



Um estudo de equações diferenciais ordinárias:  
COVID-19 e Crescimento de Tumores

**Autor:** *Pedro Lucas Correa*

**Orientador:** *Ana Cristina de Oliveira Mereu*

**Disciplina:** Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

**Curso:** Licenciatura em Matemática

**Professores Responsáveis:**

Ana Cristina de Oliveira Mereu

Renato Fernandes Cantão

Sadao Massago

Sorocaba, 5 de outubro de 2022.



# Título do Trabalho

**Autor:** *Pedro Lucas Correa*

**Orientadora:** *Ana Cristina de Oliveira Mereu*

**Disciplina:** Trabalho de Conclusão de Curso 2

**Curso:** Licenciatura em Matemática

**Professores Responsáveis:**

Ana Cristina de Oliveira Mereu

Renato Fernandes Cantão

Sadao Massago

**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos - UFSCar  
Centro de Ciências e Tecnologia para a Sustentabilidade - CCTS  
Departamento de Física, Química e Matemática - DFQM

Sorocaba, 5 de outubro de 2022.

---

Pedro Lucas Correa

---

Ana Cristina de Oliveira Mereu



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 5/2022/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

PEDRO LUCAS CORREA

UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: COVID-19 E CRESCIMENTO DE TUMORES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 27 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientadora	Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Sadao Massago



Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina de Oliveira Mereu, Docente**, em 27/09/2022, às 15:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago, Docente**, em 27/09/2022, às 20:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Fernandes Cantao, Docente**, em 27/09/2022, às 21:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0822159** e o código CRC **EE2F6738**.



---

**Referência:** Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.034180/2022-85

SEI nº 0822159

*Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019*



## Resumo

O presente trabalho de conclusão de curso foi desenvolvido, tendo como objetivo principal, o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias e aplicação ao crescimento de tumores.

O trabalho baseou-se no estudo de equações diferenciais, aplicações de equações diferenciais no crescimento de casos de COVID-19, sistema de equações diferenciais planares, tópicos de álgebra linear, estudo de retrato de fase planares e aplicação de equações diferenciais em modelos de crescimento tumoral.

Ao fim do trabalho, os objetivos foram alcançados e o aluno pode observar seu avanço nas concepções matemáticas e suas aplicações no mundo ao seu redor.

**Palavra-Chave:** Equações diferenciais, Crescimento de tumores, Retrato de Fase, Álgebra linear, Aplicações, Sistemas lineares, COVID-19.

## Abstract

The course conclusion study was developed with the main objective of studying the cancers and their growth.

The work was based on the study of differential equations, applications of differential equations in the growth of COVID-19 cases, system of planar differential equations, linear algebra topics, phase portrait study and application of differential equations in tumor growth models.

At the end of the work, the objectives were observed around the world and the student can launch them in mathematical concepts and their applications around them.

**Keywords:** Differential Equations, Tumor Growth, Phase Portrait, Linear Algebra, Applications, Linear Systems, COVID-19.

# Sumário

Agradecimentos	xii
Introdução	xiii
<b>1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem</b>	<b>1</b>
1.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem . . . . .	1
1.2 O Modelo de Crescimento Populacional . . . . .	4
1.3 Colheita Constante e Bifurcações . . . . .	6
1.4 Aplicação: Crescimento Logístico e Método dos Quadrados Mínimos . . . . .	7
1.4.1 Introdução . . . . .	7
1.4.2 Crescimento Logístico . . . . .	8
1.4.3 Método dos Quadrados Mínimos . . . . .	11
1.4.4 Análise de Dados . . . . .	13
<b>2 Sistemas Lineares Planares</b>	<b>15</b>
2.1 Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .	15
2.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem . . . . .	16
2.3 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares Planares . . . . .	17
2.4 Dependência Linear . . . . .	19
2.5 Autovalores e Autovetores . . . . .	21
2.6 Resolução de Sistemas Lineares . . . . .	22
<b>3 Retratos de fase para Sistemas Planares</b>	<b>25</b>
3.1 Autovalores Distintos Reais . . . . .	25
3.2 Autovalores Complexos . . . . .	30
3.3 Autovalores Repetidos . . . . .	34
3.4 Mudança de Coordenadas . . . . .	35
3.5 Plano Traço-Determinante . . . . .	37
<b>4 Aplicações em Crescimento de Tumores</b>	<b>41</b>
4.1 Noções Biológicas do Câncer . . . . .	41
4.2 Crescimento . . . . .	41
4.3 Resultados . . . . .	43

5	Considerações Finais
---	----------------------

45
----

# Lista de Figuras

1.1	Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a > 0$ . . . . .	3
1.2	Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a < 0$ . . . . .	3
1.3	Gráfico das soluções de $x' = ax(1 - x)$ . . . . .	5
1.4	Gráfico da função $f_a(x) = 3, 2x(1 - x)$ . . . . .	6
1.5	Gráfico das funções $f_h(x) = hx(1 - x)$ . . . . .	7
1.6	Ajuste linear de pontos isolados . . . . .	12
1.7	Código: Método dos quadrados mínimos . . . . .	13
1.8	Comparação entre os métodos e os dados experimentais . . . . .	14
2.1	Retrato de fase para $x' = y, y' = -x$ . . . . .	19
3.1	Retrato de fase para $x' = -x, y' = y$ . . . . .	26
3.2	Retrato de fase para $x' = x + 3y, y' = x - y$ . . . . .	28
3.3	Retrato de fase para $x' = -2x, y' = -y$ . . . . .	29
3.4	Retrato de fase para $x' = 2x, y' = y$ . . . . .	30
3.5	Retrato de fase para $x' = 4x, y' = -4x$ . . . . .	32
3.6	Retrato de fase para $x' = -x + 3y, y' = -3x - y$ . . . . .	33
3.7	Retrato de fase para $x' = x + 3y, y' = -3x + y$ . . . . .	34
3.8	Plano traço-determinante . . . . .	39
4.1	Crescimento Tumoral . . . . .	44
4.2	Crescimento Tumoral nos primeiros 20 anos . . . . .	44



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por sempre ter me ajudado e me acompanhado em todos os momentos, por em toda dificuldade me trazer alívio e consolo. Agradeço aos meus pais Antonio Correa Junior e Danielle Cordeiro Pedra Correa por sempre terem me apoiado e dado auxílio, sendo os alicerces da minha vida, a minha irmã Natália Helena Correa por sempre me ajudar.

À Karen Simões Silva, minha noiva, por sempre estar comigo nos momentos mais difíceis me acalmando e tirando minhas ansiedades, me orientando, sendo paciente comigo e me estimulando sempre.

À Prof. Dr. Ana Cristina de Oliveira Mereu por aceitar ser minha orientadora, me auxiliando, orientando e ajudando, não somente nesse trabalho, mas em todo o processo de iniciação científica, aulas e vida acadêmica.

Aos meus amigos e colegas da Universidade, por sempre estarem juntos a mim na vida acadêmica, tornando o processo um pouco mais leve e extrovertido. Especialmente à Gabriela Mota e ao Gabriel Xavier pelos trabalhos e conhecimentos compartilhados.

À secretária do curso Rafaela Marie Arakaki por sempre me ajudar esclarecendo as dúvidas sobre as questões burocráticas na graduação.

A todos os professores e professoras que me acompanharam em todo o processo educacional, desde a educação infantil até o ensino superior, sendo cada um essencial para minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo financiamento.

À Universidade Federal de São Carlos pela graduação.



# Introdução

Este trabalho de conclusão de curso iniciou-se em 2021 com estudos de iniciação científica, em que o objetivo central era e é, o Estudo Qualitativo das Equações Diferenciais Ordinárias, tendo como outros objetivos: Familiarizar-se com o software de escrita  $\text{\LaTeX}$ ; Realizar pesquisas bibliográficas; Utilizar o software Mathematica; Utilizar a linguagem de programação Python; Aprimorar os conhecimentos matemáticos.

Tendo em vista o grande interesse pelo tema estudado na iniciação científica, decidiu-se continuar e ampliar os estudos nesse presente trabalho de conclusão de curso. Ademais, os estudos foram direcionados para equações diferenciais e aplicação em crescimento de tumores.

No primeiro capítulo, tópicos essenciais para o entendimento das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são apresentados e no final do capítulo buscou-se aplicar os conhecimentos num estudo de crescimento de casos de COVID-19 em Sorocaba-SP, comparando equações de crescimento com soluções numéricas.

O segundo capítulo resume-se em um estudo de sistemas lineares planares, passando por tópicos importantes da álgebra linear, como: Sistemas planares; Dependência linear; Autovalores; Autovetores e Resolução de sistemas lineares.

Já o terceiro capítulo tem como intuito, analisar os diferentes tipos de retrato de fase planares. No final do capítulo buscou-se o estudo de mudança de coordenadas. No quarto capítulo, o intuito foi o traço-determinante, para analisar o comportamento dos retratos de fase.

No quinto capítulo são introduzidas algumas noções biológicas do câncer, de seu crescimento, e são apresentados alguns resultados da modelagem do crescimento de tumores com a equação de Gompertz.

A principal referência usada para essa monografia foi Hirsch, Smale e Devaney (1974). E foi possível sanar todos os objetivos propostos inicialmente. O estudante compreendeu a escrita em  $\text{\LaTeX}$ , realizou-se diversas pesquisas bibliográficas, utilizou-se o software Mathematica e a linguagem Python e aprimorou seus conhecimentos matemáticos.



# Capítulo 1

## Equações Diferenciais de Primeira Ordem

### 1.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

O propósito desta seção é desenvolver alguns conceitos elementares e exemplos de equações diferenciais de primeira ordem. Esses exemplos ilustram algumas das ideias básicas da teoria das equações diferenciais ordinárias, na mais simples configuração possível. (HIRSCH, SMALE e DEVANEY, 1974).

Primeiramente será exposto conceitos elementares acerca de uma *equação diferencial de primeira ordem*, do tipo,

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1.1)$$

onde  $x = x(t)$  é uma função de valor real de uma variável real  $t$ ,  $\frac{dx}{dt}$  é sua derivada e  $a$  é um parâmetro real. Para a representação da derivada pode-se usar também  $x'$  e  $x'(t)$ . Para cada valor de  $a$  tem-se uma equação diferencial diferente.

Se  $k \in \mathbb{R}$  então pode-se afirmar que a solução dessas equações são obtidas pela função  $x(t) = ke^{at}$ . De fato,

$$x'(t) = ake^{at} = ax(t). \quad (1.2)$$

Além disso, a solução é única. Para concluir isso considere uma solução  $u(t)$  e calcule a derivada de  $u(t)e^{-at}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t)e^{-at}) &= u'(t)e^{-at} + u(t)(-ae^{-at}) \\ &= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Portanto,  $u(t)e^{-at}$  é uma constante  $k$ , então  $u(t) = ke^{at}$ . Logo, encontrou-se todas as

soluções da equação diferencial (1.1). Chama-se a coleção de todas as soluções de uma equação, *solução geral* da equação (1.2).

A constante  $k$  da solução (1.2), é completamente determinada se o valor  $u_0$  de uma solução em um ponto  $t_0$  é especificado.

Suponha que uma função  $x(t)$  que satisfaça a equação diferencial (1.1) também deva satisfazer  $x(t_0) = u_0$ . Então, deve-se ter  $ke^{at_0} = u_0$ , de modo que  $k = u_0e^{-at_0}$ . Assim, determina-se  $k$ , e a equação (1.1), portanto, tem uma única solução que satisfaz a condição inicial especificada  $x(t_0) = u_0$ . Afim de simplificar, toma-se  $t_0 = 0$ , então  $k = u_0$ . Não perde a generalidade em tomar  $t_0 = 0$ , pois se  $u(t)$  é uma solução com  $u(0) = u_0$ , então a função  $v(t) = u(t - t_0)$  é uma solução com  $v(t_0) = u_0$ . Com isso, define-se o *problema do valor inicial*, mais conhecido com a sigla PVI,

$$x' = ax, \quad x(0) = u_0. \quad (1.4)$$

Uma solução  $x(t)$  de um problema do valor inicial não deve apenas resolver a equação diferencial, mas também deve assumir o valor inicial  $u_0$  em  $t = 0$ .

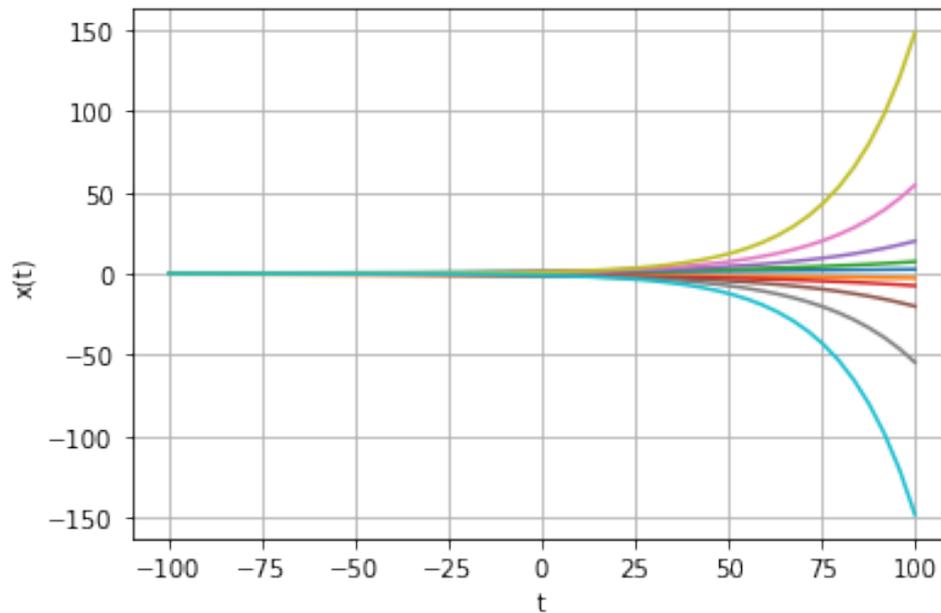
Há uma solução especial de (1.1) quando  $k = 0$ , isto é, a solução constante,  $x(t) \equiv 0$ . Uma solução constante é chamada de *solução de equilíbrio* ou *ponto de equilíbrio*.

A constante  $a$  na equação  $x' = ax$  é um parâmetro. Se  $a$  muda, então a equação e suas soluções também são alteradas. Ademais, pode-se descrever as mudanças qualitativas ocasionadas pelas possíveis mudanças do parâmetro  $a$ , ou seja:

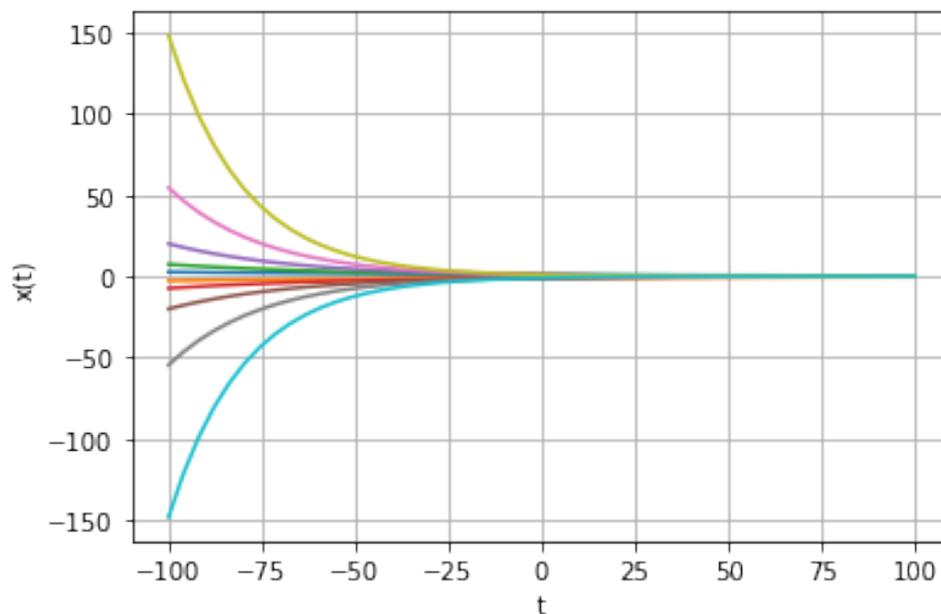
- Se  $a > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = \infty$  quando  $k > 0$ , e  $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = -\infty$  quando  $k < 0$ ;
- Se  $a = 0$ ,  $ke^{at} = \text{constante}$ ;
- Se  $a < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$ .

O comportamento qualitativo das soluções pode ser visto e entendido com as Figuras 1.1 e 1.2. Observa-se que o comportamento das soluções é extremamente diferente quando  $a$  é positivo e quando  $a$  é negativo. Quando tem-se  $a > 0$ , todas as soluções não nulas tendem para longe do ponto de equilíbrio em 0 à medida que  $t$  aumenta. Por outro lado, quando  $a < 0$ , as soluções tendem para o ponto de equilíbrio.

Diz-se que o ponto de equilíbrio é *repulsor* quando soluções próximas tendem a se afastar dela. Já o ponto de equilíbrio é *atrator* quando as soluções próximas tendem para ele.

Figura 1.1: Gráfico das soluções de  $x' = ax$  para  $a > 0$ .

Fonte: do próprio autor.

Figura 1.2: Gráfico das soluções de  $x' = ax$  para  $a < 0$ .

Fonte: do próprio autor.

Além disso, descreve-se soluções, colocando-as no retrato de fase, pois a solução  $x(t)$  é uma função do tempo, pode-se ver  $x(t)$  como uma partícula movendo-se. No ponto de equilíbrio, a partícula permanece em repouso, em qualquer outra solução move-se para cima ou para baixo em relação ao eixo  $x$ .

## 1.2 O Modelo de Crescimento Populacional

A equação diferencial  $x' = ax$ , é considerada um modelo simples de crescimento populacional quando tem-se  $a > 0$ . A quantidade  $x(t)$  mede a população de algumas espécies, em função do tempo  $t$ . (HIRSCH, SMALE e DEVANEY, 1974).

A taxa de crescimento populacional  $\frac{dx}{dt}$  é diretamente proporcional ao tamanho da população, o que leva a suposição que o crescimento populacional deve ser modelado por uma equação diferencial. Toda via, para obter um modelo mais próximo ao real, deve-se levar algumas hipóteses em consideração para realizar essa modelagem:

- Se a população for pequena, a taxa de crescimento é quase diretamente proporcional ao tamanho da população;
- Mas se a população crescer muito, a taxa de crescimento torna-se negativa.

Uma das equações diferenciais que satisfaz essas hipóteses é o *modelo logístico de crescimento populacional*, ou seja,

$$x' = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right). \quad (1.5)$$

Na equação (1.5)  $a$  e  $N$  são parâmetros positivos, onde  $a$  representa a taxa de crescimento populacional quando  $x$  é pequeno e  $N$  representa uma população ideal. Se  $x$  for pequeno, tem-se a equação diferencial  $x' = ax$ , pois o termo  $1 - (x/N) = 1$ , mas se  $x > N$ , então  $x' < 0$ . Assim a equação (1.6) satisfaz as hipóteses acima.

Sem perda da generalidade, supõe-se que  $N = 1$ , ou seja, a capacidade de carga nesse caso é igual a 1, exatamente 1 unidade da população, e  $x(t)$  representa a fração da população ideal presente no tempo  $t$ . Portanto a equação logística se reduz a,

$$x' = f_a(x) = ax(1 - x). \quad (1.6)$$

A equação (1.6) representa uma *equação diferencial não linear autônoma de primeira ordem*, diz-se ser de primeira ordem, pois há apenas a primeira derivada de  $x$ , autônomo pois o lado direito depende apenas de  $x$  e não linear pois  $f_a(x)$  é uma função não linear de  $x$ .

A solução da equação diferencial logística é facilmente encontrada pelo método de separação e integração:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt, \quad (1.7)$$

para  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ .

Utilizando o método das frações parciais na integral da esquerda, tem-se,

$$\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx. \quad (1.8)$$

Integrando ambos os lados e depois resolvendo para  $x$  resulta-se em,

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}}, \quad (1.9)$$

onde  $K$  é a constante arbitrária que surge da integração. Tendo  $t = 0$  e resolvendo para  $K$ , tem-se,

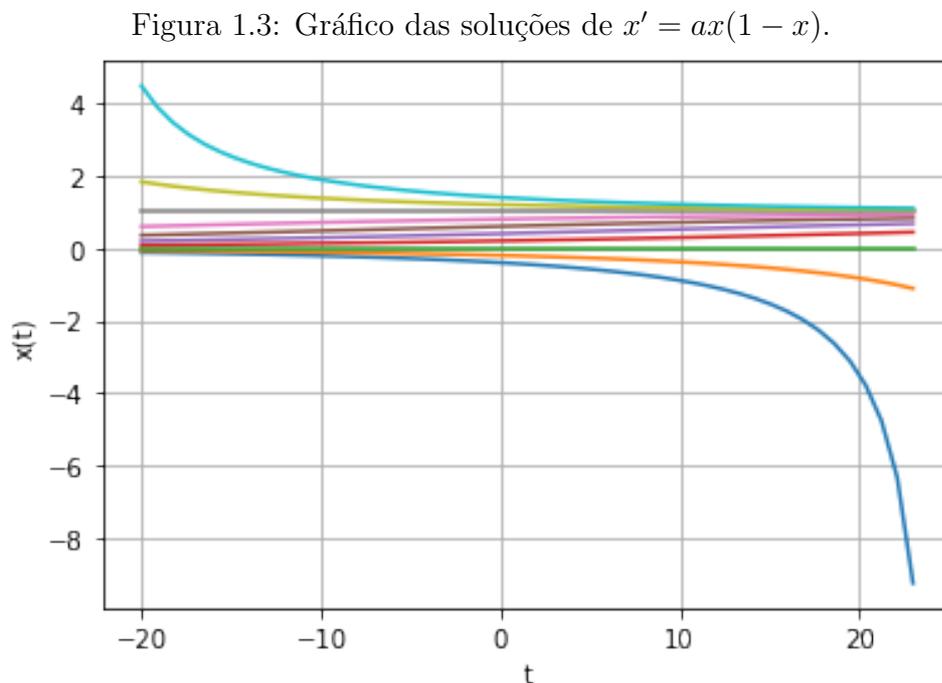
$$K = \frac{x(0)}{1 - x(0)}. \quad (1.10)$$

Pode-se reescrever a solução como,

$$\frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}}. \quad (1.11)$$

Portanto, essa solução é válida para qualquer população inicial  $x(0)$ . Quando  $x(0) = 1$ , tem-se uma solução de equilíbrio, pois  $x(t)$  se reduz a  $x(t) \equiv 1$ . Similarmente,  $x(t) \equiv 0$  é também uma solução de equilíbrio para a equação.

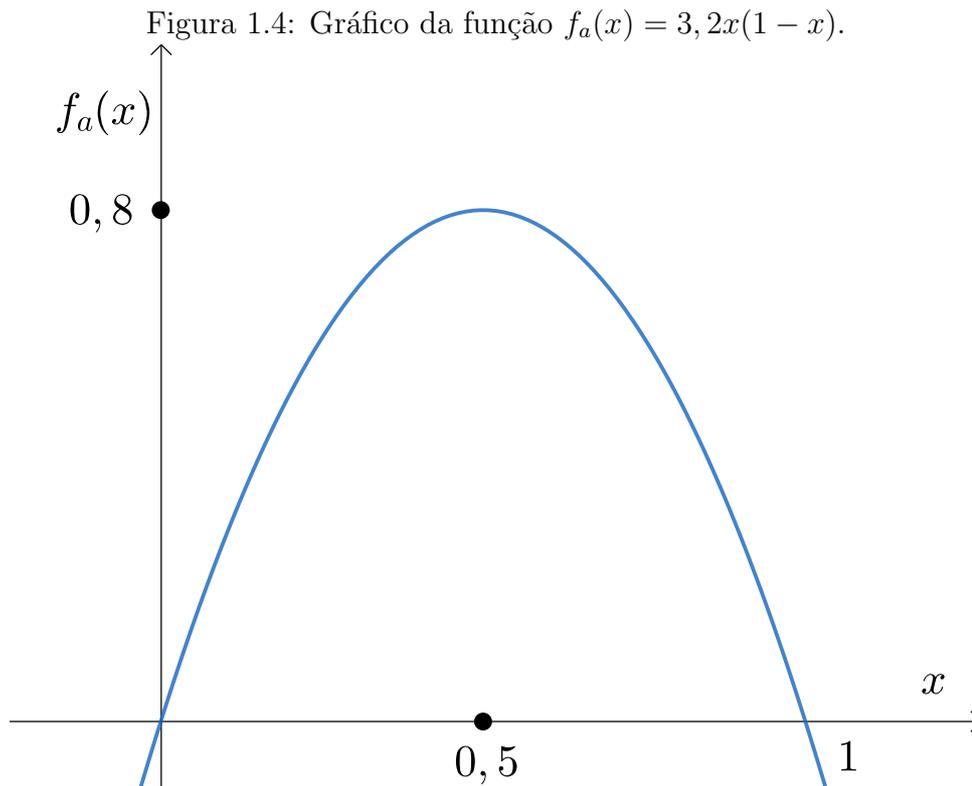
Para um entendimento melhor e uma visualização, plotou-se o gráfico que mostra as soluções para a equação em estudo através da Figura 1.3. No gráfico em questão tem-se o plano  $(t, x)$ .



Fonte: do próprio autor.

Analisando o gráfico da Figura 1.3 pode-se concluir que todas as soluções que têm  $x(0) > 0$  tendem a população ideal  $x(t) \equiv 1$ , já para  $x(0) < 0$ , as soluções tendem para  $-\infty$ .

Pode-se também entender o comportamento através do gráfico da função  $f_a(x) = ax(1 - x)$ . Na Figura 1.4 pode ser visto que o eixo  $x$  é cruzado em dois pontos  $x = 0$  e  $x = 1$ , logo, esses são os pontos de equilíbrio. Ademais, quando  $0 < x < 1$ , temos  $f(x) > 0$ , portanto, as inclinações são positivas em qualquer  $(t, x)$  com  $0 < x < 1$ , e assim as soluções devem aumentar nesta região. Quando  $x < 0$  ou  $x > 1$ , tem-se  $f(x) < 0$  e, portanto, as soluções devem diminuir, como pode ser visto em ambos os gráficos de solução.



Fonte: do próprio autor.

### 1.3 Colheita Constante e Bifurcações

Essa seção baseia-se em Hirsch, Smale e Devaney (1974). O intuito é modificar o modelo logístico para levar em conta a colheita de uma população. Supõe-se que a população siga os pressupostos logísticos com o parâmetro  $a = 1$ , mas também é colhida à taxa constante  $h$ , então tem-se a equação diferencial,

$$x' = x(1 - x) - h, \quad (1.12)$$

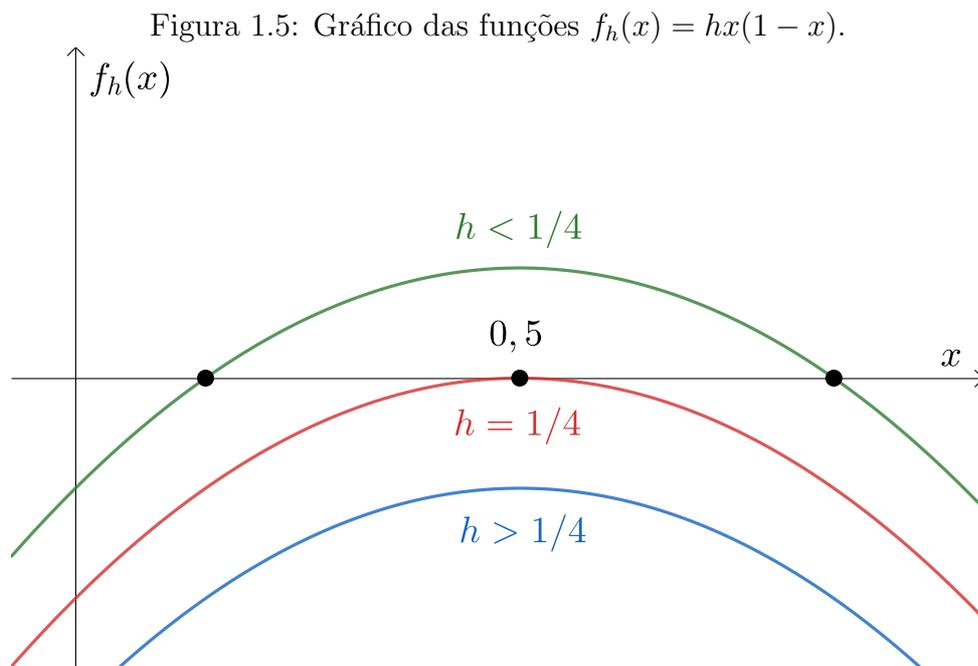
onde  $h \geq 0$  é um novo parâmetro.

Em vez de resolver analiticamente essa equação, usar-se-a o gráficos das funções,

$$f_h(x) = x(1 - x) - h, \quad (1.13)$$

para analisar o comportamento qualitativo das soluções. Na Figura 1.5 exibe-se o gráfico de  $f_h$  em três casos diferentes:  $0 < h < 1/4$ ,  $h = 1/4$  e  $h > 1/4$ . Sabe-se que  $f_h$  tem duas raízes quando  $0 \leq h < 1/4$ , uma raiz quando  $h = 1/4$  e nenhuma raiz se  $h > 1/4$ , conforme ilustra-se no gráfico. Como consequência, a equação diferencial tem dois pontos de equilíbrio,  $x_l$  e  $x_r$ , com  $0 \leq x_l < x_r$ , onde  $0 < h < 1/4$ . Também é fácil verificar que  $f'_h(x_l) > 0$ , então  $x_l$  é repulsor e  $f'_h(x_r) < 0$ , então  $x_r$  é atrator.

À medida que  $h$  passa por  $h = 1/4$ , encontra-se um exemplo de bifurcação. Os dois equilíbrios  $x_l$  e  $x_r$  coalescem à medida que  $h$  aumenta em  $1/4$  e então desaparecem quando  $h > 1/4$ . Além disso, quando  $h > 1/4$ , tem-se  $\forall x f_h(x) < 0$ . Matematicamente, isso significa que todas as soluções da equação diferencial diminuem para  $-\infty$  com o passar do tempo.



Fonte: do próprio autor.

## 1.4 Aplicação: Crescimento Logístico e Método dos Quadrados Mínimos

### 1.4.1 Introdução

A fim de trazer alguns conceitos trabalhados neste capítulo para uma realidade mais próxima, realizou-se uma comparação entre dois métodos diferentes para a modelagem do número de casos de COVID-19 em Sorocaba-SP.

Surpreendendo a todos, e surgida no final de 2019 em Hubei na China, a pandemia causada pela COVID-19, se alastrou pelo mundo com uma velocidade e um impacto assolador. Em meados de março de 2020 a pandemia era nova, porém presente em nosso país, e com o passar dos meses tomou proporções gigantescas. Seu alto nível de contágio impactou o mundo todo e devido a isso, toda a comunidade científica se empenhou para combater uma das maiores pandemias dos últimos 100 anos e a matemática não poderia ficar de fora dessa.

Em busca da compreensão do comportamento de infecção do vírus da COVID-19, diversos modelos matemáticos surgiram com possíveis previsões de comportamento no número de contágio. Era importante entender quantas pessoas poderiam ser infectadas, qual o pico da pandemia, o quão desolador ela poderia ser e trazer dados otimistas em relação ao fim dela e a um possível controle.

O artigo de Wang, Qiao e Li (2020), utiliza do modelo matemático de crescimento populacional, especificamente o da equação logística de Verhulst, desenvolvido por Pierre François Verhulst, para encontrar uma equação que prevê o número de possíveis casos de Covid em relação ao tempo. O modelo foi desenvolvido considerando o número de casos ocorridos entre 24 de março de 2020 a 24 de junho de 2020, no Texas, Estados Unidos. E tem como objetivo, estimar o número de casos futuros através da equação logística desenvolvida, dando o valor aproximado de casos conforme o tempo, onde o tempo é medido em meses. No artigo é apresentado um modelo para os casos de COVID-19 do estado e as possíveis tendências de contaminação do vírus. No entanto, devido a simplificação do modelo, os resultados obtidos não fizeram uma previsão muito precisa.

Até onde sabe, não existem trabalhos sobre o estudo de comparação para os casos de COVID-19 através do Crescimento Logístico de Verhulst e do Método dos Quadrados Mínimos, para a cidade de Sorocaba. Logo, o objetivo é comparar os dados reais de infectados com as aproximações dos modelos e se possível, perceber qual deles se aproxima mais da realidade, qual é o mais preciso e alcança valores mais satisfatórios em questão de previsão, a fim de alcançarmos uma dimensão dos impactos da pandemia na cidade.

### 1.4.2 Crescimento Logístico

Em algum momento se faz necessário ou se torna imprescindível questionar até onde uma coisa é capaz de chegar. Bacaer (2008) relata que Verhulst em 1838 fez isso e foi atrás de algo inimaginável; o limite de pessoas que a Bélgica poderia comportar/sustentar. O modelo Logístico de crescimento populacional de Verhulst, ao contrário dos convencionais modelos de crescimento utilizados, como o exponencial, onde se consideram apenas o crescimento em função do tempo podendo o valor da população ir ao infinito, leva em consideração um certo limite máximo na qual determinada população pode crescer, e que quando atingido esse valor o crescimento tende a estabilizar.

Esse limite estabelecido na equação logística de Verhulst leva em consideração fatores,

como os recursos disponíveis no ambiente, a existência de outras populações que vivem ao redor, o próprio tamanho da população, entre outros. O limite estabelecido, denominado de limite de carga, é um controlador para o crescimento populacional, pois impede que os valores alcancem números muito altos que não se enquadrem com a situação condizente. Devido ao seu limite de carga, que considera fatores para além da população em relação ao tempo, o crescimento logístico de Verhulst é muito utilizado nos estudos de crescimento populacional de vírus, habitantes de uma região e crescimento de espécies.

Já foi visto anteriormente que o modelo logístico de crescimento populacional pode ser representado pela equação (1.5), em que  $a$  e  $N$  são parâmetros positivos,  $a$  nos dá a taxa de crescimento populacional quando  $x$  é pequeno e  $N$  representa o tamanho da população "ideal" de tal forma que a população decresce caso  $x > N$  e cresce caso  $x < N$ .

Temos então, que a solução geral pode ser concebida isolando a variável  $x$ . Os dados foram retirados do Repositório do Centro de Ciência e Engenharia de Sistemas (CSSE) da Universidade Johns Hopkins, analisando o período correspondente entre os dias 28/03/2020 e 28/05/2021.

Para resolver o modelo de crescimento logístico primeiro é necessário isolar a variável  $x$ , tendo então uma equação que mostra a população dado num determinado tempo  $t$ . Para isto, primeiro divide-se ambos os lados da equação por  $(1 - x/N)$ , e em seguida aplica-se a integral como demonstrado pela equação (1.14).

$$\int \frac{N}{x(N-x)} dx = \int a dt. \quad (1.14)$$

Na parte esquerda da igualdade é necessário realizar integração por frações parciais, método indicado por Stewart (2016), de tal forma que  $N = A(N-x) + B(x)$ . Quando  $x = 0$ , temos que:  $N = A(N) \Rightarrow A = 1$ . Quando  $x = N$ , temos que:  $N = B(N) \Rightarrow B = 1$ . Dessa forma transformamos a equação 1.14 na 1.15, facilitando muito a integração.

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{N-x} dx = \int a dt. \quad (1.15)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \ln|x| - \ln|N-x| &= at + C \implies \\ e^{\ln|x| - \ln|N-x|} &= e^{at+C}. \end{aligned}$$

Seja  $K = e^C$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{N-x} &= Ke^{at} \implies \\
x + Ke^{at}(x) &= Ke^{at}(N) \implies \\
x &= \frac{NKe^{at}}{1+Ke^{at}} \implies \\
x &= \frac{N}{Ke^{-at}+1}. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Considerando o valor inicial  $x(0) = x_0$ , conseguimos encontrar o valor da constante  $K$ :

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{N}{K+1} \implies \\
K &= \frac{N-x_0}{x_0}.
\end{aligned}$$

Realizando algumas manipulações algébricas e substituindo o valor de  $K$  em (1.16), conseguimos chegar em (1.17) que representa a solução geral da equação.

$$x(t) = \frac{Nx_0}{e^{-at}(N-x_0) + x_0}. \tag{1.17}$$

Basta agora encontrar o valor das constantes  $N$  e  $x_0$ . Inicialmente será necessário isolar  $N$  em (1.17).

$$\begin{aligned}
x[e^{-at}(N-x_0) + x_0] &= Nx_0 \implies \\
xe^{-at}N - xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 \implies \\
-xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 - xe^{-at}N.
\end{aligned}$$

Fatorando e dividindo por  $xe^{-at} - x_0$  ambos os lados, encontramos  $N$

$$N = \frac{xx_0(e^{-at} - 1)}{xe^{-at} - x_0}. \tag{1.18}$$

Usando a equação acima, pode-se formar um conjunto de equações cuja interseção de seus gráficos possibilitará encontrar os valores numéricos de  $a$  e  $N$ . Dessa forma, as seguintes condições iniciais são selecionadas:

- $t = 0, x_0 = 1$ ; onde  $t = 0$  representa o dia 28/03/2020;
- $t = 200, x_{200} = 16408$ ; onde  $t = 200$  representa o dia 13/10/2020;
- $t = 400, x_{400} = 48344$ ; onde  $t = 400$  representa o dia 01/05/2021.

Uma vez que  $N_{200} = N_{400}$ :

$$\frac{x_{200}(e^{-200a} - 1)}{x_{200}e^{-200a} - 1} = \frac{x_{400}(e^{-400a} - 1)}{x_{400}e^{-400a} - 1}. \quad (1.19)$$

Considerando  $e^{-200a} = \alpha$  e simplificando a equação (7) temos:

$$\begin{aligned} x_{200}(\alpha - 1)(x_{400}\alpha^2 - 1) &= x_{400}(\alpha^2 - 1)(x_{200}\alpha - 1) \Rightarrow \\ \alpha^2(x_{400} - x_{400}x_{200}) + \alpha(x_{400}x_{200} - x_{200}) &+ (x_{200} - x_{400}) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores indicados e resolvendo a equação de segundo grau encontramos que  $\alpha = 0,000040263243750339205$ . Levando em conta que  $e^{-200a} = \alpha \Rightarrow a = \frac{\ln \alpha}{-200}$ , logo, encontramos que  $a = 0,050600357854$ . Substituindo o valor encontrado em qualquer um dos lados da equação (1.19) encontramos o valor da constante  $N$ :

$$N = \frac{x_{200}(\alpha - 1)}{x_{200}\alpha - 1} = 48347,789027325511440289401.$$

Por fim, basta substituir as constantes encontradas na equação (1.18), chegando assim no modelo de crescimento logístico para a cidade de Sorocaba-SP.

$$x(t) = \frac{48347,789027325511440289401}{e^{-0,050600357854t}(48346,789027325511440289401) + 1}. \quad (1.20)$$

### 1.4.3 Método dos Quadrados Mínimos

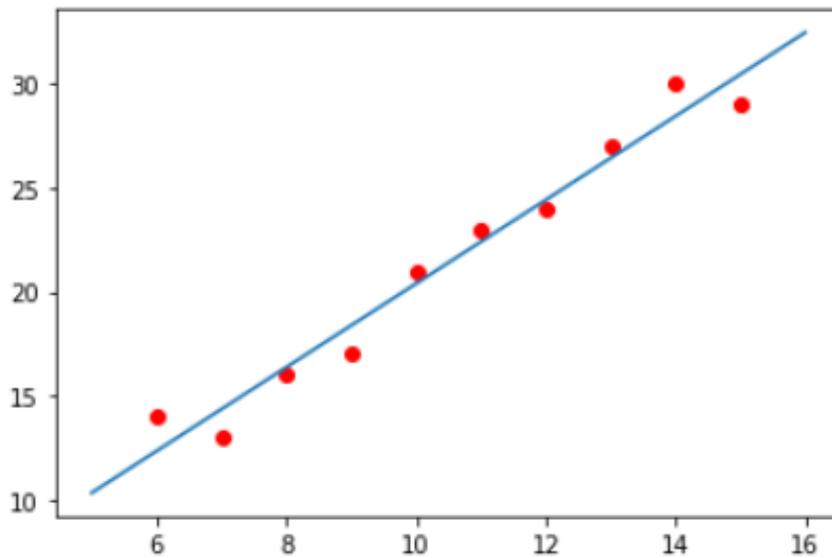
Nem tudo cresce ou decresce de maneira padronizada, que possam ser modelados por funções lineares ou exponenciais por exemplo, e esse é o caso da somatória de casos de COVID-19 em função do tempo, ou seja, quando transfere-se dados reais de uma tabela para um gráfico tem-se apenas pontos isolados do tipo  $(x, f(x))$ , tornando a previsão de dados futuros, uma tarefa difícil.

O objetivo do *Método dos Quadrados Mínimos* é portanto encontrar uma função que represente os valores tabelados a partir de dados reais, de modo que se tenha um menor erro das aproximações calculado medindo-se a distância entre o ponto coletado e o ponto aproximado pelo método. Como isso, nos permita determinar, com alguma precisão, valores futuros.

Na figura 1.6 é possível observar, que os pontos em vermelho são os pontos isolados, coletados no mundo real, e em azul há a reta que aproxima-se dos pontos, tendo o menor erro possível, que é advinda de um tratamento de dados, que no caso é o método dos quadrados mínimos.

Conforme sugere Ruggiero (1994), dados os pontos  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$  e as  $n$  funções  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ , o objetivo é encontrar os coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tais que a função  $\phi(x) = \alpha_1g_1(x) + \alpha_2g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$

Figura 1.6: Ajuste linear de pontos isolados



Fonte: do próprio autor.

se aproxime ao máximo de  $f(x)$ . Usando o método de mínimos quadrados, vamos ajustar o modelo de crescimento exponencial. Desta forma teremos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{\ln(\beta_1)+x\beta_2}. \\ \phi(x) &= \beta_1 e^{x\beta_2}. \\ \ln \phi(x) &= \ln(\beta_1 e^{x\beta_2}). \\ \phi_l(x) &= x\beta_2 + \ln(\beta_1).\end{aligned}$$

Sendo  $\phi_l$  a função linearizada. Basta então resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

em que  $a_{ij} = \sum_{k=1}^2 g_i(x_k)g_j(x_k)$ ,  $b_i = \sum_{k=1}^2 y_k g_i(x_k)$ ,  $g_1(x) = 1$ ,  $g_2(x) = x$ ,  $\alpha_1 = \ln(\beta_1)$  e  $\alpha_2 = \beta_2$ . Para realizar os cálculos foi utilizado o *python*, sendo que o código está apresentado na Figura 1.7.

O algoritmo apresenta como solução:  $\alpha_1 = 5,79191628$  e  $\alpha_2 = 0.0146837$ , ou seja:

$$\phi(x) = e^{5,79191628+0.0146837x}. \quad (1.21)$$

Figura 1.7: Código: Método dos quadrados mínimos

```

import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import numpy as np
import math
from math import *

data = pd.read_excel('COVID SOROCABA.xlsx')

tempo = data['Tempo'].values
y = data['SomaCasosConfirmados'].values
ly = np.log(y)

stempo = np.sum(tempo)

A = np.array([[len(tempo), stempo],
              [stempo, tempo.dot(tempo)]])

b = np.array([np.sum(ly), ly.dot(tempo)])

alpha = np.linalg.solve(A, b)

```

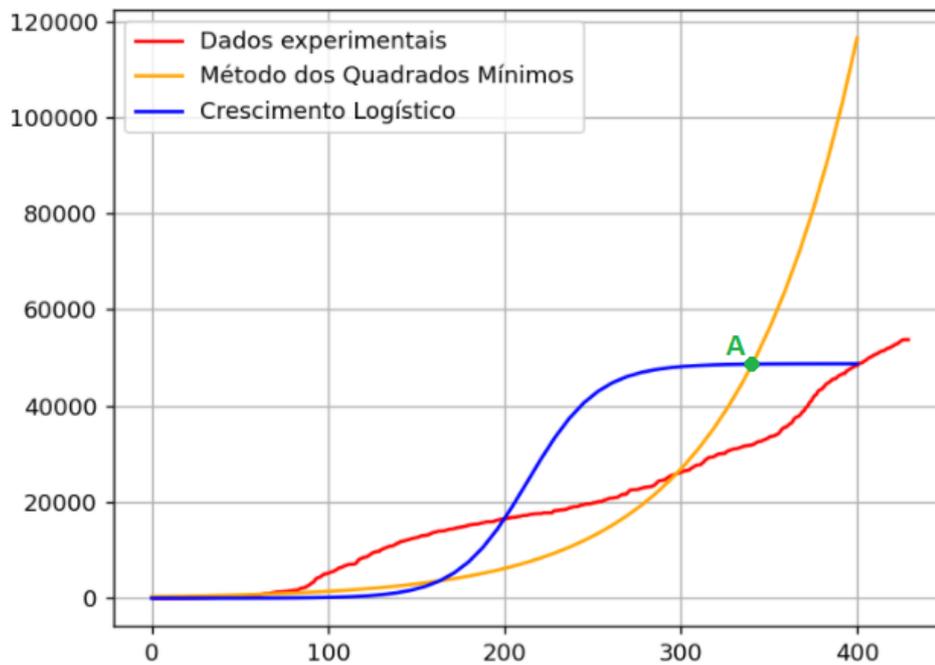
Fonte: do próprio autor.

#### 1.4.4 Análise de Dados

Ao analisar a proximidade das funções (1.20) e (1.21) com os dados experimentais percebe-se que ambas modelam a situação de forma satisfatória até certo ponto. Como pode-se visualizar através da Figura 1.8, o método dos quadrados mínimos fica cada vez mais distante da realidade conforme se distancia do ponto  $A$ , enquanto a aplicação pelo crescimento logístico aparenta ser mais fiel a partir deste ponto, tendo em vista que, mais cedo ou mais tarde, o número de casos irá se estabilizar.

Sendo assim, fica nítido que ambas as funções falham em modelar a tendência do crescimento dos dados reais do número de casos do COVID-19 na medida em que estendemos o tempo para além do ponto  $A$ .

Figura 1.8: Comparação entre os métodos e os dados experimentais



Fonte: do próprio autor.

## Capítulo 2

# Sistemas Lineares Planares

### 2.1 Sistemas de Equações Diferenciais

Utilizando o conceito abordado por Hirsch, Smale e Devaney (1974), e Boldrini, Costa Figueiredo e Wetzler (1980), um *sistema de equações diferenciais ordinárias* pode ser dado por

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

onde  $f_j$  são funções com valores reais de  $n + 1$  variáveis  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t$ , com  $j = 1, 2, \dots, n$ . Além disso,  $f_j$  são  $C^\infty$ , o que significa que todas as derivadas parciais existem e são contínuas.

A fim de simplificação, utiliza-se a forma matricial para a representação do sistema, que é do tipo

$$X' = F(t, X), \tag{2.1}$$

onde,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Uma solução para esse sistema, é uma função do tipo  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , que satisfaz a equação, ou seja

$$X'(t) = F(t, X(t)), \tag{2.3}$$

onde  $X'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$ .

Um sistema de equações diferenciais será dito *autônomo*, se nenhuma  $f_j$  depender de  $t$ .

Para o caso do estudo do sistema (2.1), deve-se entender que seu *ponto de equilíbrio* corresponde a uma solução constante de  $X(t) \equiv x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}$ .

Denota-se o espaço vetorial real  $n$ -dimensional por  $\mathbb{R}^n$ , de modo que  $\mathbb{R}^n$  consiste em todos os vetores da forma  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

## 2.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Inicialmente, utilizando os conceitos abordados por Hirsch, Smale e Devaney (1974) expõe-se como uma *equação diferencial de segunda ordem* é escrita

$$x'' = f(t, x, x'). \quad (2.4)$$

Grande parte das modelagens matemáticas são feitas através de equações diferenciais de segunda ordem. Para exemplificar, considere o exemplo da *segunda lei de Newton*, ou seja,

$$mx'' = f(x), \quad (2.5)$$

sendo a constante  $m$  real

Outro exemplo é a equação para um *circuito RLC* em engenharia elétrica,

$$LCx'' + RCx' + x = v(t), \quad (2.6)$$

sendo as constantes  $L, C, R$  reais.

E por fim, o *oscilador harmônico*,

$$mx'' + bx' + kx = f(t), \quad (2.7)$$

sendo  $m, b, k$  constantes reais.

Primeiro, no entanto, nota-se que as equações diferenciais de segunda ordem são uma subclasse especial de sistemas bidimensionais de equações diferenciais que são definidos simplesmente introduzindo uma segunda variável  $y = x'$

Para exemplificar, considera-se o seguinte exemplo,

$$x'' + ax' + bx = 0. \quad (2.8)$$

Se  $y = x'$ , pode-se reescrever a equação (2.8) como um sistema de equações primeira ordem, ou seja,

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -bx - ay.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Um sistema de equações diferenciais autônomo em  $\mathbb{R}^2$ , é descrito como,

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Habitualmente usa-se a notação em que  $X' = F(X)$ , onde  $X = (x, y)$  e  $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ .

A solução do sistema (2.10) pode ser visto e entendido através de uma curva parametrizada no plano da forma  $(x(t), y(t))$ , tal que para cada  $t$ , o vetor tangente no ponto  $(x(t), y(t))$  é  $F(x(t), y(t))$ , o que indica que a curva de solução  $(x(t), y(t))$  percorre o plano, tangente ao vetor dado  $F(x(t), y(t))$  com base em  $(x(t), y(t))$ .

## 2.3 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares Planares

Seguindo os passos de Hirsch, Smale e Devaney (1974), nessa seção é abordado o estudo do *sistema de equações diferenciais lineares planares*, ou seja

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy.\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números reais.

Pode-se reescrever o sistema (2.11) na forma matricial, ou seja,

$$X' = AX,\tag{2.12}$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\tag{2.13}$$

É de extrema importância, entender os *pontos de equilíbrios* de um sistema linear. A origem é sempre um ponto de equilíbrio de sistemas lineares planares (2.11). Para encontrar outros pontos de equilíbrios deve-se resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$0 = ax + by$$

$$0 = cx + dy. \quad (2.14)$$

Se  $\det(A) = 0$ , o sistema (2.14) tem infinitas soluções. Isso implica a existência de infinitos pontos de equilíbrios, ou seja, eles podem ser representados por uma reta passando pela origem. Porém, se  $\det(A) \neq 0$ , resulta em apenas um ponto de equilíbrio, sendo esse o ponto  $(0, 0)$ . Todas as afirmações dadas são válidas caso a matriz  $A$  seja não nula.

Os *sistemas autônomos* no  $\mathbb{R}^2$ , têm a seguinte forma,

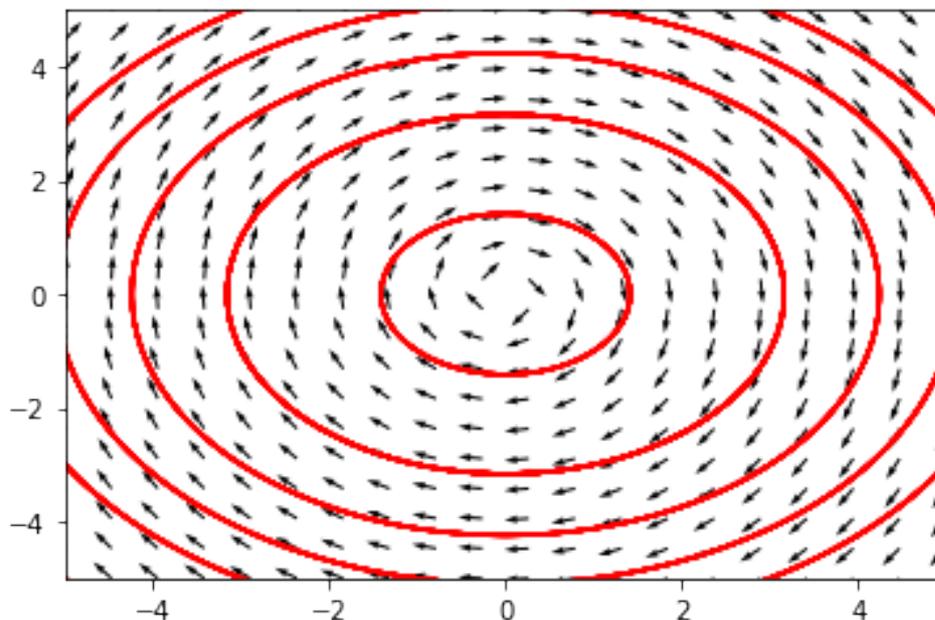
$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

Geralmente, usa-se a notação abreviada em que  $X' = F(X)$ , onde  $X = (x, y)$  e  $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ .

Tem-se  $F(x, y)$  representado como um vetor, cuja as componentes são  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ . Visualiza-se este vetor como sendo baseado no ponto  $(x, y)$ . Por exemplo, o *campo vetorial* associado ao sistema,

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

na Figura 2.1, tem-se o campo vetorial para a facilitação da visualização.

Figura 2.1: Retrato de fase para  $x' = y, y' = -x$ .

Fonte: do próprio autor.

Uma solução deste sistema deve ser entendida como uma curva parametrizada no plano da forma  $(x(t), y(t))$  tal que, para cada  $t$ , o vetor tangente em o ponto  $(x(t), y(t))$  é  $F(x(t), y(t))$ . Ou seja, a curva solução  $(x(t), y(t))$  percorre o plano sempre tangente ao vetor dado  $F(x(t), y(t))$  com base em  $(x(t), y(t))$ .

## 2.4 Dependência Linear

Para o entendimento dos sistemas de equações lineares planares, deve ter-se o conhecimento de tópicos da álgebra linear. Para isso essa seção tem como intuito estudar a dependência linear.

Utilizando os conceitos abordados por Boldrini, Costa, Figueiredo e Wetzler (1980), denota-se a dependência linear por:

Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Diz-se que o conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independente se a equação

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0, \quad (2.15)$$

é satisfeita somente para  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Caso contrário, se ela é satisfeita com algum  $a_i \neq 0$ , diz-se que o conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente dependente.

Outra maneira de analisar a dependência linear é,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é linearmente depen-

dente se, e somente se, um desses vetores for uma *combinação linear* dos outros. De fato, seja  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente dependente, assim

$$a_1v_1 + \dots + a_jv_j + \dots + a_nv_n = 0,$$

com algum dos coeficiente diferente de 0. Suponhamos  $a_j \neq 0$ . Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1v_1 + \dots + a_nv_n).$$

Logo,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j}v_n.$$

Portanto,  $v_j$  é uma combinação linear dos outros vetores. Por outro lado, suponha que para algum  $j$ ,

$$v_j = b_1v_1 + \dots + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + \dots + b_nv_n,$$

tem-se,

$$b_1v_1 + \dots - v_j + \dots + b_nv_n = 0,$$

com

$$b_j = -1,$$

e portanto,

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

é linearmente independente.

**Exemplo 1.** Verificar a dependência linear no  $\mathbb{R}^3$  de  $\{(1, 1, 0), (1, 4, 5), (3, 6, 5)\}$

Pode-se escrever o conjunto de vetores como:  $x(1, 1, 0) + y(1, 4, 5) + z(3, 6, 5) = (0, 0, 0)$ , logo:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} .$$

Escalonando, obtêm-se:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$

Conclui-se que  $x = -2$ ,  $y = -1$  e  $z = 1$ , então tem-se  $-2(1, 1, 0) - (1, 4, 5) + (3, 6, 5) = (0, 0, 0)$ , que estabelece uma relação de dependência entre os três vetores dados.

Assim os vetores são linearmente dependentes.

## 2.5 Autovalores e Autovetores

Inicialmente será definido o que é um autovalor e um autovetor.

Utilizando os conceitos de Callioli, Domingues e Costa (1990), se  $A$  é uma matriz de ordem  $n \times n$  então um vetor não nulo  $x \in \mathbb{R}^n$  é denominado *autovetor* de  $A$  se  $Ax$  for múltiplo escalar de  $x$ , isto é,

$$Ax = \lambda x, \quad (2.16)$$

com algum escalar  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  é denominado *autovalor* de  $A$ , e diz-se que  $x$  é um autovetor associado a  $\lambda$ .

Em função de  $\lambda$ , chama-se  $\det(A - \lambda I) = 0$  a *equação característica*. Assim, a estratégia para gerar autovetores é primeiro encontrar as raízes da equação característica. Isso produz os autovalores. Em seguida, usa-se cada um desses autovalores para gerar, por sua vez, um autovetor associado.

Tendo isto como base, partira-se para uma explicação do tema, baseando-se em exemplos, para melhor compreensão.

**Exemplo 2.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$  e  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

$x$  é um autovetor da matriz  $A$  pois associa-se  $x$  ao autovalor  $\lambda = 3$ , pois:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 8 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda x.$$

Portanto, tem-se que  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  é autovetor da matriz  $A$ , associado ao autovalor  $\lambda = 3$ .

**Exemplo 3.** Considere a matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Tem-se que,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Então a equação característica é

$$\det(A - I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 = 0. \quad (2.19)$$

Simplificando, encontra-se,

$$\lambda^2 - 4 = 0, \quad (2.20)$$

que produz os dois autovalores  $\lambda = \pm 2$ . Então para  $\lambda = 2$ , resolve-se a equação,

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Na forma de componentes, isso se reduz ao sistema de equações

$$\begin{aligned} (1 - 2)x + 3y &= 0 \\ x + (-1 - 2)y &= 0, \end{aligned}$$

assim, qualquer vetor da forma  $(3y, y)$  com  $y \neq 0$  é um autovetor associado a  $\lambda = 2$ . Da mesma forma, qualquer vetor da forma  $(y, -y)$  com  $y \neq 0$  é um autovetor associado para  $\lambda = -2$ .

## 2.6 Resolução de Sistemas Lineares

Os estudos feitos nessa seção terão como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Como visto na seção anterior, encontra-se duas raízes reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  da equação característica, então pode-se gerar um par de soluções do sistema de equações diferenciais da forma  $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ , onde  $V_i$  é o autovetor associado a  $\lambda_i$ . Observa-se que cada uma dessas soluções é uma solução em linha reta. De fato, tem-se  $X_i(0) = V_i$  que é um ponto diferente de zero no plano. Para cada  $t$ ,  $e^{\lambda_i t} V_i$  é um múltiplo escalar de  $V_i$ , se  $\lambda_i > 0$ , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_i(t)| = \infty \quad (2.22)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_i(t) = (0, 0). \quad (2.23)$$

A magnitude da solução  $X_i(t)$  aumenta de modo monótono para  $\infty$  ao longo do raio através de  $V_i$  à medida que  $t$  aumenta, e  $X_i(t)$  tende para a origem ao longo deste raio no tempo com o sentido contrário. O oposto ocorre se  $\lambda_i < 0$ , enquanto que, se  $\lambda_i = 0$ , a solução  $X_i(t)$  é a solução constante  $\forall t$   $X_i(t) = V_i$ .

Para encontrar-se todas as soluções do sistema, supõe-se que há dois autovalores distintos e reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  associados aos autovetores  $V_1$  e  $V_2$ . Sabe-se que  $V_1$  e  $V_2$  são linearmente independentes, assim  $V_1$  e  $V_2$  formam uma base no  $\mathbb{R}^2$ , então, dado qualquer ponto

$Z_0 \in \mathbb{R}^2$ , pode-se encontrar um único par de números reais  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais tem-se,

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = Z_0. \quad (2.24)$$

Considera-se a função  $Z(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ , onde  $X_i(t)$  são as soluções em linha reta. Tem-se que  $Z(t)$  é uma solução para  $X' = AX$ . Para mostrar isso, faz-se

$$Z'(t) = \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) \quad (2.25)$$

$$= \alpha AX_1(t) + \beta AX_2(t) \quad (2.26)$$

$$= A(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) \quad (2.27)$$

$$= AZ(t). \quad (2.28)$$

Assim, mostra-se que  $Z'(t) = AZ(t)$ , então  $Z(t)$  é uma solução. Ademais,  $Z(t)$  é uma solução que satisfaz  $Z(0) = Z_0$ . Logo, afirma-se que  $Z(t)$  é solução única de  $X' = AX$  que satisfaz  $Z(0) = Z_0$ .

Supõe-se que  $Y(t)$  é uma outra solução do tipo  $Y(0) = Z_0$ , ou seja,

$$Y(t) = \zeta(t)V_1 + \mu(t)V_2, \quad (2.29)$$

com  $\zeta(0) = \alpha$ ,  $\mu(0) = \beta$ . Por isso,

$$AY(t) = Y'(t) = \zeta'(t)V_1 + \mu'(t)V_2. \quad (2.30)$$

Mas

$$AY(t) = \zeta(t)AV_1 + \mu(t)AV_2. \quad (2.31)$$

$$= \lambda_1\zeta(t)V_1 + \lambda_2\mu(t)V_2. \quad (2.32)$$

Portanto, tem-se

$$\zeta' = \lambda_1\zeta(t) \quad (2.33)$$

$$\mu'(t) = \lambda_2\mu(t), \quad (2.34)$$

com  $\zeta(0) = \alpha$  e  $\mu(0) = \beta$ , então,

$$\zeta(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}, \mu(t) = \beta e^{\lambda_2 t}, \quad (2.35)$$

de modo que  $Y(t)$  é de fato igual a  $Z(t)$ .

Como consequência, encontra-se a solução única para o sistema  $X' = AX$  que satisfaz

$X(0) = Z_0$  para qualquer  $Z_0 \in \mathbb{R}^2$ . A coleta de todos essas soluções é chamada de solução geral de  $X' = AX$ . Ou seja, a solução geral é a coleção de soluções de  $X' = AX$  que apresenta uma solução única do problema do valor inicial  $X(0) = Z_0$  para cada  $Z_0 \in \mathbb{R}^2$ .

O Princípio de Linearidade é dado por: Suponha que  $Y_1(t)$  e  $Y_2(t)$  são soluções deste sistema, e que os vetores  $Y_1(0)$  e  $Y_2(0)$  são *linearmente independente*. Então

$$X(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t), \tag{2.36}$$

é a única solução deste sistema que satisfaz  $X(0) = \alpha Y_1(0) + \beta Y_2(0)$ .

## Capítulo 3

# Retratos de fase para Sistemas Planares

### 3.1 Autovalores Distintos Reais

Os estudos feitos nessa seção terão como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Inicialmente, considera-se  $X' = AX$  e supõe-se que  $A$  tenha dois *autovalores* reais  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Há três casos para considerar, com  $\lambda_i \neq 0$ , que são:

1.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ;
2.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ;
3.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

Para melhor entendimento e visualização, exemplos de cada um dos casos citados a cima.

**Exemplo 4.** Esse primeiro exemplo, tem como objetivo mostrar um caso em que o retrato de fase será uma *sela*. Inicialmente considera-se o sistema  $X' = AX$ , onde a matriz  $A$  é,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Considerando o primeiro caso em que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , pode-se transformar o sistema  $X' = AX$  em duas equações diferenciais de primeira ordem que não estão relacionadas, ou seja,

$$x' = \lambda_1 x \quad (3.2)$$

$$y' = \lambda_2 y. \quad (3.3)$$

O próximo passo para a resolução desse exemplo é encontrar os autovalores e autovetores. Para isso é importante a sua equação característica, que é,

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0. \quad (3.4)$$

Logo,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores, e os seus autovetores são  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  respectivamente. Assim a solução geral é,

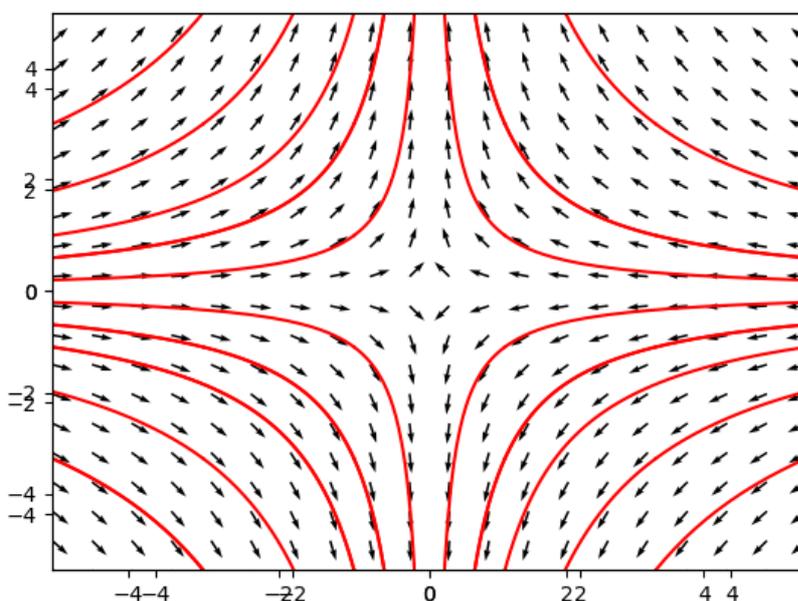
$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Como tem-se  $\lambda_1 < 0$ , as soluções em linha reta da forma  $\alpha e^{\lambda_1 t}(1, 0)$ , estão no eixo  $x$  e tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , esse eixo é nomeado como *linha estável*. Já, para  $\lambda_2 > 0$  as soluções  $\beta e^{\lambda_2 t}(0, 1)$  estão no eixo  $y$  e tendem para longe de  $(0, 0)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , esse eixo é uma linha instável.

Ademais, as outras soluções com  $\alpha, \beta \neq 0$  tendem para  $\infty$  com direção da linha instável, quando  $t \rightarrow \infty$ , já que  $x(t)$  torna-se próximo de  $(0, \beta e^{\lambda_2 t})$  enquanto  $t$  aumenta. Já quando o tempo retrocede essas soluções tendem para  $\infty$  na direção da linha estável.

Na Figura 3.1 traça-se o retrato de fase do sistema em estudo nesse exemplo. Nesse caso os autovalores são do tipo  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Um ponto de equilíbrio de um sistema desse tipo é chamado de sela.

Figura 3.1: Retrato de fase para  $x' = -x, y' = y$ .



Fonte: do próprio autor.

**Exemplo 5.** É possível ter um exemplo mais complexo, por exemplo. Considere o sistema  $X' = AX$ , onde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Os autovalores associados a  $A$  são 2 e  $-2$ , o autovetor associado a  $\lambda = 2$  é o vetor  $(3, 1)$ , e o autovetor associado a  $\lambda = -2$  é o vetor  $(1, -1)$ . Logo, tem-se uma *linha instável* que contém soluções em linha reta, ou seja,

$$X_1(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

que tendem para longe da origem quando  $t \rightarrow \infty$ . A linha estável contém as soluções em linha reta, ou seja,

$$X_2(t) = \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

que tendem para origem quando  $t \rightarrow \infty$ . Pelo *Princípio da Linearidade*, qualquer outra solução assume a forma do tipo,

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

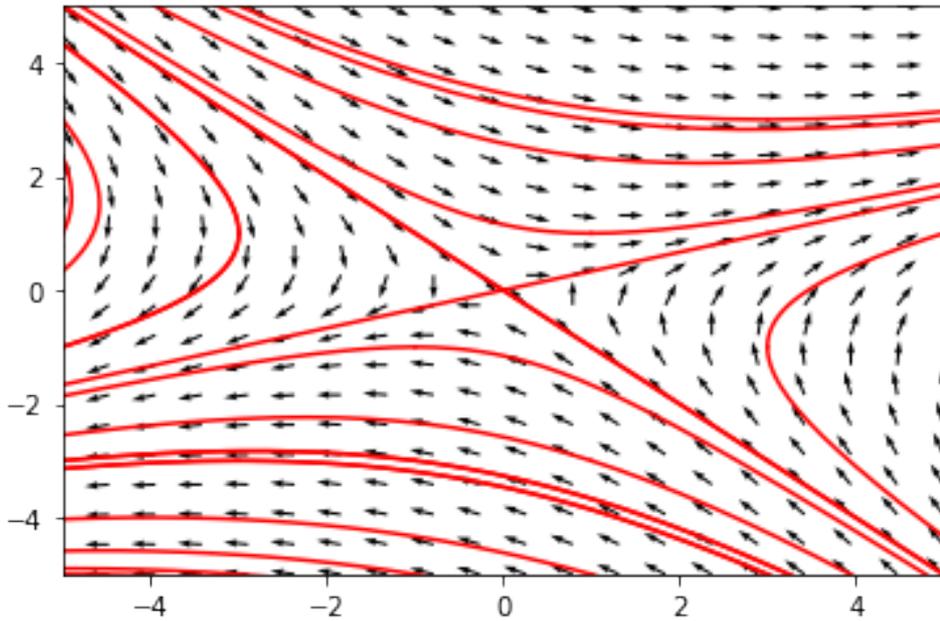
para algum  $\alpha, \beta$ . Note que se  $\alpha \neq 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se

$$X(t) \sim \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1(t). \quad (3.10)$$

Ademais, se  $\beta \neq 0$ , como  $t \rightarrow -\infty$ , tem-se,

$$X(t) \sim \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2(t). \quad (3.11)$$

Logo, pode-se observar que a medida em que  $t$  aumenta a solução aproxima-se de  $X_1(t)$ , porém, quando  $t$  diminui, esta solução tende para  $X_2(t)$ . Do mesmo modo ocorrido no último caso, é possível ver esse caso no retrato de fase ilustrado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Retrato de fase para  $x' = x + 3y, y' = x - y$ .

Fonte: do próprio autor.

Portanto, generalizando, caso  $A$  tenha um autovalor positivo e outro negativo, sempre encontra-se uma reta estável e outra instável, nas quais as soluções tendem para origem, ou para longe dela, respectivamente. Todas as outras soluções se aproximam da reta instável quando  $t \rightarrow \infty$ , e tendem para a reta estável quando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Exemplo 6.** Nesse exemplo, será mostrado o caso em que  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Considere  $X' = AX$ , onde,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Pode-se ver que a solução geral desse sistema é,

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

É possível observar que todas as soluções tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$  um fator de extrema importância, é entender como as soluções se aproximam da origem. Para concluir isso, é necessário calcular a derivada, a fim de ver a inclinação, ou seja,

$$\frac{dy}{dx}, \quad (3.14)$$

de alguma solução, que tenha  $\beta \neq 0$ , onde,

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \quad (3.15)$$

$$y(t) = \beta e^{\lambda_2 t}. \quad (3.16)$$

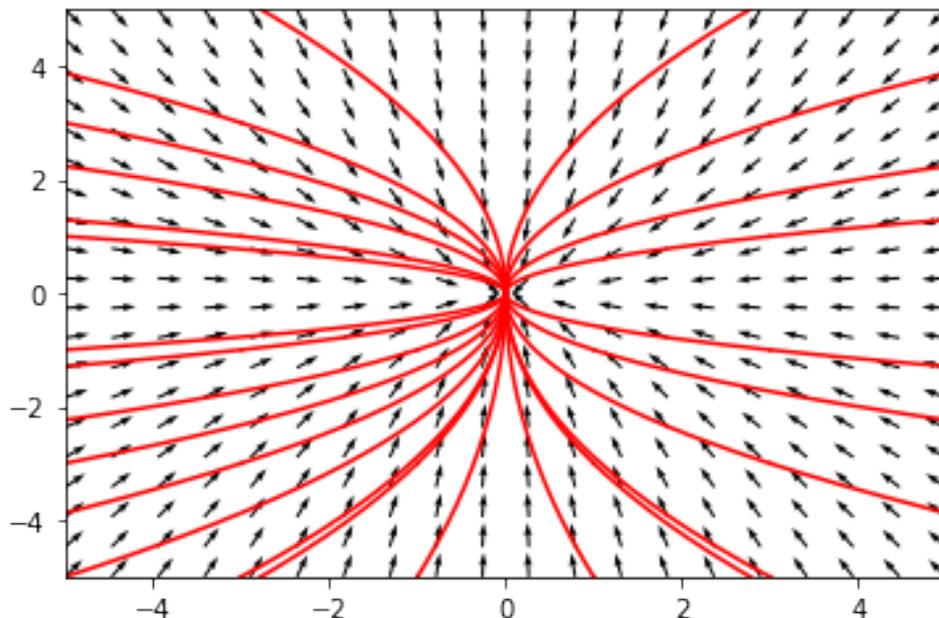
Assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}. \quad (3.17)$$

Como  $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ , as inclinações se aproximam de  $\pm\infty$ , desde que  $\beta \neq 0$ . Logo, essas soluções tendem à origem tangencialmente ao eixo  $y$ .

Como  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , chama-se  $\lambda_1$  de autovalor mais forte e  $\lambda_2$  de autovalor mais fraco. A razão para isso neste caso particular é que as coordenadas  $x$  das soluções tendem a 0 muito mais rapidamente do que as coordenadas de  $y$ . Como pode ser visto na Figura 3.3.

Figura 3.3: Retrato de fase para  $x' = -2x, y' = -y$ .

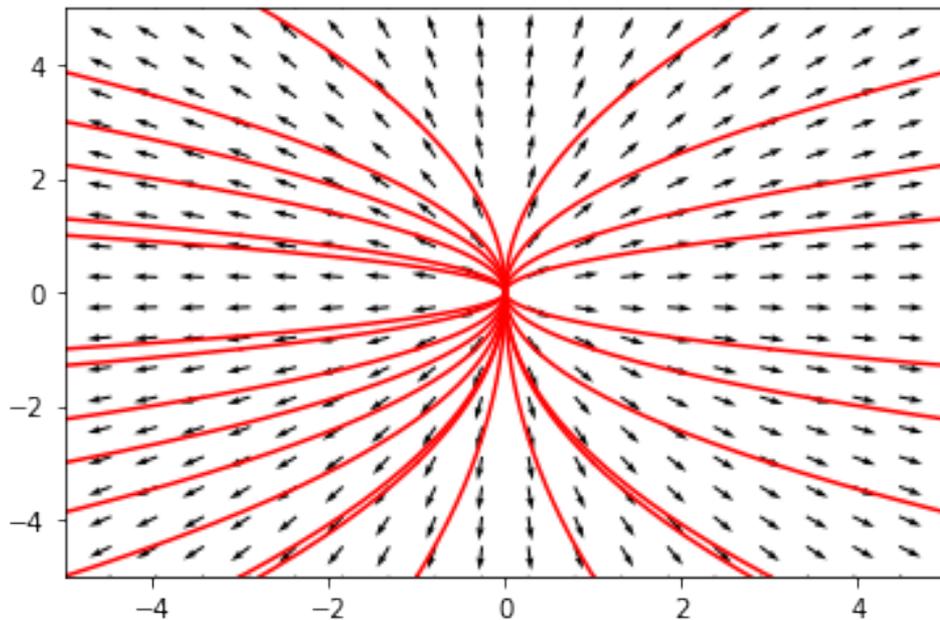


Fonte: do próprio autor.

**Exemplo 7.** Nesse exemplo, será mostrado o caso em que  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ . Considere  $X' = AX$ , onde,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

O campo vetorial desse exemplo pode ser considerado como o negativo do exemplo anterior. A solução e o retrato de fase permanecem os mesmos, com a diferença que agora as soluções se afastam de  $(0,0)$  ao longo dos mesmos caminhos, como pode-se ver na Figura 3.4.

Figura 3.4: Retrato de fase para  $x' = 2x, y' = y$ .

Fonte: do próprio autor.

## 3.2 Autovalores Complexos

Os estudos feitos nessa seção têm como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Em alguns casos, pode vir a ocorrer de as raízes do polinômio característico serem números complexos. Chama-se essas raízes de autovalores complexos. Vale explicitar que, quando a matriz  $A$  tem autovalores complexos, não tem-se mais linhas retas como solução.

**Exemplo 8.** Considera-se  $X' = AX$ , onde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

sendo  $\beta \neq 0$ . O polinômio característico é  $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ . Logo os autovalores são números imaginários  $\pm i\beta$ . Para encontrar o autovetor, deve-se resolver  $AX = \lambda X$  para  $\lambda = i\beta$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Logo, encontra-se um autovetor complexo  $(1, i)$ . Então a função

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

é uma solução complexa de  $X' = AX$ .

Utilizando-se a *Fórmula de Euler*  $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} \cos(\beta) + ie^{\alpha} \text{sen}(\beta)$  para transformar as soluções complexas de sistema real de equações diferenciais, ou seja.

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \text{sen}(\beta t). \quad (3.22)$$

Portanto, pode-se reescrever a solução (3.21) da seguinte forma,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) + i \text{sen}(\beta t) \\ i(\cos(\beta t) + i \text{sen}(\beta t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) + i \text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) + i \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Dividindo  $X(t)$  em suas partes reais e imaginárias tem-se,

$$X(t) = X_{re}(t) + iX_{im}(t), \quad (3.24)$$

onde,

$$X_{re}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{pmatrix}, X_{im}(t) = \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Portanto, agora pode-se ver que as soluções  $X_{re}(t)$  e  $X_{im}(t)$  são soluções reais do sistema em estudo. Ou seja, verificando tem-se,

$$\begin{aligned} X'_{re}(t) + iX'_{im}(t) &= X'(t) \\ &= AX(t) \\ &= A(X_{re}(t) + iX_{im}(t)) \\ &= AX_{re}(t) + iAX_{im}(t). \end{aligned}$$

Ademais, como

$$X_{re}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{im}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

a combinação linear dessas soluções

$$X(t) = c_1 X_{re}(t) + c_2 X_{im}(t), \quad (3.27)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$ , são constantes arbitrárias, fornece uma solução para qualquer problema do valor inicial.

Afirma-se que essa é a solução geral da equação. Para provar isso, deve-se mostrar que essas são as únicas soluções da equação, então, deve-se supor que esse não é o caso. Para isso, considere

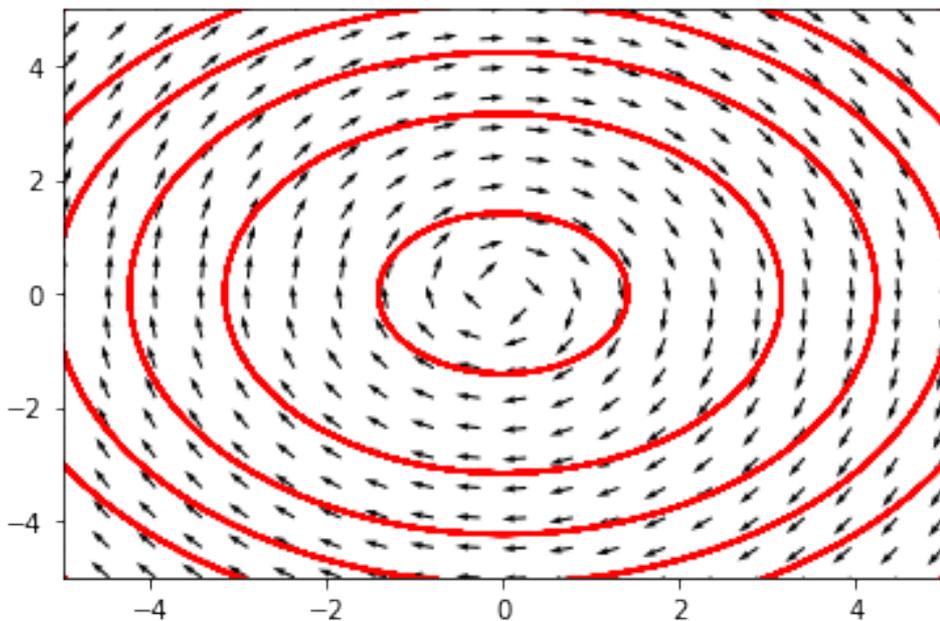
$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

outra solução.

Considere a função complexa  $f(t) = (u(t) + iv(t))e^{i\beta t}$  diferenciando esta expressão e usando o fato de que  $Y(t)$  é uma solução da equação, tem-se  $f'(t) = 0$ . Logo,  $u(t) + iv(t)$  é uma constante complexa vezes  $e^{-i\beta t}$ . Portanto, tem-se diretamente que  $Y(t)$  é combinação linear de  $X_{re}(t)$  e  $X_{im}(t)$ .

Ademais, pode-se observar que cada uma das soluções é uma função periódica, com período igual a  $2\pi/\beta$ . De fato, o retrato de fase mostra que todas as soluções estão em círculos centrados na origem. Esses círculos são percorridos no sentido horário se  $\beta > 0$ , sentido anti-horário se  $\beta < 0$ , como visto na Figura 3.5. Esse tipo de sistema é chamado de Centro.

Figura 3.5: Retrato de fase para  $x' = 4x, y' = -4x$ .



Fonte: do próprio autor.

**Exemplo 9.** Considere  $X' = AX$ , onde,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

e  $\alpha, \beta \neq 0$ . A equação característica agora é  $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0$  e os autovalores são  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Um autovetor associado a  $\alpha + i\beta$  é determinado pela equação

$$(\alpha - (\alpha + i\beta))x + \beta y = 0. \quad (3.30)$$

Assim  $(1, i)$  é novamente um autovetor. Portanto, tem-se soluções complexas da forma

$$X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

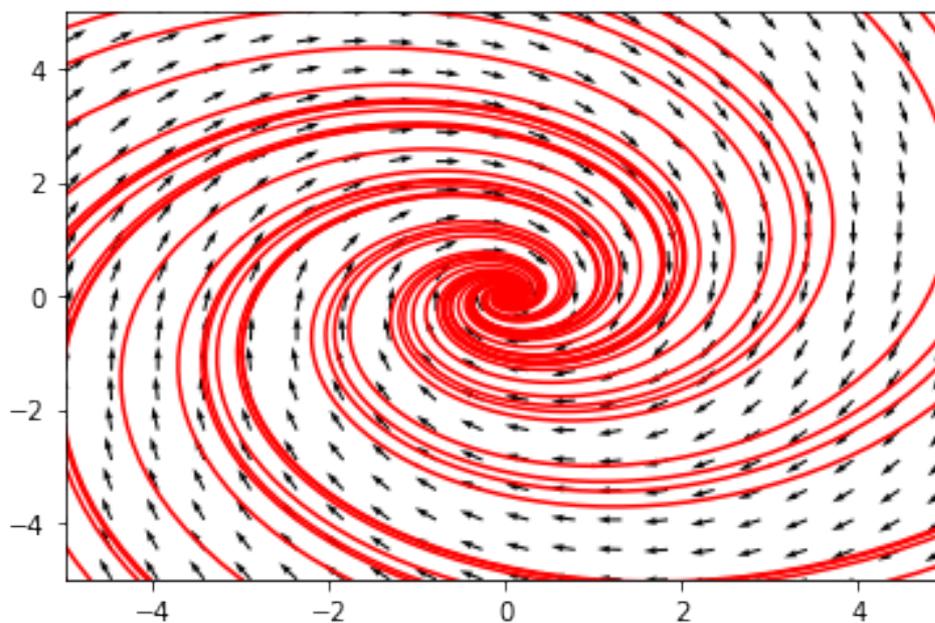
$$= X_{re}(t) + iX_{im}(t). \quad (3.33)$$

Como acima, tanto  $X_{re}(t)$  quanto  $X_{im}(t)$  produzem soluções reais do sistema cuja as condições iniciais são linearmente independentes. Assim encontra-se a solução geral, ou seja,

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

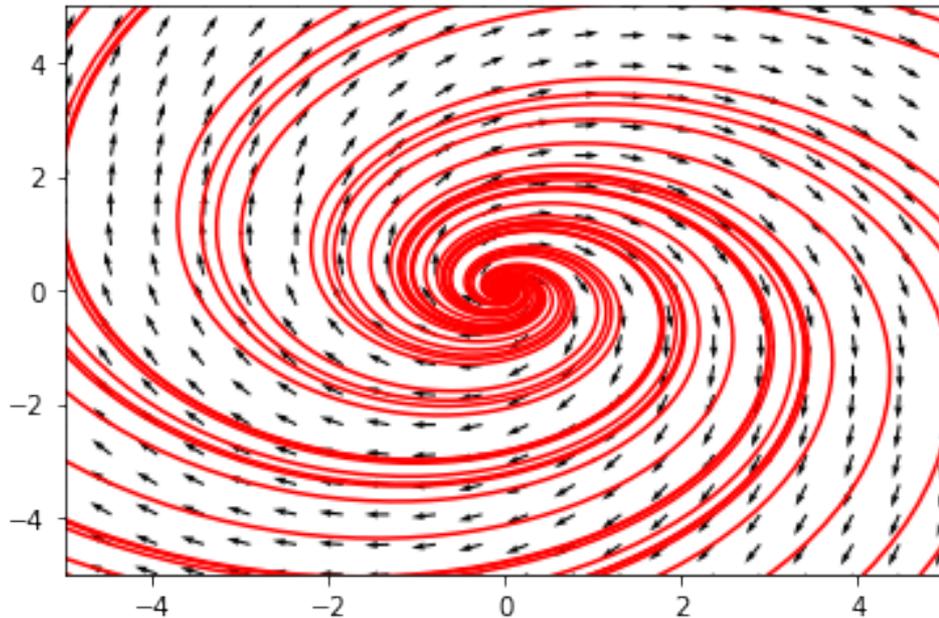
Caso não tenha o termo  $e^{\alpha t}$ , tem-se as soluções enrolando-se periodicamente em círculos centrados na origem. O termo  $e^{\alpha t}$  transforma as soluções em espirais voltadas para origem quando  $\alpha < 0$  ou para longe da origem quando  $\alpha > 0$ . Nesses casos tem-se o foco atrator na Figura 3.6 e foco repulsor na 3.7, respectivamente.

Figura 3.6: Retrato de fase para  $x' = -x + 3y, y' = -3x - y$ .



Fonte: do próprio autor.

Figura 3.7: Retrato de fase para  $x' = x + 3y, y' = -3x + y$ .



Fonte: do próprio autor.

### 3.3 Autovalores Repetidos

Os estudos feitos nessa seção têm como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Os únicos casos restantes ocorrem quando  $A$  repete autovalores reais. Um caso simples ocorre quando  $A$  é uma matriz diagonal da forma,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Os autovalores de  $A$  são ambos iguais a  $\lambda$ . Neste caso, todo vetor diferente de zero é um autovetor desde que,

$$AV = \lambda V, \quad (3.36)$$

$\forall V \in \mathbb{R}^2$ , portanto, tem-se soluções da forma,

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} V. \quad (3.37)$$

Cada uma dessas soluções está em uma linha reta que passa por  $(0,0)$  e tende a  $(0,0)$  se  $\lambda < 0$ , ou distante de  $(0,0)$  se  $\lambda > 0$ . Um caso mais sofisticado é quando tem-se,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Novamente ambos os autovalores são iguais a  $\lambda$ , mas agora há apenas um autovetor linearmente independente dado por  $(1, 0)$ . Portanto, tem-se uma reta como solução, ou seja,

$$X_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Para encontrar outras soluções, observa-se que o sistema  $X' = AX$  pode ser escrito como,

$$x' = \lambda x + y \quad (3.40)$$

$$y' = \lambda y. \quad (3.41)$$

Assim, se  $y \neq 0$ , tem-se,

$$y(t) = \beta e^{\lambda t}. \quad (3.42)$$

Logo, a equação diferencial para  $x(t)$  é  $x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}$ . Esta é uma equação autônoma de primeira ordem. Utilizando o métodos dos coeficientes indeterminados, busca-se soluções da forma

$$x' = \alpha e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}, \quad (3.43)$$

para algumas constantes  $\alpha$  e  $\mu$ . Inserindo essa suposição na equação diferencial tem-se  $\mu = \beta$ , enquanto  $\alpha$  é arbitrário. Portanto, a solução do sistema é escrita como,

$$\alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Note que, se  $\lambda < 0$ , cada termo nesta solução tende a 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é claro para os termos  $\alpha e^{\lambda t}$  e  $\beta e^{\lambda t}$ . Para o termo  $\beta t e^{\lambda t}$  é uma consequência da regra de *L'Hôpital*. Portanto, todas as soluções tendem a  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Já, quando  $\lambda > 0$ , todas as soluções tendem para longe de  $(0, 0)$ .

## 3.4 Mudança de Coordenadas

Os estudos feitos nessa seção têm como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Apesar das diferenças nos retratos de fase associados, estudou-se apenas três tipos de matrizes nestas últimas seções:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

onde  $\lambda$  pode ser igual a  $\mu$  no primeiro caso. Qualquer matriz  $2 \times 2$  que está em uma dessas três formas é dita *forma canônica*. Dado qualquer sistema linear, ou seja,

$$X' = AX, \quad (3.46)$$

pode-se mudar as coordenadas de modo que a matriz de coeficientes do novo sistema esteja na forma canônica e, portanto, é facilmente resolvida. Para isso, a *transformação linear* em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , da seguinte forma,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Ou seja,  $T$  multiplica qualquer vetor pela matriz  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Assim, pensa-se na transformação linear sendo representada por sua matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Ademais, supõe-se que  $T$  é invertível. Isso significa que a matriz  $T$  tem uma matriz inversa  $S$  que satisfaz  $TS = ST = I$  onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Denota-se inversa de uma matriz  $T$ , por  $T^{-1}$ . Como pode ser visto,

$$S = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Para que exista inversa de  $T$ ,  $\det T \neq 0$ . No caso  $\det T = 0$ , sabe-se que existem infinitos vetores  $(x, y)$  para os quais,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Logo, não há matriz inversa nesse caso, pois para cada vetor seria necessário,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Assim, a matriz  $2 \times 2$   $T$  é invertível se e somente se  $\det T \neq 0$ .

Agora, em vez de considerar-se um sistema linear  $X' = AX$ , considera-se um sistema diferente, ou seja,

$$Y' = (T^{-1}AT)Y, \quad (3.53)$$

para alguma transformação linear invertível  $T$ . Observa-se que se  $Y(t)$  é uma solução

deste novo sistema, então  $X(t) = TY(t)$  resolve  $X' = AX$ , pois

$$\begin{aligned}(TY(t))' &= TY'(t) \\ &= T(T^{-1}AT)Y(t) \\ &= A(TY(t)),\end{aligned}$$

como requerido. Ou seja, a transformação linear  $T$  converte soluções de  $Y' = (T^{-1}AT)Y$  para soluções de  $X' = AX$ . Alternativamente,  $T^{-1}$  toma soluções de  $X' = AX$  para soluções de  $Y' = (T^{-1}AT)Y$ .

Portanto, pensa-se em  $T$  como uma mudança de coordenadas que converte um dado sistema linear em outra cuja matriz de coeficientes é diferente. O que espera-se ser capaz de fazer, é encontrar uma transformação linear  $T$  que converta o sistema dado em um sistema da forma  $Y' = (T^{-1}AT)Y$  que é facilmente resolvido.

### 3.5 Plano Traço-Determinante

Os estudos feitos nessa seção têm como base Hirsch, Smale e Devaney (1974). Seja a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Sabe-se que os autovalores são as raízes da equação característica, que pode ser escrita como,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (3.55)$$

O termo constante nesta equação é  $\det A$ . O coeficiente de  $\lambda$  é a quantidade  $a + d$  que é chamado de traço de  $A$  e é denotada por  $trA$ .

Assim, os autovalores satisfazem,

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0, \quad (3.56)$$

e são dados por

$$\lambda = \frac{1}{2}(trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4 \det A}). \quad (3.57)$$

Observa-se que  $\lambda_+ + \lambda_- = trA$  e  $\lambda_+\lambda_- = \det A$ , ou seja, o traço é a soma dos autovalores de  $A$  enquanto o determinante é o produto dos autovalores de  $A$ .

Também escreve-se  $T = trA$  e  $D = \det A$ . Conhecer  $T$  e  $D$  mostra os autovalores de  $A$  e, portanto, praticamente tudo sobre a geometria de soluções de  $X' = AX$ . Por exemplo,

os valores de  $T$  e  $D$  dizem se os focos são para dentro ou para fora da origem.

Pode-se exibir essa classificação visualmente por um quadro no *plano traço determinante*. Nesta imagem, uma matriz com traço  $T$  e determinante  $D$  corresponde ao ponto com coordenadas  $(T, D)$ . A localização deste ponto no plano  $TD$  então determina a geometria do retrato de fase.

Por exemplo, o sinal de  $T^2 - 4D$ , mostra que os autovalores são:

- Complexo com parte imaginária diferente de zero se  $T^2 - 4D < 0$ ;
- Real e distinto se  $T^2 - 4D > 0$ ;
- Real e repetido se  $T^2 - 4D = 0$ .

Assim, a localização de  $(T, D)$  em relação à parábola  $T^2 - 4D = 0$  no plano  $TD$  mostra todas as opções de autovalores de  $A$ .

Tratando-se de retratos de fase tem-se que se  $T^2 - 4D < 0$ , então a parte real dos autovalores é  $T/2$ , e assim tem-se:

- Foco atrator se  $T < 0$ ;
- Foco repulsor se  $T > 0$ ;
- Centro se  $T = 0$ .

Se  $T^2 - 4D > 0$  tem-se uma divisão semelhante em casos. Nesta região, ambos autovalores são reais. Se  $D < 0$ , então temos uma sela. Isso segue, pois  $D$  é o produto dos autovalores, um dos quais deve ser positivo e o outro negativo. Equivalentemente, se  $D < 0$ , calcula-se,

$$T^2 < T^2 - 4D, \quad (3.58)$$

de modo que

$$\pm T < \sqrt{T^2 - 4D}. \quad (3.59)$$

Assim, tem-se,

$$T + \sqrt{T^2 - 4D} > 0 \quad (3.60)$$

$$T - \sqrt{T^2 - 4D} < 0, \quad (3.61)$$

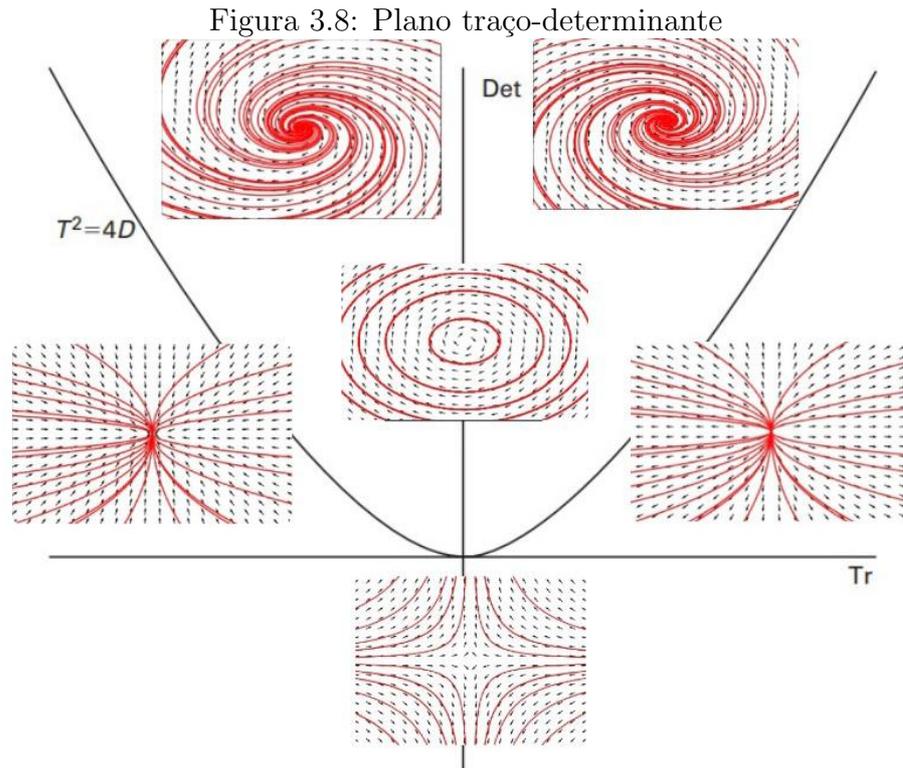
então os autovalores são reais e têm sinais diferentes. Se  $D > 0$  e  $T < 0$  então ambas

$$T \pm \sqrt{T^2 - 4D} < 0, \quad (3.62)$$

então, tem-se nó atrator. Da mesma forma,  $T > 0$  e  $D > 0$  indicam uma nó repulsor.

Quando  $D = 0$  e  $T \neq 0$ , tem-se um autovalor igual a zero, enquanto ambos autovalores desaparecem se  $D = T = 0$ .

Traçar todas essas informações citadas no plano  $TD$  dá uma visão resumida de todos os diferentes tipos de sistemas lineares. As equações vistas anteriormente, particionam o plano  $TD$  em várias regiões nas quais os sistemas de um determinado tipo está. Isso pode ser visto na Figura 3.8



Fonte: do próprio autor.



---

## Capítulo 4

# Aplicações em Crescimento de Tumores

### 4.1 Noções Biológicas do Câncer

Essa seção é baseada nos conceitos abordados pelo Instituto Nacional de Câncer. *Câncer* é a nomenclatura recebida pelo conglomerado de aproximadamente 100 tipos diferentes de doenças não benignas, que têm o crescimento desordenado de células em comum. Através da metástase, as células se dividem rapidamente e propendem a serem incontroláveis e nocivas.

Há diferentes tipos de câncer e isso está ligado diretamente com os diferentes tipos de células existentes no corpo, que definem o crescimento de diversos tipos de tumores, outra divergência são as diferentes velocidades de divisão entre as células e sua capacidade de adentrar-se nos tecidos e órgãos.

### 4.2 Crescimento

Utilizando os conceito de Boyce e DiPrima (2010) e Domingues (2011), a modelagem matemática pode ser feita de diversas formas, porém é de grande valia analisar qual ferramenta matemática irá beneficiar e facilitar o processo da mesma.

No caso estudado foi notado que a *Equação de Gompertz* se adéqua muito bem ao crescimento de tumores, tendo o viés de que é notória a visualização dos parâmetros juntamente a sua função como variável para o crescimento tumoral.

Atualmente, a Equação de Gompertz vem sendo utilizada para a modelagem de crescimento tumorais, mas também para outras área da *Biomatemática*. A equação está com parâmetros já adequados para o crescimento de tumores, ou seja,

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \left( \frac{K}{N} \right). \quad (4.1)$$

Sendo  $N(t)$  a população de células tumorais em um determinado instante  $t$ ,  $r$  é a constante de crescimento intrínseca das células, sendo  $r > 0$ ,  $K$  é o tamanho máximo que um tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis no corpo, ou seja, é a capacidade de carga de um tumor.

Mesmo tendo a capacidade  $K$ , há um limite que a carga tumoral pode assumir, sendo essa na ordem de  $10^{13}$  células, além disso esse limite não pode ser ultrapassado.

A Equação de Gompertz é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem passível de resolução via P.V.I (Problema de Valor Inicial). Para a solução deve-se considerar que  $N(0) = n_0$ , ou seja, considere o P.V.I.,

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \\ N(0) = n_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Resolvendo o P.V.I (4.2), obtem-se como solução a função  $N(t)$ , que expõe a população de células tumorais em função do tempo  $t$

$$N(t) = Ke^{-\ln\left(\frac{n_0}{K}\right)e^{rt}} \quad (4.3)$$

Pode-se observar que  $n_0$ , representa a quantidade de células no instante  $t = 0$ , ou seja, no momento inicial do crescimento desordenado.

É necessário o entendimento de que cada câncer tem um crescimento diferente dos outros, portanto os estudos serão centralizados no câncer de próstata, para que assim os parâmetros da equação sejam substituídos por valores condizentes com determinada enfermidade.

Substituindo os valores obtidos em relação ao câncer de próstata obtidos por Fair, Heston Cordon-Cardo (1979) e Friberg, Mattson (1997), tem-se a função,

$$N(t) = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}} \quad (4.4)$$

Considera-se o início do câncer quando  $N_0 = 1$ , ou seja, o número de células cancerígenas é igual a 1. Uma grande característica do câncer de próstata, é seu crescimento lento, podendo levar aproximadamente quinze anos para ocupar  $1cm^3$ . Sabe-se que o tumor com  $1cm^3$  é relativo ao peso de  $1g$  e o conglomerado de aproximadamente  $10^9$  células tumorais.

O tamanho máximo que um tumor chega, é caracterizado pela sua fatalidade com a pessoa enferma, muitas das vezes a falência ocorre quando o tumor tem a massa de  $1Kg$  aproximadamente.

De acordo com Folkman (1971), uma grande característica de um tumor, é sua capacidade de realizar *metástase*, sendo que o início é dado pelas condições de oxigenação e nutrição, além de ser necessário o volume de no mínimo  $3mm^3$ . Satisfaz apenas essas condições, se o tumor desenvolve a capacidade de ter a produção de novos vasos sanguíneos, esse processo chama-se *angiogênese* ou neovascularização

## 4.3 Resultados

Os resultados obtidos, baseiam-se nos dados advindos de estudos feitos acerca do câncer de próstata, que dar-se-ão em tópicos:

- Tamanho máximo para o desenvolvimento da angiogênese, quando  $N(t) = 1.10^6$ , ou seja

$$1.10^6 = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}}. \quad (4.5)$$

Logo,  $t = 7,80$  anos;

- Ponto mínimo para o desenvolvimento de uma metástase, quando  $N(t) = 3.10^6$ , ou seja,

$$3.10^6 = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}}. \quad (4.6)$$

Logo,  $t = 8,69$  anos ;

- Massa tumoral de  $1g$ , quando  $N(t) = 1.10^9$ , ou seja,

$$1.10^9 = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}}. \quad (4.7)$$

Logo,  $t = 14,86$  anos;

- Massa tumoral de  $1kg$ , quando  $N(t) = 1.10^{12}$ , ou seja,

$$1.10^{12} = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}}. \quad (4.8)$$

Logo,  $t = 32,34$  anos;

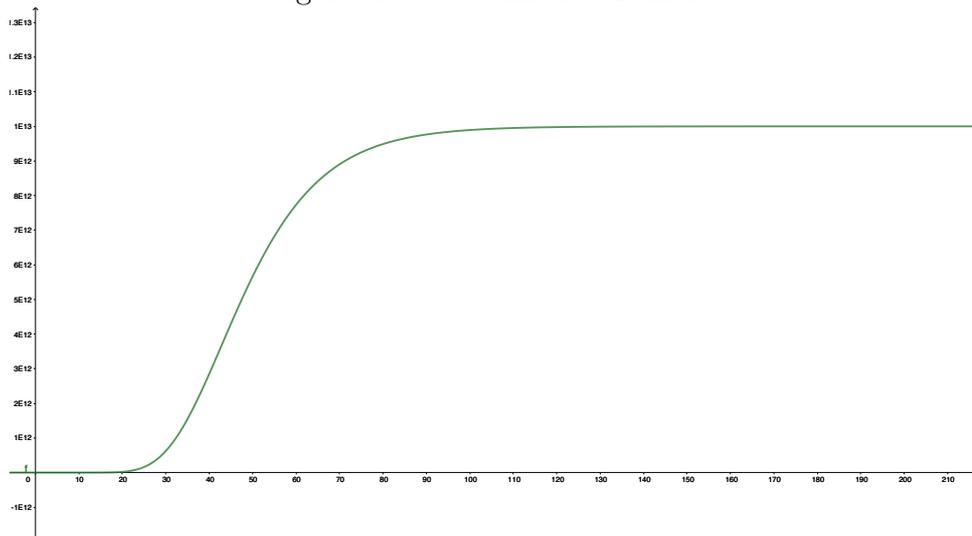
- Ponto de inflexão, quando  $N(t) = \frac{1.10^{13}}{e}$ , ou seja,

$$\frac{1.10^{13}}{e} = 10^{13} e^{-29,934e^{-0,0793t}}. \quad (4.9)$$

Logo,  $t = 42,86$  anos.

Graficamente é possível visualizar quando  $N(t) \rightarrow k$ , através da Figura 4.1 é possível visualizar e entender, que é o ponto de estabilidade, aproximadamente 130 anos, sendo assim, naturalmente o câncer de próstata nunca será estabilizado, pois os humanos não atingem essa idade. O gráfico descreve a quantidade de células tumorais em função do tempo.

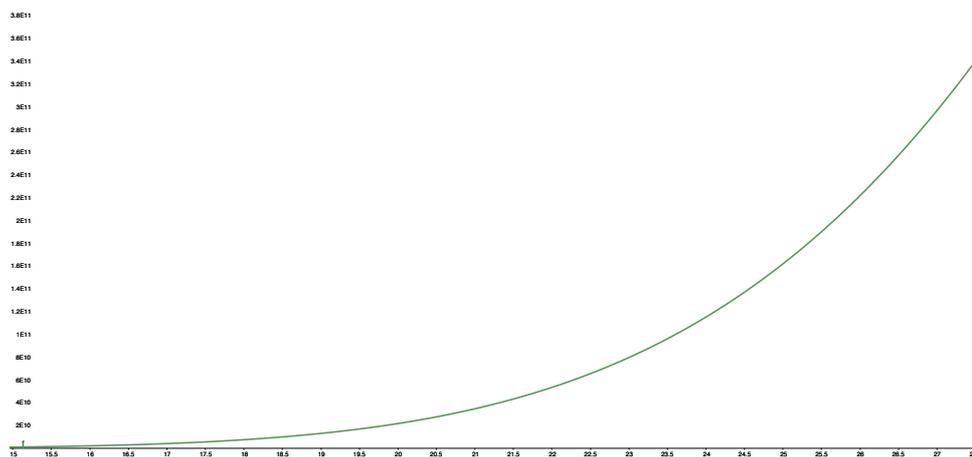
Figura 4.1: Crescimento Tumoral



Fonte: do próprio autor.

Já na Figura 4.2 foi possível observar que o câncer de próstata, se descoberto ainda no início, ou seja, aproximadamente após 10 anos do início, tem uma maior chance de reversão e tratamento da doença, pois ainda não houve um crescimento elevado das células tumorais. O aumento explosivo inicia-se aproximadamente após 25 anos do início do crescimento desordenado.

Figura 4.2: Crescimento Tumoral nos primeiros 20 anos



Fonte: do próprio autor.

## Capítulo 5

# Considerações Finais

Ao concluir essa monografia, foi possível perceber o avanço e o aprendizado de tópicos relacionados a área de equações diferenciais, podendo o discente associar os tópicos estudados com o mundo ao seu redor, através das aplicações estudadas, possibilitando-o uma melhor compreensão.

O discente sempre teve interesse em usar a matemática para ajudar a sociedade, especificamente na área da saúde. Neste trabalho foi possível analisar o crescimento de tumores e até mesmo a dinâmica populacional de casos de COVID-19 na cidade de Sorocaba no interior do estado de São Paulo.

É de extrema importância ressaltar que todos os objetivos inicialmente expostos foram alcançados; Através desse trabalho, o discente aprendeu a utilizar o software Mathematica e familiarizar-se com suas ferramentas e funcionalidades, assim como utilizar a linguagem de programação Python para a compilação de gráficos. Realizou-se diversas pesquisas bibliográficas para o fundamento teórico. Foi possível adquirir conhecimentos de escrita no software  $\text{\LaTeX}$ , onde esse mesmo trabalho foi escrito. Ademais, o discente aprimorou os conhecimentos matemáticos.

Portanto, conclui-se que o discente expandiu sua afinidade pelo tema, e pretende dar continuidade nos estudos aqui abordados, através de pós graduação, como mestrado e doutorado.



---

## Referências Bibliográficas

- [1] BACAER, N. *Verhulst e a equação logística na dinâmica populacional*. In: European Communications in Mathematical and Theoretical Biology. Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, France, 2008.
- [2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [4] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.
- [5] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L.. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.
- [6] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. ELSEVIER, 1974;
- [7] WANG, R. H.; QIAO, J.; LI, S. *Differential Equations and Applications to COVID-19*. Austin Mathematics. University of Texas Rio Grande Valley, 2020.
- [8] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [9] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1994.
- [10] *COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE)*. Johns Hopkins University, 2021.
- [11] SPENCER, S. L. , BERRYMANB, M. J., GARCIA, J, A, , ABBOTT, D. . *An ordinary differential equation model for the multistep transformation to cancer*. *Journal of Theoretical Biology*, 231:515–524, 2004.
- [12] DOMINGUES, J. S. *Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento*. Biomatemática - UNICAMP. SP, Campinas.

- [13] FOLKMAN, M. D. J. *Tumor angiogenesis: Therapeutic implications*. The New England Journal of Medicine. 285:1182-1186, 1971
- [14] FAIR, W. R., HESTON, W. D., CORDON-CARDA, C. ) *An overview of cancer biology*. Campbell's Urology, W. B. Saunders Company, 1997.
- [15] FRIBERG, S., MATTSON S. *On the growth rates of human malignant tumors: implications for medical decision making*. J. Surg. Oncol. 65, 284–297. 1997.

# Índice Remissivo

- angiogênese, 42  
autovalor, 21  
autovetor, 21
- campo vetorial, 18  
circuito RLC, 16  
combinação linear, 20
- equação característica, 21  
Equação de Gompertz, 41  
equação diferencial de primeira ordem, 1  
equação diferencial de segunda ordem, 16  
equação diferencial não linear autônoma de primeira ordem, 4
- forma canônica, 36  
Fórmula de Euler, 31
- linha instável, 27
- metástase, 42  
modelo logístico de crescimento populacional, 4  
Método dos Quadrados Mínimos, 11
- oscilador harmônico, 16
- plano traço determinante, 38  
ponto de equilíbrio, 2  
pontos de equilíbrios, 17  
problema do valor inicial, 2
- segunda lei de Newton, 16  
sela, 25  
sistema de equações diferenciais lineares planares, 17  
sistema de equações diferenciais ordinárias, 15
- sistemas autônomos, 18  
solução de equilíbrio, 2
- taxa de crescimento populacional, 4  
transformação linear, 36