.

Ainda em 1771, um grande incêndio na casa de Euler quase o matou. Ele salvou todos os manuscritos e foi tirado a força pelo empregado. Em 1773 morre sua esposa, depois de 40 anos de casamento. Três anos depois Euler casa-se com sua cunhada.

Leonhard Euler morre em 1783, possivelmente vítima de um acidente vascular cerebral.

Nessa última fase, em São Petersburgo, escreveu 275 trabalhos, entre eles o livro Introdução Completa à Álgebra, sendo um dos livros matemáticos mais impressos no mundo.

CAPÍTULO III: Os Quadrados Latino e Mágico

Conta-se que Euler foi desafiado com o seguinte problema:

Suponhamos que seis regimentos fornecem seis oficiais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular, seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patente?

Para atacar este problema, Euler foi conduzido ao conceito de Quadrado Latino, definido como um arranjo quadrangular de n^2 objetos, onde cada linha e cada coluna contêm um dos n objetos diferentes. Na realidade, um quadrado latino de ordem n é uma matriz n x n preenchida com n^2 diferentes informações de tal maneira que cada um desses n^2 objetos ocorre no máximo uma vez em cada linha ou coluna.

O nome "quadrado latino" se deve ao fato de Euler ter resolvido o problema citado trabalhando com matrizes quadradas e utilizando caracteres latinos.

Figura 1: Exemplo de Quadrado Latino de ordem 4.

A	C	D	B
C	A	B	D
D	B	A	C
B	D	C	A

Quadrado Latino 4x4

Uma importante característica de se trabalhar com matrizes é que se permutarmos as linhas, as colunas e os símbolos de um quadrado latino, obtemos um novo quadrado latino que se diz isotópico ao primeiro.

O isotopismo é uma relação de equivalência. Então, o conjunto de todos os quadrados latinos é dividido em subconjuntos, chamados de classes de isotopia, de modo que dois quadrados na mesma classe são isotópicos e dois quadrados em classes diferentes não são isotópicos.

Um quadrado latino é considerado reduzido se as letras se dispõem por ordem alfabética na primeira linha e na primeira coluna ou se os números estiverem na sua ordem natural. Tendo assim resultados bem diferentes como podemos ver na Tabela 1.

Tabela 1: Número de Quadrados Latinos Reduzidos e de, simplesmente, Quadrados Latinos, segundo a ordem n.

n	Quadrados Latinos reduzidos	Quadrados Latinos
1	1	1
2	1	2
3	1	12
4	4	576
5	56	161.280
6	9.408	812.851.200
7	16.948.080	61.479.419.904.000

Figura 2: Exemplo de Quadrado Latino Reduzido de ordem 3.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Quadrado Latino reduzido 3x3

Antes do Quadrado Latino houve, porém, alguns predecessores, os chamados “Quadrados Mágicos”, que teriam aparecido cerca de 4 mil anos antes.

O mais antigo quadrado mágico que se tem notícia é o Lo Shu Square, encontrado em manuscritos chineses de 2.800 AC, que fazia parte da lenda sobre como acalmar a fúria do rio Lo. No Egito e na Índia, os quadrados mágicos apareceram gravados em pedra ou metal, como forma de talismã e também eram utilizados na astrologia e na religião.

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada de lado n, onde a soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais é constante, sendo que nenhum destes números se repete.

Os quadrados mágicos podem ser classificados em três tipos. Os quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos que não obedecem a todas as regras de um quadrado mágico. Por exemplo, um quadrado mágico em que a soma dos elementos das linhas e das colunas são iguais, mas o das diagonais não é. Há também os quadrados mágicos hipermágicos, que possuem propriedades adicionais. Além de obedecer às regras básicas, por exemplo, o quadrado mágico hipermágico possui também a propriedade de se trocar duas colunas de lugar, resulta em outro quadrado mágico. Finalmente, existem também os chamados quadrados mágicos diabólicos que são quadrados hipermágicos com muitas propriedades ou com propriedades muito complexas. O nome diabólico vem da dificuldade de formá-los.

Figura 3: Quadrado mágico de Lo Shu.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

O exemplo anterior é o de Lo Shu, onde o imperador-engenheiro Yu, o Grande, estaria a observar o rio Amarelo quando viu uma tartaruga divina. Yu percebeu que as marcas nas costas da tartaruga (que formavam símbolos com nós), possibilitava a interpretação desses nós como sendo os números inteiros de um a nove e que todos seus elementos, nas linhas, colunas e diagonais somam quinze, como se fossem algarismos mágicos. Por esse motivo, os chineses acreditaram durante vários anos que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para toda a vida.

Figura 4: Exemplo de Quadrado Mágico de ordem 4.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

No exemplo acima a soma de cada linha, coluna e diagonal é igual a 34. Como podemos ver, diferente do quadrado latino, temos uma restrição numérica, ou seja, a soma deve ser sempre a mesma.

CAPÍTULO IV: Sudokus e Quadrados Latinos: número de elementos mínimos necessários à Solução Única

O Sudoku mais comum é uma matriz quadrada, de ordem 9, que contem 9 elementos distintos e 81 posições possíveis, distribuídos em nove linhas e nove colunas. Além disso, essa matriz quadrada é subdividida em 9 submatrizes quadradas, de ordem 3. O “jogo” e/ou “quebra cabeça”, é confeccionado com algumas de suas casas já preenchidas, por exemplo, por números (ou outros símbolos como letras, figuras, cores, etc.). Cabe ao jogador completar as casas restantes com os números (letras, figuras, cores, etc.) faltantes (no caso de números, aparecem os algarismos de 1 a 9) de modo que tais algarismos não se repitam em uma mesma linha ou coluna do quadrado principal (9 x 9) e nas linhas e colunas das submatrizes 3x3. Para ser considerado um Sudoku, sua solução deve ser única, ou seja, possuir uma única forma de se completar as linhas e as colunas da matriz principal e das submatrizes.

Devido ao fato do preenchimento das linhas e colunas acima referenciadas não envolver nenhuma operação numérica, há a possibilidade de substituir os “algarismos” por outro símbolo como, por exemplo, “letras”, “figuras” ou mesmo “cores”.

A primeira publicação de um Sudoku foi na edição de maio, de 1979, da revista Dell Pencil Puzzles and Word Games. Segundo pesquisa realizada por Will Shortz, editor de palavras cruzadas do New York Times, teria sido criado por um arquiteto aposentado chamado Howard Garns. Esse arquiteto teria morrido em Indianápolis, em 1981 ou 1989, sem poder testemunhar o sucesso de sua criação.

Em 1997, Wayne Gould em visita ao Japão, conheceu o jogo. Seu interesse por ele (jogo) foi tal que criou um programa de computador para gerar várias configurações do Sudoku. Em 2004, Gould fez uma proposta aos Times, de Londres, de publicar o jogo no Daily Telegraph, a qual foi aceita e o jogo se tornou um sucesso mundial.

Não demorou para alguns matemáticos se interessassem pela matemática envolvida no jogo e começassem a calcular quantos jogos de Sudoku seria possível criar e qual o número mínimo de elementos deveria ser fornecido para se obter um Sudoku com solução única. Logicamente, a resposta deve ser menor do que o número de quadrados latinos por causa da exigência extra, imposta pelas submatrizes.

Sem grandes problemas matemáticos, sabe-se que existem apenas 12 quadrados latinos de ordem 3 e 576 de ordem 4. Mas de ordem 9 existe o fabuloso número de 5.524.751.496.156.892.842.531.225.600 quadrados latinos diferentes. A teoria dos grupos, entretanto, afirma que um quadrado que deriva de outro é equivalente ao original. Em outras palavras, se trocarmos todos os números de forma sistemática (por exemplo, o 1 pelo 2, o 2 pelo 7 e assim por diante), ou se invertermos duas linhas ou duas colunas, os resultados finais serão, em essência, os mesmos. Considerando apenas as formas reduzidas, o número de quadrados latinos de ordem 9 ainda seria o extraordinário número de 377.597.570.964.258.816 (valor publicado em Discrete Mathematics, em 1975, por Stanley E. Bammel e Jerome Rothstein, na época pesquisadores da Universidade do Estado do Ohio) (DELAHAYE, 2006).

O Sudoku de ordem n (S_n)

Um Sudoku, de n elementos distintos, identificado por S_n, corresponde a uma Matriz Quadrada, de ordem n, onde seus elementos distintos aparecem em todas as linhas, colunas, submatrizes quadradas (A_1, A_2, ... , $A_{(k-1)}$, A_k), de ordem k, que compõe S_n, e que possui solução única.

TEOREMA 1) Todo Sudoku, de n elementos distintos, é uma Matriz Quadrada, de ordem n, se, e somente se, esta puder ser subdividida em k submatrizes quadradas, de ordem k, onde $\mathrm{k} = +\sqrt{\mathrm{n}}$ e $k \in N$.

DEMONSTRAÇÃO:

Todo Sudoku (S_n) deve conter um número inteiro e positivo de elementos distintos (n), os quais também devem compor as n distintas submatrizes quadradas (A_n), de ordem k, que formam S_n. Então, a ordem de S_n deve ser igual ao quadrado da ordem das submatrizes quadradas A_n. Ou seja, $\mathrm{n} = \mathrm{k}^2 \leftrightarrow \mathrm{k} = \pm\sqrt{\mathrm{n}}$.

Como k é a ordem das submatrizes A_n, esta também deve ser inteira e positiva, ou seja, $\mathrm{k} = +\sqrt{\mathrm{n}},\ \mathrm{onde\ k\ e\ n} \in \mathrm{N}$.

Consequentemente, só teremos Sudokus (S_n) de ordens: 1 (que desconsideraremos por razões óbvias), 4, 9, 16, 25, 36, ... , k^2, ... , onde $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$. Portanto, não teremos Sudokus de ordens: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ... , $(k - 1)^2$, $(k + 1)^2$, ... = $\mathrm{N} - \{\mathrm{n} \in \mathrm{N} \,/\, \sqrt{\mathrm{n}} \in \mathrm{N}\}$. Tais "não" Sudokus são na realidade Quadrados Latinos.

Por exemplo, um Sudoku, de ordem 4 (S_4), em sua forma matricial, é

representado por: $S_4 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_3] & [A_4] \end{bmatrix}.$

Vejamos os casos possíveis de Sudokus e Quadrados Latinos até a ordem 4:

CASO 1: Sudoku de ordem 1

Tabela 2: Sudoku de ordem 1.

Tipo de quadrado	Elementos/Quantidade	Submatriz	Nº mínimo de elementos a ser pré-fixado para obter solução única
1x1	a / 1	Não existe	0

Exemplo: S_1 = [a].

Não há número mínimo de elementos a serem fornecidos previamente para que este apresente “Solução Única”.

CASO 2: Quadrado Latino de ordem 2

Tabela 3: Quadrado Latino de ordem 2.

Tipo de quadrado	Elementos/Quantidade	Submatriz	Nº mínimo de elementos a ser pré-fixado para obter solução única
2x2	a,b / 2	1x1	1

Figura 5: Exemplos de Quadrados Latinos de ordem 2, onde 1 de seus 2 elementos é fornecido

a	b
b	a

b	a
a	b

a	b
b	a

b	a
a	b

Observe que embora possamos nomear quatro quadrados latinos 2x2, de fato, existe somente 1, visto que os demais ou é igual ao primeiro ou é obtido pela simples troca de letras, “a” por “b”, no caso.

Regra sobre o número de elementos mínimos à serem fornecido para se obter "Solução Única" no Quadrado Latino de ordem 2: Fixar um elemento qualquer, em qualquer posição da matriz 2x2, gera uma única solução para os quadrados latinos de ordem 2.

CASO 3: Quadrado Latino de ordem 3

Tabela 4: Quadrado Latino de ordem 3.

Tipo de quadrado	Elementos/Quantidade	Submatriz	Nº mínimo de elementos a ser pré-fixado para obter solução única
3x3	a,b,c / 3	1x1	2

Figura 6: Exemplos de Quadrados Latinos de ordem 3

a	b	c
c	a	b
b	c	a

c	b	a
a	c	b
b	a	c

b	a	c
c	b	a
a	c	b

a	c	b
b	a	c
c	b	a

c	a	b
a	b	c
b	c	a

b	c	a
c	a	b
a	b	c

a	b	c
b	c	a
c	a	b

c	b	a
b	a	c
a	c	b

b	a	c
a	c	b
c	b	a

a	c	b
c	b	a
b	a	c

b	c	a
a	b	c
c	a	b

c	a	b
b	c	a
a	b	c

Regra sobre o número de elementos mínimos a ser fornecido para se obter "Solução Única" no Quadrado Latino de ordem 3: Fixar dois elementos distintos, em linhas e colunas diferentes, em qualquer matriz 3x3, gera uma única solução para os quadrados latinos de ordem 3.

Observe, novamente, que os exemplos de quadrados latinos de ordem 3, apresentadas acima, muitos são equivalentes uns dos outros, visto que a simples troca de elementos (a por b, por exemplo) ou a troca de uma ou mais linhas ou colunas geram quadrados latinos equivalentes aos primeiros.

CASO 4: Sudoku de ordem 4

Tabela 5: Sudoku de ordem 4.

Tipo de quadrado	Elementos/Quantidade	Submatriz	Nº mínimo de elementos a ser pré-fixado para obter solução única
4x4	a,b,c,d / 4	2x2	4

Figura 7: Exemplos de Sudokus de ordem 4.

a	b	c	d
d	c	b	a
c	d	a	b
b	a	d	c

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

a	b	d	c
d	c	a	b
c	d	b	a
b	a	c	d

a	b	d	c
d	c	a	b
b	a	c	d
c	d	b	a

b	a	c	d
c	d	b	a
d	c	a	b
a	b	d	c

b	a	c	d
c	d	b	a
a	b	d	c
d	c	a	b

b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a
a	b	c	d

b	a	d	c
c	d	a	b
a	b	c	d
d	c	b	a

d	c	b	a
a	b	c	d
c	d	a	b
b	a	d	c

d	c	b	a
a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b

d	c	a	b
a	b	d	c
c	d	b	a
b	a	c	d

d	c	a	b
a	b	d	c
b	a	c	d
c	d	b	a

c	d	b	a
b	a	c	d
d	c	a	b
a	b	d	c

c	d	b	a
b	a	c	d
a	b	d	c
d	c	a	b

c	d	a	b
b	a	d	c
d	c	b	a
a	b	c	d

c	d	a	b
b	a	d	c
a	b	c	d
d	c	b	a

a	d	b	c
c	b	d	a
d	c	a	b
b	a	c	d

a	d	b	c
c	b	d	a
b	a	c	d
d	c	a	b

c	a	d	b
b	d	a	c
d	c	b	a
a	b	c	d

c	a	d	b
b	d	a	c
a	b	c	d
d	c	b	a

Com o intuito de facilitar a visualização e, a consequente determinação, da “Regra sobre o número de elementos mínimos à serem fornecidos para se obter “Solução Única” no Sudoku de ordem 4”, ao invés de trabalharmos com elementos literais (a, b, c e d), adotaremos cores (vermelho, verde, azul e laranja) para representá-los. Para isso, vamos primeiro definir o “número máximo de Sudokus de ordem 4”, possíveis de serem formados, fixando seus quatro elementos em uma submatriz quadrada de ordem k = 2 (A_1). A representação dessa matriz e de suas, respectivas, submatrizes estão na Figura 8, enquanto as cores fixadas na submatriz A_1 na Figura 9.

Figura 8: Sudoku de ordem 4, formado por quatro submatrizes, A_1, A_2, A_3 e A_4.

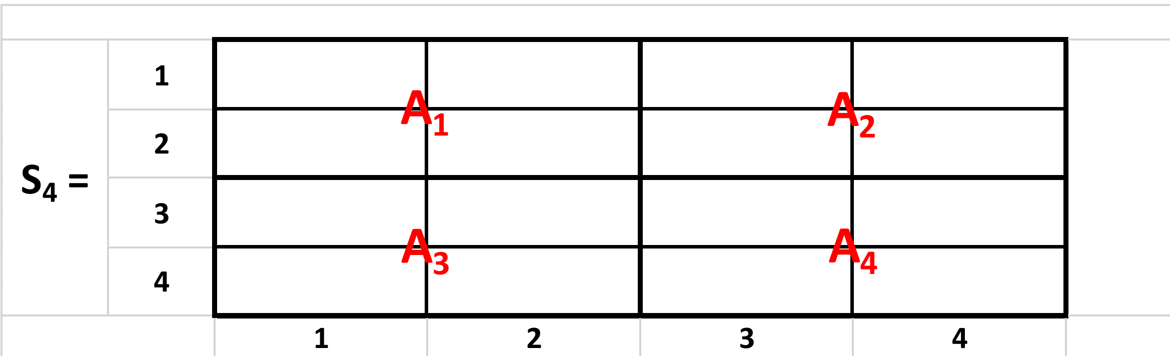
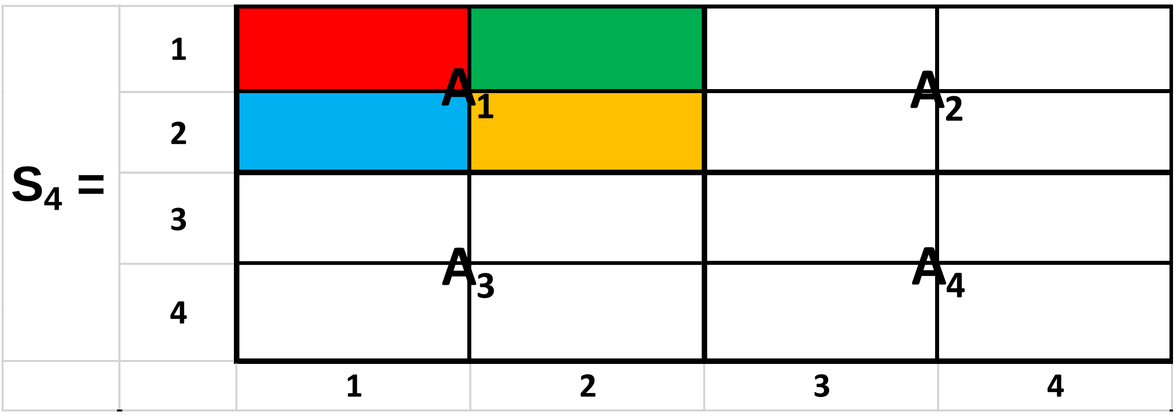


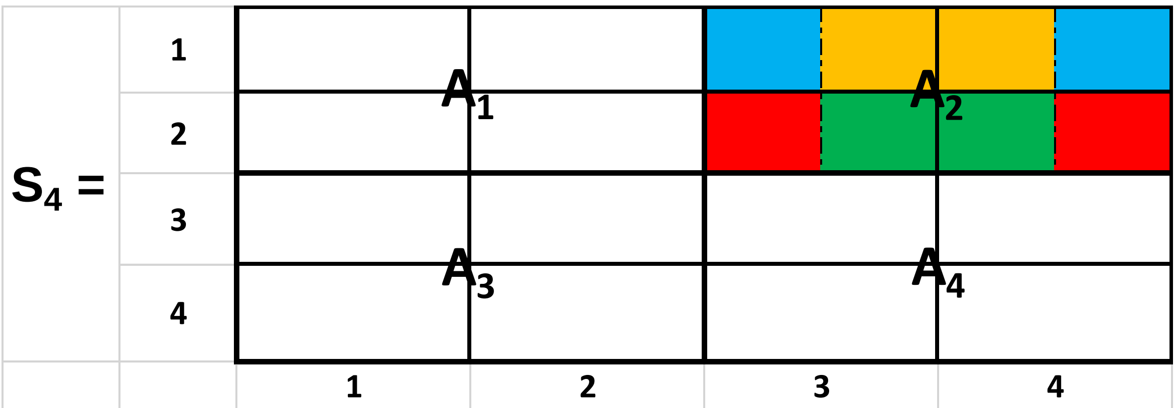
Figura 9: Sudoku de ordem 4, com seus elementos fixados na submatriz A_1.



Observe que o número total de possibilidades de fixar esses 4 elementos, na submatriz A_1 é de: $A_{k^2,k^2} = (k^2)! = n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades.

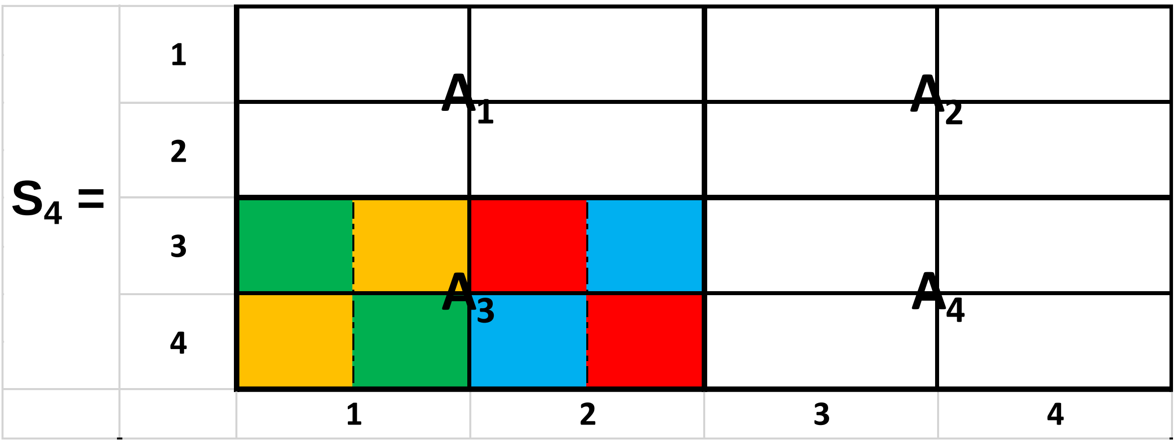
Nas Figuras 10 e 11 observamos as possíveis cores que podem aparecer nas submatrizes A_2 e A_3, respectivamente.

Figura 10: Possíveis cores da submatriz A_2.



Observe que, enquanto temos duas possibilidades de corres nas linhas 1 e 2, coluna 3, nessas mesmas linhas, mas na coluna 4, teremos uma única possibilidade de cor, tendo em vista que, em cada uma dessas linhas, quando três cores já estarão fixadas, restará apenas uma opção de preenchimento da coluna 4. Portanto, o número total de possibilidades de fixar os 4 elementos, na submatriz A_2 é de: $(A_{k,k})^2 = (k!)^2 = k^2 = n = 4$ possibilidades.

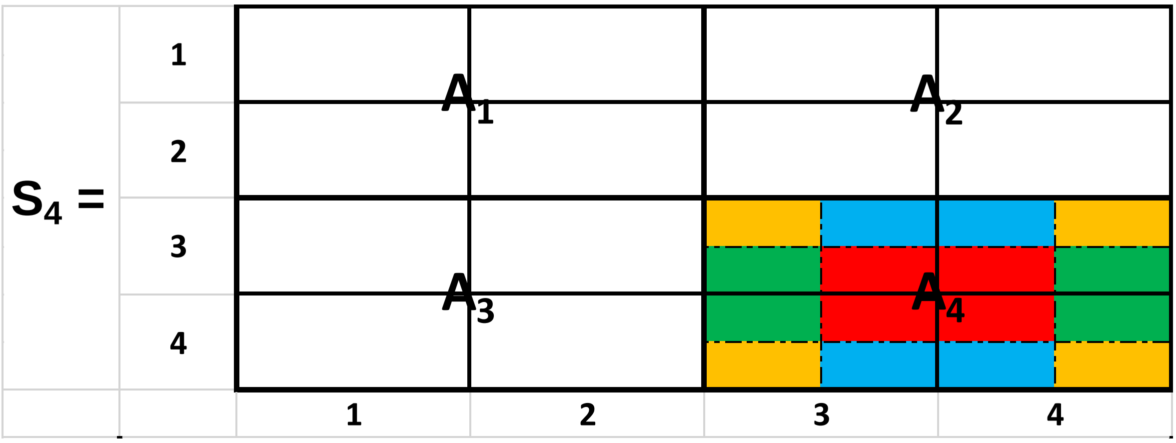
Figura 11: Possíveis cores da submatriz A_3.



Analogamente à Figura 10, observamos agora na Figura 11 que, enquanto temos duas possibilidades de cores para as colunas 1 e 2, linha 3, nessas mesmas colunas, mas na linha 4, temos uma única possibilidade de cor, tendo em vista que, em cada uma dessas colunas já possuirão três cores fixadas anteriormente. Portanto, o número total de possibilidades de fixar os 4 elementos, na submatriz A_3 é de: $(A_{k,k})^2 = (k!)^2 = k^2 = n = 4$ possibilidades.

Finalmente, tendo sido fixado o número máximo de distribuição das quatro cores nas submatrizes A_1, A_2 e A_3, as cores (elementos) da submatriz A_4, estarão, consequentemente, determinadas. A Figura 12, registra as 4 possíveis cores que podem ocorrer nas diferentes posições da submatriz A_4.

Figura 12: Possíveis cores da submatriz A_4.

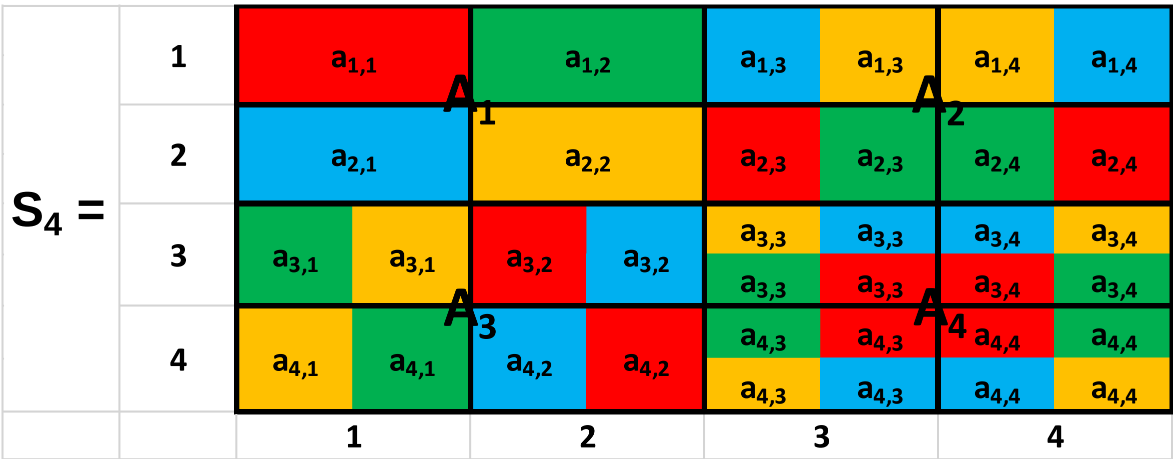


Logo, o número total de possibilidades de fixarmos os 4 elementos, na submatriz A_4 é de: $C_{k^2,k^2} = C_{n,n} = 1$ possibilidade.

Consequentemente, o "número máximo de possibilidades diferentes, de se preencher um Sudoku de ordem 4", tomando as submatrizes como referência, é de: $[(k^2)!] \times (k^2) \times (k^2) = n! \times n \times n = n! \times n^2 = 4! \text{ X } 4^2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 4^2 = 24 \times 16 = 384$ possibilidades, porem não são o número máximo de Sudokus, visto que algumas formas de preencher não geram Sudokus como será demonstrado nesse trabalho.

Na Figura 13 encontram-se representadas todas as possibilidades, de cores, que as submatrizes de S_4 podem conter.

Figura 13: Número de possibilidades de distribuição de seus elementos em um S_4.



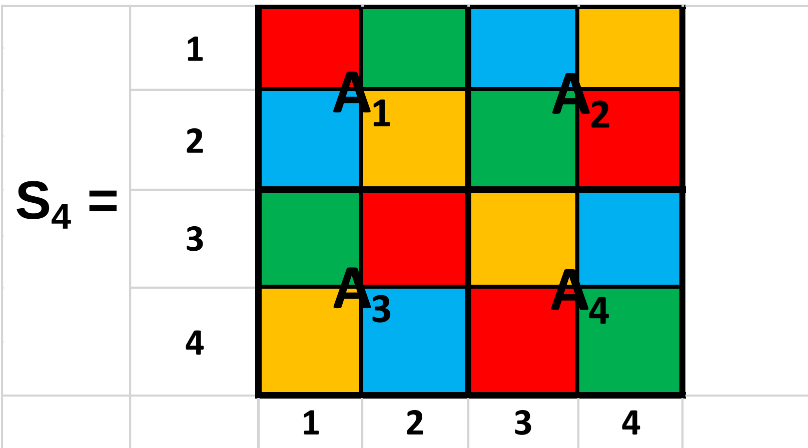
É importante observar que essas diferentes 384 possibilidades diferentes de se preencher um Sudoku de ordem 4, também podem ser calculadas tomando-se uma linha ou uma coluna, como referencial de preenchimento de seus quatro elementos distintos. A Figura 14 mostra isto.

Figura 14: Número total de possibilidades de se obter um S_4.

S4 =	1	4	3	2	1		1	4	3	2	1		
	2	2 A_1	1	2 A_2	1	≈	2	2	1	2	1	≈	384 possibilidades
	3	2 A_3	2	1 A_4	1		3	2	2	1	1		
	4	1	1	1	1		4	1	1	1	1		
		1	2	3	4			1	2	3	4		

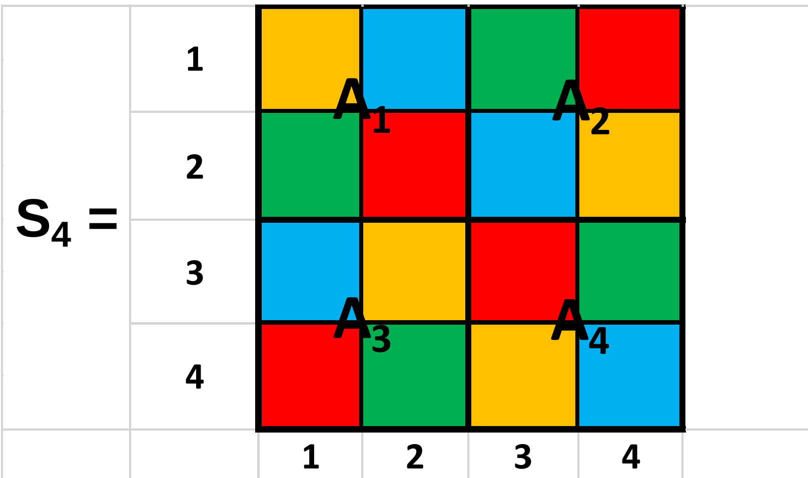
Tendo demonstrado que podemos ter 384 possibilidades de se preencher um Sudoku de ordem 4, passemos agora a analisar as possíveis formas de se obter os Sudokus ditos equivalentes, ou seja, aqueles que podem ser obtidos pela simples troca de seus elementos entre si (por exemplo, trocar a cor azul pela verde) ou por troca de linha(s) ou coluna(s). Para isso, vamos tomar como exemplo, uma das possibilidades de S_4, gerada pela fixação de seus elementos na submatriz A_1. A Figura 15 representa tal exemplo.

Figura 15: Exemplo de S_4, a partir da fixação de seus elementos na submatriz A_1.



Observe que a simples troca, duas a duas, de cores em nada altera o fato da solução ser única para o Sudoku de ordem 4. A Figura 16 mostra o mesmo S_4 da Figura 15, quando se troca as cores “vermelha por laranja” e “verde por azul”.

Figura 16: Exemplo do S_4 (Figura 15), com as cores trocadas: “vermelha por laranja” e “verde por azul”.



Observe que ambos os Sudokus de ordem 4 representados nas Figuras 15 e 16 são equivalentes, isto é, se trata do mesmo S_4. Além disso, ambos estão sendo contados como casos distintos (embora não o sejam) entre as 384 possibilidades calculadas anteriormente. Portanto, se levarmos em consideração as trocas, duas as duas, dos quatro elementos de S_4, o arranjo dos n elementos, n a n, calculado no número de possibilidades existentes em A_1 ($4! = 24$) decai para o arranjo dos n elementos, dois a dois, que é igual a $A_{4,2} = 4 \times 3 = 12$ possibilidades. Ou seja, o número de possibilidades de se ter um Sudoku de ordem 4 dito reduzido pela simples troca de seus elementos, dois a dois, decai para $12 \times 4^2 = 12 \times 16 = 192$ possibilidades, metade da originalmente calculada.

Além da troca de elementos, dois a dois, acima analisada, podemos também realizar os seguintes movimentos: **(1)** a inversão de linhas [Linha 1 pela 2, ou Linha 3 pela 4, ou Linhas 1 e 2 pelas Linhas 3 e 4, respectivamente, ou Linhas 1 e 2 pelas Linhas 4 e 3, respectivamente], sem comprometer a existência de S_4 com solução única (ver Figura 18 a, b, c e d); **(2)** a inversão de colunas [Coluna 1 pela 2, ou Coluna 3 pela 4, ou Colunas 1 e 2 pelas 3 e 4, respectivamente, ou Colunas 1 e 2 pelas 4 e 3, respectivamente], também sem comprometer a existência de S_4 com solução única (ver Figura 19: a, b, c e d); **(3)** a inversão de submatrizes [A_1 e A_2 por A_4 e A_3, respectivamente], sem comprometer a existência de S_4 com solução única (ver Figura 20). Em todas as Figuras referenciadas neste parágrafo tomaremos como base o exemplo apresentado na Figura 15.

Antes disso, porém, tomemos a Figura 17 que mostra os doze (12) Sudokus de ordem 4, possíveis de serem formados a partir das cores fixadas na submatriz A_1, do exemplo apresentado na Figura 15 (Sudoku 1, da Figura 17).

Figura 17: Doze possíveis Sudokus 4x4, possíveis de serem formados a partir das cores fixadas na submatriz A_1.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Sudoku 1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Sudoku 2

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

Sudoku 3

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Sudoku 4

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Sudoku 5

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

Sudoku 6

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Sudoku 7

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

(b) Sudoku 8

1	2	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	3	4

Sudoku 9

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

Sudoku 10

1	2	4	3
3	4	2	1
4	1	3	2
2	3	1	4

Sudoku 11

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

Sudoku 12

1
2
3
4

As cores aqui foram pré-definidas e associadas aos números de 1 a 4, possíveis elementos de um Sudoku 4x4. Caso se queira mudar as cores ou aplicar os movimentos que não alterem as regras do Sudoku como tocas de linhas (L1 pela L2 ou L3 pela L4 ou L1 e L2 pelas L3 e L4 ou L4 e L3, respectivamente) , ou colunas (C1 pela C2 ou C3 pela C4 ou C1 e C3 pela C2 e C4 ou C4 e C2, respectivamente) e, finalmente, as submatrizes (A1 e A2 pela A4 e A3, respectivamente), basta entrar na aba da "Página Inicial", clicar em "Formatação Condicional", "Escala de Cor (mais regras)", regra "Formatar apenas células que contenham" e seguir o procedimento definindo a cor a ser atribuida a cada valor númérico que teremos automaticamente os doze possíveis Sudokus 4x4 de serem formados.

É importante registrar que o procedimento descrito, ao final da Figura 17, mostra como devemos proceder, utilizando-se do software EXCEL, para obter os

12 possíveis sudokus quando são fixadas as cores da submatriz A_1. Ou seja, se o movimento a ser realizado alterar as posições das cores de A_1, devemos definir as cores das células registradas na planilha EXCEL, com os números “1, 2, 3 e 4”, de A_1 segundo as mudanças ocorridas em decorrência dos movimentos efetuados. Os 12 possíveis Sudokus formados a partir da “nova” A_1, aparecerão automaticamente.

As Figura 18(a, b, c e d), 19 (a, b, c e d) e 20, que aparecem a seguir, registram os movimentos realizados e, em cada uma delas, o número do Sudoku registrado referente a mesma posição deste na Figura17, feita a alteração necessária das cores de A_1.

Figura 18: Possíveis inversões de Linhas.

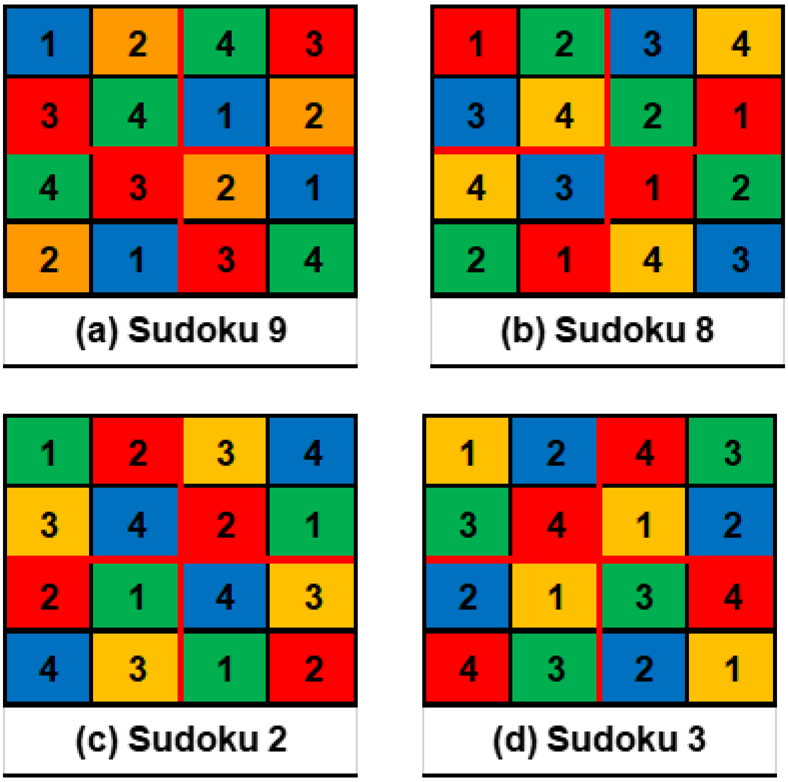


Figura 19: Possíveis inversões de Colunas.

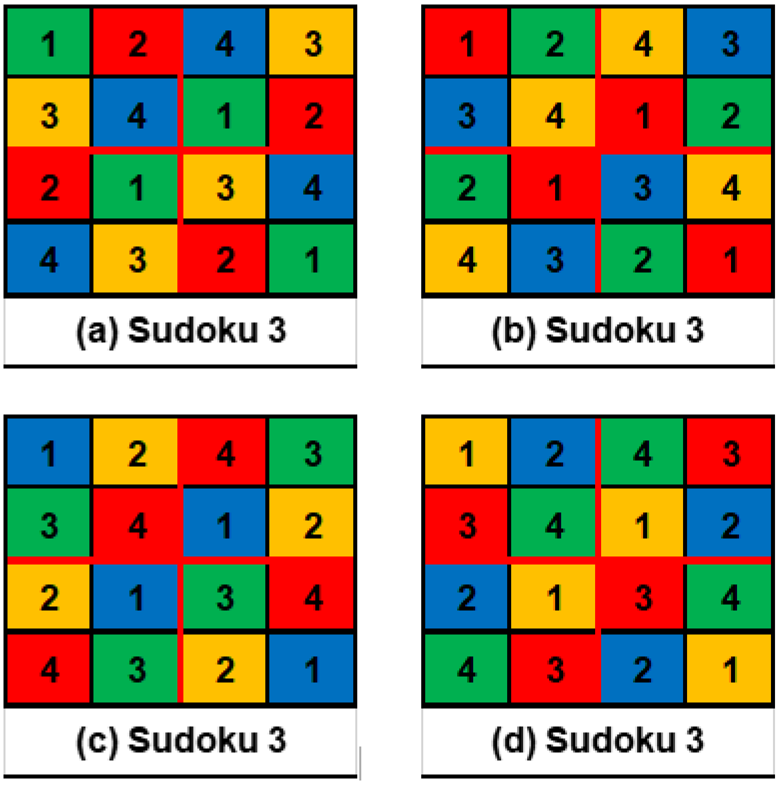
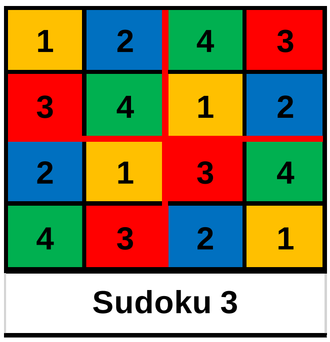


Figura 20: Possível inversão de Submatrizes.



Como observamos, todos os movimentos possíveis de serem feitos nos Sudokus 4x4, estão contemplados nas 192 possibilidades de Sudokus reduzidos 4x4.

Resta-nos então, procurar determinar qual o número de elementos mínimos a serem fornecidos em um Sudoku 4x4, para que suas regras referentes as linhas, colunas e submatrizes sejam contempladas e, consequentemente, gere solução única em sua resolução.

Se somente um elemento for fornecido, qualquer que seja a posição em que este se encontre no Sudoku 4x4, o número de possibilidades (p) das demais posições, nunca será único.

Figura 21: Sudoku 4x4, com 1 elemento fornecido e o número de possibilidades para as demais posições deste Sudoku.

2p	**2p**	**3p**	**2p**
2p	**3p**		**2p**
2p	**2p**	**2p**	**3p**
3p	**2p**	**2p**	**2p**

Portanto, o fornecimento de apenas 1 elemento, de um Sudoku 4x4, não leva a solução única.

Análogo a esse raciocínio, o mesmo se demonstra quando se fornece 2 ou 3 elementos, qualquer que seja a posição que eles ocupem no Sudoku 4x4.

Ao se fornecer 4 elementos e buscando contemplar as exigências referentes às linhas, colunas e submatrizes impostas a qualquer Sudoku, verifica-se que existem duas possibilidades de se obter solução única.

A primeira dessas possibilidades é impor que **“os quatro elementos fornecido sejam distintos e que apareçam em linhas, colunas e submatrizes diferentes”**.

Para demostrar que essas imposições levam a solução única no Sudoku 4x4, a Figura 22 registra o número de possibilidades (p), em cada posição do Sudoku.

Figura 22: Número de possibilidades (p), em cada posição do Sudoku.

4p	3p	2p	1p
2p	1p	2p	1p
2p	2p	1p	1p
1p	1p	1p	1p

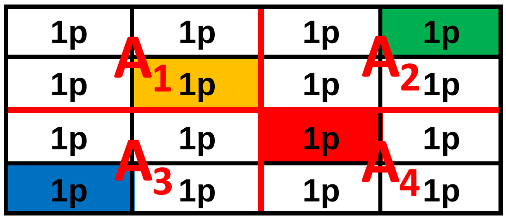
Utilizando cores para preencher os quatro elementos diferentes (vermelha, verde, azul e laranja), escolhidos em 4 linhas, colunas e submatrizes distintas e que tenham como número de possibilidades somente uma (Figura 22). Exemplo encontra-se registrado na Figura 23.

Figura 23: Sudoku 4x4, com 4 elementos distintos (cores), em 4 linhas, colunas e submatrizes diferentes, e com número de possibilidade 1.

			1p
	1p		
		1p	
1p			

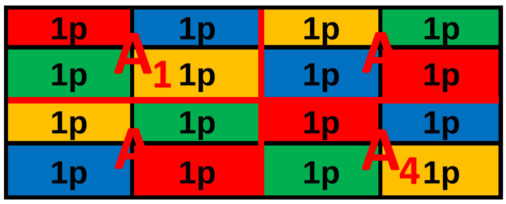
Levando em consideração os elementos fixados, o número de possibilidades (p) das demais posições do Sudoku de mesma ordem (Figura 21), e considerando a redução desses números de possibilidades (p), como consequência das cores fixadas (Figura 23). A Figura 24 mostra o número de possibilidades (p) de todas as posições do Sudoku, da Figura 23.

Figura 24: Número de possibilidades (p) das posições do Sudoku 4x4, com quatro de seus elementos dados.



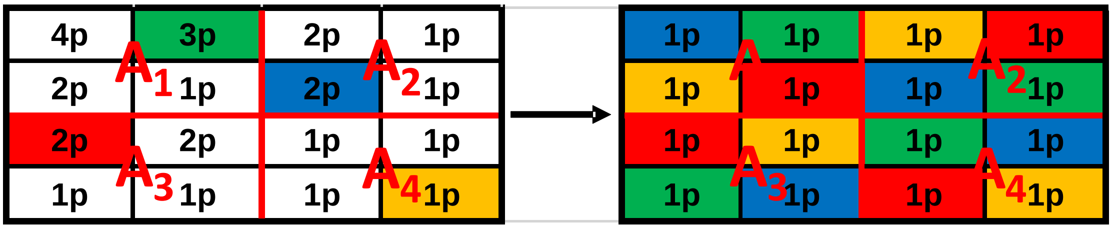
Como podemos constatar da Figura 24, a resolução do Sudoku 4x4, segundo a primeira regra estabelecida, isto é, o fornecimento de **“quatro elementos distintos que aparecem em quatro (4) linhas, colunas e submatrizes diferentes”,** gera solução única. Essa solução é apresentada na Figura 25.

Figura 25: Solução única do Sudoku apresentado na Figura 24.



Finalmente se verifica que não é necessário a escolha de quatro elementos distintos cujo número de possibilidades seja, necessariamente, um (1p). A Figura 26 apresenta a escolha desses quatro elementos com número de possibilidades de um, dois ou três (1p, 2p ou 3p) e a sua respectiva solução única.

Figura 26: Sudoku 4x4, com 4 elementos distintos fornecidos, mas com número de possibilidades (p) diferentes (p = 1, 2 ou 3) e sua respectiva solução única.



A segunda das possibilidades de se buscar um critério para encontrar uma solução única de um Sudoku 4x4, a partir da fixação de quatro elementos distintos, e imposta através da regra de que tais elementos **"apareçam em quatro (4) linhas/colunas distintas e em três (3) colunas/linhas e submatrizes diferentes"**.

Através de raciocínio análogo àquele desenvolvido na primeira possibilidade de regra, as Figuras 27 e 28 mostram quatro elementos distintos (4 cores), fixados em qualquer posição, com diferentes números de possibilidades daqueles apresentados na Figura 22, a partir da segunda regra imposta, bem como, o número de possibilidades (p) resultante após a fixação desses elementos, e suas respectivas soluções únicas.

Figura 27: Exemplo mostrando a solução única, com a imposição da segunda regra (4 linhas, 3 colunas e 3 submatrizes).

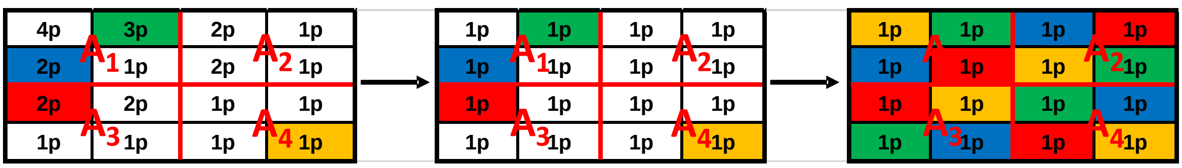
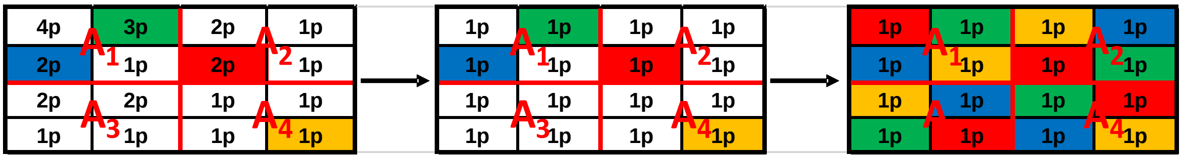


Figura 28: Exemplo mostrando a solução única, com a imposição da segunda regra (4 colunas, 3 linhas e 3 submatrizes).



Portanto, como podemos constatar dos exemplos mostrados nas Figuras 27 e 28, a resolução do Sudoku de ordem 4, pela segunda regra estabelecida, isto é, **“sendo fornecidos quatro elementos distintos que aparecem em quatro (4) linhas/colunas diferentes e em três (3) colunas/linhas e submatrizes distintas”,** gera solução única para o Sudoku 4x4.

Concluindo, sobre o Sudoku 9x9 é provável e, acredito, possível se aplicar um raciocínio análogo ao aqui exposto para o “Caso 4: Sudoku 4x4”, e se chegar ao número mínimo de elementos distintos necessários, de serem fornecidos, para se gerar Solução Única. No entanto, esse problema foge do escopo do TCC aqui proposto.

Entretanto, a respeito desse Sudoku, já existem exemplos que mostram que o menor número de elementos a ser fornecido para se chegar em uma solução única, é de dezessete (17). Segundo Gordon Royle, da Universidade do Oeste da Austrália, foram coletados mais de 49 mil exemplos de Sudokus 9 x 9 que satisfazem esse critério. Muitos destes exemplos foram especificados por entusiastas japoneses deste jogo. A Figura 29 exemplifica um desses Sudokus, com 17 elementos fornecidos e sua consequente solução única.

Figura 29: Exemplo de Sudoku 9x9, com 17 elementos fornecidos e sua consequente solução única.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

2	3	7	8	4	1	5	6	9
1	8	6	7	9	5	2	4	3
5	9	4	3	2	6	7	1	8
3	1	5	6	7	4	8	9	2
4	6	9	5	8	2	1	3	7
7	2	8	1	3	9	4	5	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
8	5	3	4	6	7	9	2	1
9	7	1	2	5	3	6	8	4

Os matemáticos já resolveram o problema oposto, ou seja, o do número máximo de elementos a ser fornecido para que um Sudoku 9x9 não tenha garantia de solução única. Este número é 77. É fácil observar que com 80, 79 ou 78 elementos, se houver solução, ela será única. Mas o mesmo não pode ser dito para 77. A Figura 30 traz um exemplo de Sudoku 9x9, com 77 elementos fornecidos e que apresenta duas Soluções possíveis (elementos fornecidos na cor preta e elementos possíveis de solução na cor vermelha).

Figura 30: Exemplo de Sudoku 9x9, com 77 elementos fornecidos e que apresenta duas Soluções possíveis.

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

→

$^{1}2$	$^{2}1$	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
$^{2}1$	$^{1}2$	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Tendo tecido essas considerações iniciais a respeito do Sudoku 9x9, se conclui o Capítulo IV desse TCC.

CAPÍTULO V: Sequência de atividades em Matemática, baseada no trabalho com Sudoku

A sequência de atividades em Matemática planejada como parte integrante desse TCC foi aplicada em quatro turmas distintas. Um nono ano do Ensino Fundamental, uma primeira e duas terceiras séries do Ensino Médio, da escola E. E. Humberto de Campos, em Sorocaba–SP. A sequência foi aplicada durante o estágio supervisionado deste aluno formando e, portanto, não pelo professor regular das turmas.

Como o Sudoku é um jogo/quebra-cabeça de lógica e raciocínio, ele pode ser trabalhado em qualquer ano/série do Ensino Fundamental e Médio, pois, pode ser abordado de diferentes formas. O Sudoku e suas regras podem ser introduzidos numa perspectiva histórica do quadrado latino, ou através de uma pesquisa, a ser desenvolvida pelos alunos. Além disso o Sudoku pode ser trabalhado utilizando-se de números, letras, figuras ou desenhos.

Nesta sequência de atividades serão abordados conceitos matemáticos de lógica, probabilidade e análise combinatória.

As atividades terão como objetivos centrais, desenvolver a lógica matemática através da resolução de diferentes Sudokus de dificuldades crescentes, aprofundar os conceitos de probabilidade e permutação através da atividade 4 onde os alunos desenvolvem a generalização da regra do elemento mínimo do Sudoku.

Para a execução das atividades planejadas, serão necessários os seguintes materiais: folhas de papel quadriculada e uma lista de Sudokus para os alunos resolverem.

V.1: Planejamento do desenvolvimento da sequência de matemática

V.1.a: A Primeira Atividade

Tempo previsto: 1 (uma) hora-aula.

Descrição pormenorizada da primeira atividade

Após as apresentações devidas, a primeira atividade com os alunos será questioná-los se alguém já jogou ou conhece o jogo Sudoku.

Feito este questionamento, relatar aos alunos o aparecimento histórico do Sudoku, traçando um paralelo entre o jogo e o conceito de Quadrado Latino, definido por Euler.

Após esta conversa inicial, serão apresentadas as regras do Sudoku 4x4. Isto é, trabalhando com os números naturais de 1 a 4, eles não poderão ser repetidos nas linhas horizontais e verticais, nem dentro dos quadrados menores. Em outras palavras, é permitido apenas um número natural de 1 a 4, em cada linha, coluna e dentro dos quadrados (submatrizes) menores.

Conjuntamente com tais regras, serão apresentados aos alunos os diferentes tipos de Sudoku, por exemplo, aqueles que não utilizam números, objetivando despertar ainda mais o interesse e a curiosidade dos alunos envolvidos no trabalho.

Finalizando a primeira atividade, ao menos um Sudoku deverá ser solucionado pelos alunos participantes.

V.1.b: A Segunda Atividade

Tempo previsto: 1 (uma) hora-aula.

Descrição pormenorizada da segunda atividade

Nesta segunda atividade, os alunos trabalharão em duplas.

Serão entregues a cada dupla, 5 (cinco) Sudokus 4x4, que possuem uma ordem crescente de dificuldade de solução. O objetivo aqui é que o aluno se depare com um número crescente de possibilidades para preencher as posições “em aberto” do Sudoku dado. Portanto, espera-se que as duplas de alunos sintam a necessidade de pensar logicamente antes de preencher um espaço vazio do Sudoku dado, pois, só assim, conseguirão chegar a sua solução única.

É importante nesse momento acompanhar o trabalho de cada dupla de alunos para identificar aqueles que permanecem com dúvidas, daqueles que ainda não entenderam a dinâmica de resolução do Sudoku 4x4, e, aqueles alunos que já compreenderam o processo de resolução.

Figura 31: Exemplos de Sudoku 4x4, a serem solucionados pelas duplas de alunos.

	4	1	2
1		3	
			3
4	3		1

3	4	1	
	2		
		2	
	1	4	3

			3
3	2	4	
	4		2
2			

	1	3	
2			
			3
	2	1	

		1	
4			
			2
	3		

V.1.c: A Terceira Atividade

Tempo previsto: 2 (duas) horas-aula.

Descrição pormenorizada da terceira atividade

Ao final dessa atividade, cada aluno deverá ser capaz de propor seu próprio Sudoku 4x4, que possua solução única.

Contudo, para isso ocorrer, eles precisam descobrir qual o número mínimo de elementos a serem pré-fixados para obter tal solução. Para atingir esse objetivo, os alunos devem ser conduzidos em seus raciocínios através de questionamentos, feitos pelo professor, para que eles possam compreender o problema proposto.

Por exemplo, questões do tipo: “É possível resolver um Sudoku 4x4, pré-fixando apenas um, dois ou três de seus elementos? Explique sua resposta.

Figura 32: Exemplos de Sudokus, 4x4, apresentados aos alunos para a busca de resposta à pergunta formulada.

1			

3			
	1		

		3	
	4		
2			

	1	3	
2			

		1	
4			
			2

Tendo sido respondido o primeiro questionamento, as duas perguntas a serem formuladas pelo professor serão: “É possível resolver um Sudoku 4x4, pré-fixando 4 de seus elementos? Em caso afirmativo, eles podem estar em qualquer posição?

Figura 33: Exemplos de Sudokus 4x4, apresentados aos alunos para auxiliá-los na busca das respostas às duas perguntas.

	4		
1		3	
		4	

3	4	1	
		3	

3	2		
	4		
2			

	1		
		4	
			3
	2		

		1	
4			
			2
	3		

O quarto questionamento do professor será: “Você conseguiria sugerir algum critério que os 4 elementos pré-fixados, precisariam contemplar para que o Sudoku 4x4, apresente Solução Única? Lembre-se que para ser um Sudoku todos os seus elementos básicos devem aparecer, sem repetição, nas linhas, colunas e submatrizes que compõem este Sudoku.

Com os alunos tendo criado uma “regra” que o número mínimo de elementos pré-fixados deve contemplar, possivelmente, eles conseguirão criar seus próprios Sudokus de ordem 4.

V.1.d: A Quarta Atividade

Tempo previsto: 1 (uma) hora-aula.

Descrição pormenorizada da quarta atividade

É possível, através das perguntas feitas na atividade anterior, descobrir as regras para que o Sudoku 4x4 apresente solução única? Quantos Sudokus 4x4 podem ser criados com este menor número de elementos pré-fixados?

REGRA – Pré-fixar 4 elementos diferentes, em 4 linhas, colunas e submatrizes distintas gera Sudoku 4x4 que apresentam “solução única”.

Figura 34: Sudoku 4x4, com suas 4 submatrizes de ordem 2.

A	**B**
C	**D**

a_{11}	a_{12}		
a_{21}	a_{22}		

Seja um Sudoku de ordem 4 como o mostrado na Figura 34. Observe que para preenchermos a submatriz A, o número de possibilidades para se fixar os quatro elementos (A, B, C, D) é dado pela permutação deles, ou seja, $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades. Por outro lado, para preenchermos a submatriz B, teremos 2 possíveis elementos para preenchermos sua linha 1 e outros 2 elementos para preenchermos sua linha 2. Ou seja, para preenchermos a submatriz B teremos 2x2 = 4 possibilidades. O preenchimento da submatriz C segue raciocínio análogo ao utilizado na submatriz B, tomando-se para isso suas colunas 1 e 2. Porém, temos um elemento a menos, ou seja, para o preenchimento da submatriz C teremos 2 possibilidades. Finalmente, para o preenchimento da submatriz D, para que o Sudoku 4x4 tenha solução única, somente haverá 1 possibilidade de elemento a ser fixado em cada uma de suas posições. Portanto, o número de Sudokus 4x4, com solução única, satisfazendo a REGRA acima especificada será igual a 24x4 x 2 x1 = 192 possibilidades.

Como registrado no início deste Capítulo, esta sequência de atividades foi elaborada para ser aplicada em quatro turmas distintas, um nono ano do Ensino Fundamental, uma primeira e duas terceiras séries do Ensino Médio, utilizando-se para isso do “jogo/quebra-cabeça” chamado Sudoku. Porém, com poucas alterações seria possível aplicar uma sequência de atividades similar a esta aqui apresentada, em diferentes anos/séries do Ensino Básico e ainda poderiam ser explorados outros tipos de Sudokus existentes. Caso os alunos tivessem acesso a um laboratório de informática, com computadores conectados à rede de internet, muitos sites que apresentam diferentes tipos e níveis de dificuldades de Sudokus poderiam ser explorados, aumentando, provavelmente, o interesse e o envolvimento no trabalho dos alunos participantes.

V.2: Análise da aplicação da Sequência de Atividades

Na primeira atividade da sequência, procurei trabalhar com o Sudoku através da parte histórica, mas a atenção dos alunos acabou se perdendo. Então, a partir da segunda turma na qual a sequência de atividades estava sendo aplicada, comecei a atividade fazendo um levantamento prévio a respeito do conhecimento dos alunos sobre o Sudoku. Alguns alunos já o conheciam. Então, introduzi a história do Sudoku, bem como, o conceito de quadrado latino. Aos poucos, conforme eu ia conversando com eles e colocando as regras básicas do Sudoku na lousa, para que os alunos pudessem consulta-las a posteriori, o trabalho teve sequência, e um exemplo de Sudoku foi resolvido. Isso aumentou o interesse e a participação dos alunos.

Na segunda atividade, passei uma folha para os alunos resolverem, em dupla, Sudokus 4x4 com dificuldades crescentes de resolução, tudo isso sem qualquer tipo de explicação ou orientação prévia, somente para que eles explorassem sozinhos a atividade. Claro que surgiram dúvidas, mas a maioria era quanto as regras do jogo. Algumas delas foram: se os elementos da diagonal do "quadrado" não tinham que seguir alguma regra; questões relativas aos quadrados menores (submatrizes do Sudoku) e questionamentos para saber se estavam fazendo certo o que havia sido solicitado (resolver o Sudoku dado).

Alguns alunos conseguiram entender a lógica da atividade e procuravam os lugares onde só um número era possível, mas, muitos alunos, quando se deparavam com duas possibilidades de preenchimento de uma determinada posição do Sudoku, ao invés de procurarem outra posição para preencher, escolhiam um número arbitrariamente como no exemplo registrado na Figura 35:

Figura 35: Exemplo de respostas dadas por dois alunos.

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

2	4		
3		1	
			4
	3		

(O da esquerda com solução correta e o da direita com preenchimento arbitrário registrado)

Quando todos os alunos concluíram e entregaram a resposta do Sudoku proposto, resolvi outro exemplo com eles na lousa, um dos mais difíceis, indagando a cada número a ser preenchido o que fazer quando há mais que uma possibilidade de preencher aquele espaço. Alguns respondiam corretamente e, ao final, todos conseguiram compreender que desde que se respeitassem as regras os Sudokus podem ser resolvidos.

Na terceira atividade, passei aos alunos folhas quadriculadas para, em duplas, tentassem propor um Sudoku 4x4, com o menor número de elementos pré-fixados possíveis, usando como exemplo os Sudokus discutidos e resolvidos anteriores por eles. Logo perceberam que o número mínimo de elementos pré-fixados seria de 4 (quatro) e que deveriam ser posicionados em diferentes sub-quadrados. No entanto, não conseguiram perceber que também precisavam estar em diferentes linhas e colunas, o que acabou causando alguns exemplos que davam certos, ou seja, que possuíam solução única, e outros sem solução única. A Figura 36 traz um exemplo de cada caso.

Figura 36: Exemplos de Sudokus 4x4, com (da esquerda) e sem (da direita) solução única.

3	4	1	2
2	1	4	3
1	3	2	4
4	2	3	1

3		4	
		1	
	3	2	1
2	1	3	4

Essa atividade foi muito interessante, gerando resultados muito diferentes. Houve duplas que tentaram pré-fixar apenas três elementos, como mostra a Figura 37, que não leva a solução única.

Figura 37: Exemplos de Sudokus 4x4, com apenas três elementos pré-fixados, que não geram solução única.

4	3	1	2
2	1		
3			1
1			

3	2	4	1
1	4		
4			
2			4

A quarta e última atividade tinha como objetivo que os alunos calculassem o número de Sudokus com a REGRA fixada anteriormente, com a ajuda do professor. Os alunos apresentaram extrema dificuldade nesse cálculo, embora já tivessem estudado o conceito de arranjo. Devido a isso, a atividade acabou sendo realizada na lousa através de perguntas que eu formulava a cada passo da resolução. Eles se surpreenderam com a quantidade possível de Sudokus e gostaram da atividade em si, pedindo para trazer, numa próxima oportunidade, Sudokus 9x9, que certamente são mais difíceis.

Analisando o desempenho de cada turma envolvida no trabalho, a primeira delas foi uma terceira série do Ensino Médio. A primeira atividade foi mais expositiva, o que não atraiu tanto o interesse dos alunos. Mesmo assim, eles resolveram as atividades e se empolgaram bastante, possivelmente pelo fato deles, a princípio, terem achado simples a atividade e, posteriormente, por uma questão de competição, cada aluno queria ser o primeiro a encontrar a solução dos Sudokus propostos. As demais turmas de modo geral foram bem parecidas, pois apesar da introdução ter sido um pouco diferente, eles se empolgaram bastante em resolver a primeira atividade.

Quando a segunda atividade foi apresentada, as turmas também de modo geral responderam de forma similar. A maioria dos alunos desistiu logo de início, pois não sabiam como começar a resolver a questão proposta (criar um Sudoku). Tendo em vista ser incomum os alunos serem solicitados a “criarem” algo no ambiente escolar. Os que tentaram foram pelo caminho da “tentativa e erro” e não desenvolveram um raciocínio lógico dedutivo para a criação de um Sudoku 4x4. Em ambas as atividades e também na terceira a lógica foi muito trabalhada pelos alunos, graças à dificuldade crescente, uma vez que eles entendem a proposta do preenchimento eles avançam mais rápido mesmo nos Sudokus mais difíceis.

Foi na terceira atividade que a diferença de habilidade matemática dos alunos, dos anos/séries em que a sequência de atividades foi aplicada, ficou mais evidente. Apesar do nono ano ter se destacado nas primeiras atividades, pois acharam diferente e divertido, e se esforçaram mais do que os alunos das demais séries (Ensino Médio), foi na terceira atividade que eles não conseguiram entender onde podiam chegar, provavelmente pela necessidade de entender a probabilidade presente na questão.

De forma geral, todas as turmas, participantes das atividades propostas neste TCC, não conseguiram desenvolver a quarta atividade a contento, e o trabalho realizado acabou sendo feito de forma mais expositiva pelo professor. Através de perguntas, chegamos à resolução do problema proposto, mas enquanto a terceira série, do Ensino Médio, que já havia estudado o conceito de permutação, os alunos não sabiam como utilizá-lo no contexto do “jogo” de Sudoku. Tinham apenas uma vaga ideia de onde iríamos chegar. Já o nono ano do Ensino Fundamental mostrou-se bastante interessado na questão posta, embora ainda não tivessem estudado o conceito de permutação.

CAPÍTULO VI: Conclusão

Ao longo desse trabalho foi possível responder as questões apresentadas na introdução, ou seja:

(1ª) Qual o número mínimo de elementos necessários de serem fornecidos para que um Sudoku 4x4 tenha solução única?

O Sudoku 4x4 gerou nos alunos as mesmas discussões que me motivaram a escolher este tema para o TCC. Foi possível dessa forma não somente responder essa questão, como foi relatado, mas junto com eles discutir e conduzir as descobertas feitas por mim, ao investigar a questão teórica e praticamente (Capítulo IV).

(2ª) Redigir, aplicar, analisar e discutir os resultados obtidos de uma sequência de atividades didáticas que leve os alunos a compreenderem a matemática envolvida na solução de um Sudoku 4x4, em particular, as condições necessárias e o número de mínimo de elementos fornecidos para definir um Sudoku 4x4, que possua solução única.

(3ª) Analisar e discutir como tais atividades influenciaram o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

A sequência de atividades redigida, aplicada, analisada e discutida neste TCC, apresentou algumas formas alternativas de se trabalhar com os conceitos matemáticos envolvidos na solução de um Sudoku 4x4. Não foi possível aplicar todas as formas possíveis de se trabalhar com esse tema em sala de aula, mas, mesmo assim, a escolha que fiz foi aquela que eu me sentia mais confortável. Isto é, trabalhando em um contexto histórico e partindo do conhecimento que os alunos possuíam sobre o “jogo” Sudoku. Através dessa estratégia de trabalho para a sala de aula, foi possível desenvolver os conceitos matemáticos envolvidos de maneira bastante interessante. Os alunos apresentaram um interesse maior e, o que é mais importante, um comprometimento maior com a atividade sendo desenvolvida, a qual, à medida que o conteúdo matemático se tornava mais complexo ele ia sendo construído naturalmente. Em momento algum os alunos não procuravam compreender o que estava sendo trabalhado e, se houve alguma forma de desinteresse, isso se deu pela falta de habilidade dos alunos em fazer perguntas, visto que somente são cobrados e “supostamente” ensinados a responderem perguntas.

(4ª) Avaliar como todo o processo de planejamento, elaboração e execução deste TCC influenciou minha formação como futuro professor de matemática, do Ensino Básico brasileiro.

Foi muito gratificante poder me aprofundar em um assunto, que sempre me despertou curiosidade. Nunca me afastei do esforço necessário para poder compreender, lógica e dedutivamente, as questões propostas para investigação.

Poder estudar a evolução dos conceitos do quadrado mágico para o quadrado latino, através de Euler, até o Sudoku moderno é visualizar uma mudança de problemas e paradigmas, onde a matemática está presente e viva.

Poder apresentar essa matemática contextualizada aos alunos foi muito gratificante para mim, futuro Professor de Matemática.

CAPÍTULO VII: Bibliografia

D'AMBROSIO, Ubiratan. Euler, um Matemático Multifacetado. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Campinas, v.09, n.17, p.13/31, abril/setembro. 2009.

DELAHAYE, Jean-Paul. The Science behind Sudoku. *Scientific American.* v. 294, n. 6, p. 81/87, 2006.

Euler, Leonhard. "Carta a Goldbach, 13 de março de 1742". Opera Omnia, Série IV, vol. 1, Correspondence, OO762 (classificação provisória).

FELGENHAUER, Bertram; JARVIS, Frazer. Mathematics of Sudoku I. *Mathematical Spectrum*, v. 39, n. 1, p. 15/22. 2006.

JARVIS, Frazer; RUSSELL, Ed. Mathematics of Sudoku II. *Mathematical Spectrum*. v. 39, n. 2, p. 54/58. 2007.