UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS- CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA PARA SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARTIN PANICIO STENINGER

SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES DE BESSEL: ASPECTOS HISTÓRICOS DO SÉCULO XVIII.

Sorocaba -SP
2023

Martin Panicio Steninger

SÉRIE TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES DE BESSEL: ASPECTOS HISTÓRICOS DO SÉCULO XVIII

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela

Sorocaba-SP

2023

Steninger, Martin Panicio

Séries trigonométricas e funções de Bessel: aspectos históricos do século XVIII / Martin Panicio Steninger -- 2023.
48f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Antônio Luís Venezuela
Banca Examinadora: Antônio Luís Venezuela, Renato Fernandes Cantão, Sadao Massago
Bibliografia

1. Funções de Bessel. 2. História da Matemática. 3. Séries trigonométricas. I. Steninger, Martin Panicio. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 2/2023/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARTIN PANICIO STENINGER

SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES DE BESSEL: ASPECTOS HISTÓRICOS DO SÉCULO XVIII

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 21 de março de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Sadao Massago

Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela**, **Docente**, em 23/03/2023, às 15:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago**, **Docente**, em 23/03/2023, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Renato Fernandes Cantao**, **Docente**, em 24/03/2023, às 10:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0970187** e o código CRC **2692B740**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.008908/2021-32 SEI nº 0970187

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha querida mãe Raquel, meu maior exemplo de caráter e dignidade. Sem dúvidas, ela é a mais perfeita imagem de amor abnegado que já ocorreu comigo.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer aos meus familiares, em especial à minha mãe Raquel por todo amor, confiança, paciência e incentivo. Agradeço aos meus amigos pelos momentos de parceria e companheirismo durante essa etapa da vida.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos. Principalmente ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela por toda disponibilidade, paciência, pelas discussões construtivas e por todas as aprendizagens.

RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito de uma revisão bibliográfica constituída por livros e artigos científicos que discorrem acerca da história das chamadas funções de Bessel, e objetivou percorrer o caminho do seu desenvolvimento até a sua consolidação como uma classe de funções especiais no século XIV. Sua multiplicidade de aplicações, que vão desde equações da onda até problemas de mecânica celeste, fez com essas funções tenham aparecido nos trabalhos de diversos nomes famosos da ciência, antes mesmo de Friedrich Wilhelm Bessel, tê-la encontrado em seus estudos sobre o movimento planetário. Além disso, nessa monografia foi estudada a biografia de Bessel, visando principalmente suas contribuições para a Matemática, e alguns dos problemas aos quais ele se dedicou. Destaca-se aqui o problema de Kepler, para o qual será apresentado uma abordagem simplificada daquela desenvolvida por Bessel, fazendo uso do seu método de expansão em séries trigonométricas.

Palavras-chave: Funções de Bessel. Kepler. Séries Trigonométricas. História da Matemática.

ABSTRACT

The present work was developed in the context of a bibliographic review consisting of books and scientific articles about the history of the so-called Bessel functions, and aimed to follow the path of their development until their consolidation as a class of special functions in the 19th century. Its multiplicity of applications, ranging from wave equations to problems of celestial mechanics, made these functions appear in the work of several famous names in science, even before Friedrich Wilhelm Bessel, had found it in his studies of planetary motion. Moreover, in this monograph the biography of Bessel was studied, mainly aiming at his contributions to mathematics, and some of the problems to which he devoted himself. Here the Kepler problem is emphasized, for which a simplified approach to that developed by Bessel will be presented, making use of his method of expansion into trigonometric series.

Keyword: Bessel Functions. Kepler. Trigonometric Series. Math History.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Função de Bessel, também chamada função de cilindro, é qualquer uma de um conjunto de funções matemáticas que são solução para uma Equação transcendente também conhecida como equação de Bessel. Seu surgimento consta por volta do século XVII, ganhando maior relevância quando elas foram sistematicamente investigadas, primeiramente por Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), talvez o mais destacado astrônomo do seu século, em 1824, e em razão disso são designadas em sua homenagem. Ele as utilizou pela primeira vez para explicar o movimento dos corpos celestes, com a função de Bessel emergindo na expansão em série da perturbação planetária.

O trabalho de Bessel com essas funções obteve reconhecimento da comunidade científica, motivando diversos trabalhos subsequentes dedicados ao assunto, com destaque para o trabalho de G. B. Mathews (1861-1922), publicado em 1895, “Um tratado sobre as funções de Bessel e suas aplicações à física”, e escrito em colaboração com Andrew Gray (1847-1925). Esse livro apresenta, principalmente, métodos matemáticos para analisar problemas de valor de contorno em coordenadas cilíndricas na física clássica, ou mais precisamente, aplicações na engenharia como, por exemplo, vibrações de membrana, hidrodinâmica, difração, fluxo de eletricidade, calor entre outros (MATHEWS; GRAY, 1966). Em suma, o livro de Mathews e Gray (1966) é adequado como um texto suplementar para quem pesquisa o contexto histórico das funções de Bessel, embora o texto mais completo continue sendo o livro de G. N. Watson (1886-1965), “Um Tratado sobre a Teoria das Funções de Bessel”, a fonte padrão de informação sobre funções de Bessel, e que aqui é utilizado como uma das principais referências (WATSON, 1966). Quando Bessel estava investigando o movimento dos planetas nem deve ter passado por sua cabeça que os métodos matemáticos que ele estava desenvolvendo renderiam uma literatura tão vasta sobre o assunto. As 36 páginas de referências do livro de Watson, que cobrem apenas o período até 1922 (ano de sua publicação) dão uma ideia dessa dimensão.

No entanto, por cerca de um século antes, casos particulares foram obtidos em importantes pesquisas em mecânica, astronomia e condução de calor por D. Bernoulli (1700-1782), L. Euler, J. L. L. Lagrange (1736-1813), J. B. J. Fourier (1768- 1830), S. D. Poisson (1781- 1840) entre outros. Para entender melhor esse período, é interessante uma leitura de um artigo mais recente e breve acerca da história das funções de Bessel, publicado por J. Dutka (1995). O autor se estende mais em discussões dos problemas considerados pelos primeiros investigadores da função de Bessel, abordando com mais profundidade os desenvolvimentos na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século dezenove. Muito do seu material, Dutka(1995) extraiu do prodigioso trabalho de Heinrich Burkhardt (1861-1914), que é uma importante referência em história da matemática, também publicou trabalhos em análise, particularmente a teoria das séries trigonométricas.

As funções de Bessel, são talvez as mais extensamente tabuladas das funções transcendentes. Na medida em que a tecnologia e a física aplicada continuam a se desenvolver, novas aplicações das funções de Bessel surgem na modelagem dos mais diversos fenômenos, mas elas são importantes também em matemática pura em conexão com problemas de teoria dos números, transformadas integrais, cálculo de integrais, teoria de equações diferenciais etc.

O objetivo principal deste trabalho é fornecer um tratamento inicial histórico sobre as funções de Bessel, descrevendo matematicamente alguns dos problemas físicos que levaram a esses desenvolvimentos. Como objetivos específicos:

- Revisar os principais trabalhos que abordam o assunto e complementar essas contas de forma a tornar os conceitos envolvidos mais palatáveis para o público em geral.
- Chamar a atenção para o importante, mas pouco conhecido, trabalho de Bessel sobre séries trigonométricas, publicado independentemente e antes do tratado de J. B. J. Fourier.

Em muitos casos, a notação original foi modernizada e segue a de Watson. As provas originais dos resultados obtidos pelos primeiros investigadores foram frequentemente substituídas por provas mais simples ou mais breves tratamentos para torná-los mais acessível. No primeiro capítulo foi estudada a biografia de Bessel bem como alguns de seus trabalhos, destacando suas contribuições para a Matemática. O capítulo seguinte parte da discussão de elementos da elipse e das Leis de Kepler do movimento planetário, para então deduzir a famosa equação de Kepler, importante em mecânica celeste, segue com a estratégia de solução proposta por Lagrange sendo apresentada. O próximo capítulo apresenta uma breve discussão acerca das motivações no trabalho de Bessel como matemático e, por fim, no último capítulo, a equação de Kepler é resolvida com o auxílio das séries de Fourier e funções de Bessel.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

Os aspectos históricos da vida e obra de Bessel constitui o tema desse tópico. Personagem central no desenvolvimento dos métodos matemáticos abordados nesse trabalho, aqui será apresentado um breve resumo de sua biografia, retratando suas vivências, algumas das suas maiores influências como cientista, e o legado que o astrônomo deixou principalmente para a matemática.

2.1 DE COMERCIANTE A ASTRÔNOMO

As funções de Bessel recebem esse nome em homenagem a F. W. Bessel (Figura 1), astrônomo alemão nascido em Minden na Vestfália, atual Alemanha. Bessel frequentou o ginásio em Minden por quatro anos, mas não parecia ser muito talentoso, achando o latim difícil. O gosto pelos mapas e navegação levaram-no à escolha de uma carreira mercantil e, em janeiro de 1799, aos 14 anos, ele deixou a escola para se tornar aprendiz na firma do ramo, a Kulenkamp em Bremen. Lá ele desenvolveu seu interesse por observar o céu como forma de aprimorar a precisão das navegações marítimas, e com esse propósito mergulhou a fundo no estudo de astronomia.

Figura 1. F. W. Bessel (1839).

Fonte: (LAWRYNOWICZ, 1995).

A história da Matemática quase não se detém em Bessel, embora seu nome seja invocado adjetivamente na Matemática quase tanto quanto de outros matemáticos puros como Abel. De fato, o seu nome é mais reconhecido pelo seu trabalho como astrônomo, onde certamente vai figurar entre os mais importantes do século XIX. Diretor do observatório da universidade de Königsberg, onde lecionou em diversas disciplinas até o fim de sua vida, publicou seu primeiro trabalho enquanto ainda trabalhava no porto em Bremen, a partir de dados observacionais antigos ele calculou a órbita do cometa Halley. Seu interesse profundo pela astronomia fez com que ele tomasse coragem para se apresentar a H. W. M. Olbers (1758-1840), famoso médico e astrônomo, e submetesse a ele os seus cálculos. Olbers ficou impressionado pelo trabalho do jovem Bessel, e enviou imediatamente para publicação, decidindo também que o manteria sob sua supervisão (FLORIAN CAJORI, 1999).

Em 1806, Olbers conseguiu um emprego para o seu jovem pupilo na vizinha Lilienthal como assistente de mais um astrônomo que se dividia entre duas carreiras, o magistrado chefe J. H. Schröter (1745-1816). O salário anual, segundo Olbers, era baixo, mas Bessel colocaria as suas mãos em algum equipamento astronômico de primeira qualidade. Simultaneamente, a empresa Kulenkamp ofereceu a Bessel uma posição permanente com um salário sete vezes superior ao que Schröter ofereceu. Sem dúvidas a questão financeira o deixou hesitante, ainda mais pela sua origem humilde. Embora nunca tenha tentado uma carreira eclesiástica, Bessel reunia alguns requisitos, já que estava disposto a renunciar a uma vida de riqueza, conforto, e prestígio como homem de negócios para devotar a vida a estudar e observar as estrelas, mesmo que isso significasse uma existência modesta. Até mesmo no latim, que outrora foi um obstáculo no colégio, Bessel se tornou proficiente, aprendendo sozinho o idioma, o que provavelmente sugere que a escola falhou em inspirá-lo.

Seu entusiasmo pela astronomia o fez largar a carreira que construiu no comércio para se dedicar à ciência. Ele fez as suas malas e, em 14 de março de 1806, dirigiu-se para Lilienthal. No entanto, Schröter, como astrônomo amador, estava mais interessado em mapear a superfície lunar e encontrar outros cometas que passassem pelas lentes do seu telescópio, que com o passar do tempo foi se mostrando insuficiente para a linha de pesquisa em que Bessel gostaria de trabalhar: fazer uma medida precisa da posição das estrelas e calcular a paralaxe estelar. Até que, em novembro de 1809, uma feliz convergência de circunstâncias veio de encontro as suas ambições e mudou novamente os rumos de sua vida. Ele recebeu uma carta com uma oferta de trabalho que parecia à altura dos desafios que Bessel estava buscando.

Friedrich Wilhelm III, Rei da Prússia, tinha autorizado a construção de um novo observatório estatal na universidade de Königsberg, na antiga Prússia, onde atualmente fica Kaliningrado, cidade Russa. O observatório estaria equipado com os melhores instrumentos do mundo. E Alexander von Humboldt, o notável explorador, naturalista, e conselheiro científico do Rei, tinha recomendado Bessel como diretor das novas instalações (HIRSHFELD, 2013). Muito se especula sobre a influência de J. C. F. Gauss (1777-1855), para que Bessel assumisse essa posição, e não seria a primeira vez que o matemático intercederia em favor de Bessel, de acordo Lawrynowicz (1995) teria sido a interferência dele, juntamente com Olbers e Schröter, que teriam evitado que o jovem, na faixa de idade para recrutamento, servisse no exército napoleônico, que até então ocupava a região de Vestfália (LAWRYNOWICZ, 1995).

Durante séculos, as estrelas tinham se tornado para o astrônomo uma espécie de sistema de coordenadas, marcos fixos a partir dos quais se pode medir a posição de um objeto em movimento. Na verdade, desde a época da Grécia Clássica, há mais de 2 mil anos, já se produziam catálogos com as posições de objetos astronômicos, Para dar um exemplo prático dessa importância, uma mudança sutil no caminho de um planeta pode indicar a presença (através da força gravitacional) de um planeta não descoberto em qualquer outra parte do sistema solar, essa ideia vai ser explorada mais afundo adiante, só isso já evidencia a urgência que Bessel tinha em determinar de maneira dirimir os erros da posição da malha estelar nos catálogos do início do século XIX, que para ele eram muito imprecisos. Tal mudança não poderia ser detectada se a malha estelar contra a qual é medida for mal determinada.

Não é preciso dizer que o seu instinto científico o conduziria diretamente a topar a empreitada, mas para isso era preciso rumar mais a leste da Prússia. Os próximos anos de pesquisa Bessel dedicaria a fazer a medição precisa da posição de centenas de estrelas. Ele a ajudou a planejar e viabilizar a construção do observatório de Königsberg no qual trabalhou como astrônomo-chefe até o fim de sua vida.

2.2 A CONSTRUÇÃO DE UM LEGADO

Bessel passou a fazer medições posicionais confiáveis de Sirius, a estrela mais brilhante do céu, que acabaram por revelar que ela estava lentamente mudando de posição, fato que levou o astrônomo a conjecturar que ela estivesse sendo puxada em órbita pela gravidade de outra estrela. Em 1844, Bessel concluiu que Sirius tem uma companheira até então invisível, teoria que só pôde ser posteriormente confirmada pelo fabricante de telescópios A. G. Clark (1832-1897), em 1862 (HOLBERG, 2009). Por fim, o período orbital entre Sirius A e Sirius B em torno uma da outra acabou sendo estimado em cerca de cinquenta anos.

A Bessel é creditada a primeira medição aproximada da distância de uma estrela à Terra (61 Cygni em 1838) pelo método da paralaxe, um trabalho longevo que vinha sendo estudado desde seu período em Lilienthal. Ao final dos anos 1830, Bessel era um dos três astrônomos a atingir o feito de medir a paralaxe anual de uma estrela, com destaque pelo rigor, precisão e confiabilidade de seus cálculos e dados. O seu interesse no assunto, no entanto, vem desde muito novo, sendo seu primeiro trabalho publicado no ano de 1805. Foi durante os primeiros anos da sua carreira como astrônomo que grande parte do trabalho de base vital para este feito foi realizado (WILIAMS, 1981). Essa citação revela o caráter prodigioso do trabalho de Bessel, que chamou a atenção de grandes nomes da ciência, como, por exemplo, o já citado médico e astrônomo Olbers. Lawrynowicz (1995), em seu livro bibliográfico sobre Bessel conta que, certa feita, Olbers deixou-o com dados observacionais de um novo cometa com um pedido para calcular sua órbita, trabalho que lhe tomaria algumas semanas na expectativa de Olbers, que era proficiente em cálculo, mas o quão grande foi o seu espanto quando mais tarde naquele dia seu jovem amigo trouxe o trabalho acabado. Para todo o cálculo Bessel teria despendido apenas 4 horas!

Foi Olbers quem o apresentou ao matemático Gauss, dando início a uma amizade de 42 anos. Bessel os enxergava como seus mentores, ele soube cultivar boas relações de amizade que deixaram um célebre legado na história da matemática, trabalhando não apenas no sentido de ampliação das aplicações práticas da matemática, como também do desenvolvimento da análise matemática como o instrumento chave para modelagem dos mais diversos fenômenos, mesmo que algumas vezes o embasamento e rigor teórico, até mesmo pela falta dele à época, fosse deixado de lado (DUNNINGTON, 2012). Foi o caso, por exemplo, do trabalho de Bessel em séries trigonométricas, que será visto mais adiante, já que a teoria de convergência dessas séries só foi formalizada alguns anos depois dos trabalhos publicados por Bessel.

Em relação a modelagem, esse é um período no qual a matemática estava passando por uma revolução. A tentativa de entender problemas físicos levaram a modelos matemáticos, que são algum tipo de fórmula para expressar relações, tal como a proposta por Kepler relacionando algumas propriedades geométricas no movimento elíptico dos planetas (WILLIAMS, 1981). A partir do desenvolvimento do cálculo no século XVI, essas equações gradualmente começaram a relacionar funções e suas derivadas, desempenhando papel importante no avanço da pesquisa científica da época e abrindo caminho para esse novo ramo da Matemática. No entanto, o desenvolvimento teórico deste novo conceito, Equações Diferenciais Ordinárias, tem suas origens enraizadas em um pequeno número de problemas. Esses problemas e suas soluções levaram a uma disciplina independente com a solução de tais equações como principal objetivo.

Entre as equações diferenciais lineares de segunda ordem, uma em especial recebe o nome de Bessel e será apresentada mais adiante. Sua solução é uma classe de funções que ajudou a revolucionar a relação da ciência observacional com a Matemática séculos atrás, visto as muitas aplicações em situações físicas variadas, como, por exemplo, a distribuição de temperatura em uma placa circular e a forma de uma membrana vibrante.

Como se pode perceber, basta uma breve introdução para entender por que o nome Bessel aparece intimamente ligado a tantos conceitos matemáticos. Em relação ao legado deixado por Bessel como matemático, J. F. W. Herschel escreveu:

> Como matemático, Bessel ocupa, sem dúvida, uma posição elevada; não, de fato, como um criador original nas caminhadas abstratas da análise pura, mas sempre com vista a aplicações, nas quais, qualquer que seja a ocasião que requeira o seu esforço, a sua perícia nunca foi considerada desigual para a tarefa em mãos, independentemente da dificuldade (…)(HERSCHEL, 1847).

De fato, o trabalho de Bessel em relação as funções que levam seu nome, não é propriamente dito original, tanto que o próprio Bessel se admite surpreso a Olbers, por ser o primeiro a perceber a relação entre essas funções e a Equação de Kepler, em correspondência datada do ano de 1818. Mas, se hoje em dia, essa solução elegante para diversos fenômenos físicos é reconhecida como uma classe de funções especiais, a relevância dessa teoria deve-se muito aos estudos de Bessel, que as pôs na sua forma atual. A série de Lagrange juntamente com as transformadas de Laplace, tinham sido até então, consideradas como o melhor método para resolver o problema de Kepler (para expressar as quantidades variáveis em movimento planetário em função do tempo ou *anomalia média)*; contudo, o método utilizado por Lagrange, como será abordado mais adiante, é indireto e complicado, pois sua solução na forma de uma expansão em série requer o cálculo de coeficientes, o que é particularmente complicado para um número moderadamente grande deles. Nesse sentido, a técnica utilizada por Bessel representou um avanço e pela primeira vez "suas" funções foram utilizadas de forma proeminente.

Bessel, ao ver a solução para o problema de Kepler dada no livro Mecânica Analítica de Lagrange, achou-a meio desajeitada. Como resultado, ele desenvolveu um método mais elegante de solução, com seu refinamento característico, envolvendo séries trigonométricas infinitas, hoje em dia conhecidas como séries de Fourier, cujos coeficientes produzem as funções tema desse trabalho (DUTKA, 1995).

Na mesma linha que Dutka, Báricz (2010) escreve que Bessel examinou em pormenor as funções que hoje levam seu nome, ele as incorporou em um estudo de perturbações planetárias, detalhando que as funções de Bessel aparecem como coeficientes em uma expansão em série da perturbação indireta de um planeta, ou seja, o movimento do Sol causado pelo corpo perturbador (BÁRICZ, 2010). Quem também sustenta essa afirmação é Bottazzini e Gray (2016), para eles Bessel apresentou a equação que leva o seu nome em 1824, no decurso de uma tentativa bem-sucedida de separar duas formas em que um planeta perturba a órbita de outro. Uma é por atração gravitacional direta, a outra é por perturbação do movimento do Sol (BOTTAZZINI; GRAY, 2016).

Em sua famosa obra de memórias escrita em 1824 e publicada no ano de 1826, Bessel introduziu formalmente esse conceito, mostrando que suas funções satisfazem a equação diferencial parcial (EDP), a equação de Bessel, no entanto, sem fazer uma referência explícita à equação de Kepler (COLWELL, 1992). Ficou demonstrado por Bessel que esses problemas físicos eram casos particulares de uma EDP, que algum tempo depois se provaria ser derivada por uma transformação elementar de outra conhecida como equação de Ricatti (WATSON, 1920). O Conde Jacopo Francesco Ricatti (1676-1754) foi um matemático e filósofo italiano que introduziu a ideia de resolver a equação de segunda ordem com o seu nome, reduzindo-a a uma equação de primeira ordem. Posteriormente, Lord Rayleigh (1842-1919) mostrou a relação entre as funções de Bessel e Laplace, mas elas são, no entanto, encaradas como um sistema distinto de funções transcendentes (SMITH, 1906).

2.3 CONTRIBUIÇÕES EM SERIES TRIGONOMÉTRICAS INFINITAS

Além de generalizar as funções que estão prestes a serem consideradas nesse trabalho, Bessel também desenvolveu trabalhos com funções periódicas em séries trigonométricas infinitas, ideia que também foi anteriormente investigada por grandes nomes da matemática, sendo que o seu nome poucas vezes citado como um dos contribuidores para essa teoria. Todavia, autores da biografia de Bessel destacam esse trabalho como uma prova da sua genialidade matemática. O conceito que ficou conhecido como série de Fourier, consiste em uma série infinita usada para resolver tipos especiais de equações diferenciais. Em seu trabalho sobre a história das funções de Bessel, usado como uma das principais referências deste trabalho, Dutka cita que o desenvolvimento de uma função em uma série infinita de múltiplos de cossenos foi considerado por alguns dos mais proeminentes nomes da Matemática no período (DUTKA, 1995).

A equação da onda que rege a vibração de uma corda foi deduzida ainda na primeira metade do século XVIII por d'Alembert, na forma de uma EDP. Depois disto, Euler publicou os seus resultados, nos quais, utilizando a solução de d'Alembert, mostrou como construir a solução em termos de condições iniciais lançando mão do cálculo infinitesimal. Alguns anos mais tarde, Daniel Bernoulli apresentou o seu trabalho sobre o assunto, afirmando que qualquer solução para a equação da onda pode ser dada como uma soma infinita de uma função senoidal fundamental e das suas harmônicas, embora não soubesse como determinar os coeficientes da soma. Somente em 1777, Euler retorna para o assunto das séries trigonométricas, agora considerando o caso de uma função que se sabia ter uma expansão em série de cossenos, $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$, obtendo inclusive a fórmula para os seus coeficientes. Contudo, ele acreditava que esse método tinha suas limitações. Um desenvolvimento da série de cossenos em uma forma semelhante àquele dado por Fourier, contendo muitas das ideias de Legendre, Laplace, e Lagrange, o que talvez o tenha ajudado a conseguir reconhecimento entre seus colegas, apesar das diversas inconsistências no seu trabalho (DAVIS; HERSH, 1990).

Fourier utilizou senos e cossenos em um estudo de condução de calor de maneira bastante semelhante àquela empregada por Bernoulli em ondas estacionárias. Ele começou sua abordagem expandindo cada função seno em uma série de Taylor e rearranjando os termos de forma a obter a função f representada na forma de uma série de potências. Essa abordagem é apresentada mais adiante, quando for tratado da solução de Lagrange para a equação de Kepler. A partir de alguns pressupostos que, conforme o trabalho de Davis e Hersh (1990), são flagrantemente inconsistentes, Fourier conseguiu chegar à mesma fórmula simples que Euler tinha obtido corretamente, e muito mais facilmente, trinta anos antes (DAVIS & HERSH, 1990). A grande sacada de Fourier veio depois que ele chegou à fórmula de Euler. Nesse ponto, ele percebeu que se pode obter através de uma única linha de desenvolvimento a fórmula do que hoje se conhece por coeficientes de Fourier, de maneira simples usando a ortogonalidade dos senos. Depois observou ainda, como ninguém antes dele havia feito, que a fórmula final dos coeficientes, e a derivação pela ortogonalidade dos senos, permanecem válidas para qualquer gráfico que delimite uma área definida, de forma que, ao contrário do proposto por Euler, assumia que as séries trigonométricas fossem suficientemente gerais como Bernoulli argumentava.

Por volta da segunda década do século XIX, Bessel desenvolveu a série de Fourier independentemente usando um método diferente e o publicou em revistas astronômicas. Em 2 de Julho de 1818, Bessel apresentou um artigo na Academia das Ciências de Berlim, onde estendeu a sua anterior digressão a séries trigonométricas infinitas, proporcionando assim um primeiro tratamento formal do que veio a ser chamado de série de Fourier (LENHARD; CARRIER, 2017).

Os pormenores de uma teoria satisfatória da convergência das séries de Fourier no início do século XIX eram ainda mais nebulosos e remotos do que os de uma teoria da convergência das séries de potência no século XVIII (COLWELL, 1993). O assunto só foi resolvido em 1829 quando, com base no trabalho de Fourier (1822), J. P. G. L. Dirichlet (1805-1859) pôde terminar a discussão apresentando o seu trabalho sobre a convergência das séries de Fourier. O trabalho original de Fourier sobre a difusão de calor em 1807 implicava que as funções contínuas seriam expressas como séries infinitas de funções periódicas. Particularmente, Lagrange, que era um analista por excelência, não pôde ser persuadido de que isto era sensato (DAVIS; HERSH, 1990), embora o próprio tenha dado os primeiros passos para expressar a solução da equação de Kepler na forma de uma série senoidal de Fourier. Tal como para as séries de potências, os resultados a serem alcançados através das séries de Fourier eram demasiado convincentes para serem colocados em suspenso enquanto se esperava por uma teoria de convergência. Bessel não teve dúvidas em utilizá-los para atacar alguns problemas na mecânica celestial.

2.4 DISCUSSÕES ACERCA DO NOME E ORIGEM DAS FUNÇÕES DE BESSEL

Não há praticamente nenhum canto da Matemática Aplicada após 1820 em que as funções de Bessel não tenham desempenhado um papel substancial. Para entender como esse tipo de função foi batizada em referência ao astrônomo alemão, é preciso vasculhar um pouco a história do período. Segundo Conwell (1992), a crença de que Bessel inventou as funções a fim de resolver a equação de Kepler é encontrada frequentemente, mas para o autor é difícil encontrar evidências que sustentem essas afirmações. Fato é que o envolvimento de Bessel com a solução dessa equação e suas consequências foram estudados detalhadamente por diversos historiadores, e rendem um vasto material, o que permite entender em parte o contexto geral e o clima científico do período, de forma que é possível esclarecer e delimitar o papel que ele desempenhou.

No final do século XVIII as funções de Bessel tinham reaparecido na solução de um problema astronômico, que será visto mais adiante no capítulo 3. Uma geração depois, e aparentemente sem o conhecimento do trabalho de Euler, Fourier encontrou a equação de Bessel no curso de seu estudo do calor, escolhendo coordenadas cilíndricas para o estudo de um problema de difusão de calor em um cilindro circular infinitamente longo. Usando como referência alguns matemáticos do século XIX, muitos historiadores observaram que essa equação e suas soluções, as funções de Bessel, não são batizadas adequadamente.

Em um dos seus estudos bibliográficos de Fourier, que se centra na sua monografia de 1807, Grattan-Guinness (1968) resume as suas realizações dizendo que Fourier conseguiu nada menos que o início da teoria geral das “mal nomeadas Funções de Bessel", pelos seus extensos trabalhos examinando as propriedades básicas da função de Bessel de ordem zero, $J_0(x)$, as suas séries e formas integrais, a ortogonalidade e a consequente capacidade de representar uma função durante um intervalo (GRATTAN-GUINNESS, 1968), enquanto que Bessel, embora tenha recebido o crédito por estas funções, não as incorporou no seu trabalho como astrónomo até 1817.

Todavia, como aconteceu para Fourier, que apesar de não ter declarado nem provado corretamente um único teorema sobre a série de Fourier, tendo deixado apenas alguns esboços de prova da sua convergência, mas soube utilizar essas ferramentas num misto de imprudência e genialidade, de maneira que deram ao seu nome a imortalidade merecida (KLINE, 1990). O mesmo pode ser defendido em relação ao trabalho de Bessel com as funções cilindro: ele percebeu o potencial e começou a sistematizar uma teoria para os seus diversos tipos.

Outra questão que não é bem estabelecida é em relação à origem das funções de Bessel. Como foi citado, seu trabalho não foi pioneiro: para Bottazani e Gray (2016) o mérito de descobrir o primeiro exemplo de uma função de Bessel reside provavelmente em Jakob Bernoulli (1654-1705), que a descreveu em 1703 numa carta a Leibniz. Jakob era um reconhecido defensor do cálculo infinitesimal desenvolvido por Leibniz, que na época gerava uma certa resistência por parte de outros pesquisadores, tendo inclusive contribuído para sua expansão para outros tipos de aplicações (BOTTAZZINI; GRAY, 2016).

O consenso, no entanto, aponta um outro membro famoso da família Bernoulli como o responsável, Watson (1922) elabora em seu material introdutório ao tratado sobre as funções de Bessel sobre como Daniel Bernoulli conseguiu derivar uma equação geral para descrever as oscilações de uma corrente pesada oscilando pendurada por uma das pontas. D. Bernoulli e Euler debateram o problema de determinar a forma do movimento de uma corrente na Academia de São Petersburgo antes de Bernoulli partir para Basileia; os artigos de Bernoulli sobre o assunto, publicados em 1738 e 1740, tiraram então uma resposta de Euler, que discordava da solução apresentada por Bernoulli.

O debate os levou a descobrir a função de Bessel de ordem zero, para a qual mostraram que possui um número infinito de zeros reais. Bernoulli começou então, e Euler continuou, o estudo das funções $J_n(x)$ (Funções de Bessel de ordem n), chegando em 1764 à expressão geral para a vibração de uma membrana esticada de um tambor circular, expressando a equação de onda em coordenadas polares e procurando uma solução pela técnica de separação de variáveis; isso o levou à equação de Bessel, para a qual ele deu soluções em séries de potências. Ainda segundo Watson (1922), Fourier também as encontrou em um estudo sobre o arrefecimento de um cilindro em 1822.

Estes fenômenos não parecem ter qualquer relação entre si, nem com equação derivada em 1824 por Bessel relativa ao movimento elíptico dos planetas, mas a origem dessas funções não está apenas relacionada a estudos da onda e equações do calor. Em 1770, Lagrange descreveu solução uma solução para o problema de Kepler e inspirou Bessel a buscar a sua. Nos capítulos a seguir esse estudo do movimento planetário será esmiuçado, apresentando os conceitos e as contribuições desses dois personagens.

3 O PROBLEMA DE KEPLER

Antes de traçar o trabalho sobre a equação de Kepler iniciado por Lagrange e continuado por Bessel, nesse capítulo serão trazidos alguns fundamentos que ajudaram a entender problemas de mecânica celeste no contexto da série de Fourier e funções de Bessel.

3.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA DE KEPLER

Em 1609 J. Kepler (1571-1630) publicou o seu famoso tratado, Astronômia Nova (1609), no qual deu leis empíricas que resumem os resultados de muitos anos de observações planetárias. As leis do movimento planetário de Kepler são conhecidas como: lei das órbitas elípticas, lei das áreas e lei dos períodos. A primeira era no sentido de que as órbitas dos planetas são elipses com o sol em um dos focos. A segunda lei afirma que o vetor do raio, ligando o sol e um planeta, varre áreas iguais em tempos iguais. Existe ainda uma terceira lei que não é relevante nesse estudo. Cerca de sessenta anos mais tarde, I. Newton (1643-1727) derivou as leis empíricas de Kepler como consequência da lei de gravitação universal na sua teoria da gravitação.

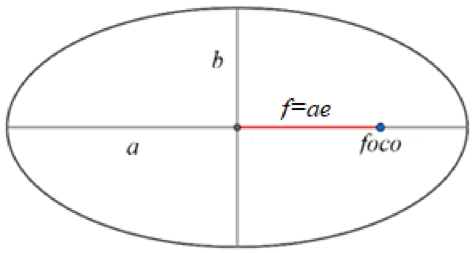
Kepler desenvolveu uma equação notável e sua solução, e diversas tentativas posteriores, gerou uma vasta literatura que continua a ser incrementada atualmente, relacionado principalmente aos métodos numéricos e sua implementação. Certamente não é único na ciência que um problema específico receba tanta atenção durante um período tão longo - especialmente se ele resiste à solução, se suas soluções parciais são inadequadas ou insatisfatórias, como foi o caso da equação de Kepler. Novas técnicas para resolver equações analíticas têm sido testadas neste problema central para a mecânica celeste, e várias soluções satisfatórias são conhecidas há muito tempo. Com o advento das calculadoras e computadores, não há impedimento para alcançar soluções rápidas de grande precisão, mas quando essas tecnologias não estavam nem próximas de se tornarem realidade, dois nomes famosos fizeram suas tentativas: Lagrange e Bessel. Mas, antes de retomar as contribuições específicas de cada um para a solução da equação de Kepler, é necessário desenvolver alguns fundamentos da Geometria Analítica.

3.1.1 Elipse

Aqui cabe uma retomada rápida de conceitos. Há várias formas alternativas de definir uma elipse (Figura 2), uma é como a intersecção de um plano com um cone. A elipse, centrada na origem, possui dois focos $(\pm f, 0)$ com a propriedade de que o caminho retilíneo de um foco para o outro, passando por um ponto da elipse no caminho, tem um comprimento constante.

Denotando semieixo maior a e semieixo menor b, os focos são obtidos pela equação $f = \sqrt{a^2 - b^2}$, e área é dada por πab. A excentricidade da elipse é a razão $e = f/a$. Uma vez que a órbita é uma elipse, sua excentricidade e encontra-se no intervalo [0, 1), isto é, 0 para círculos e tende a 1 conforme a elipse vai se tornando achatada.

Figura 2. Modelo de elipse.



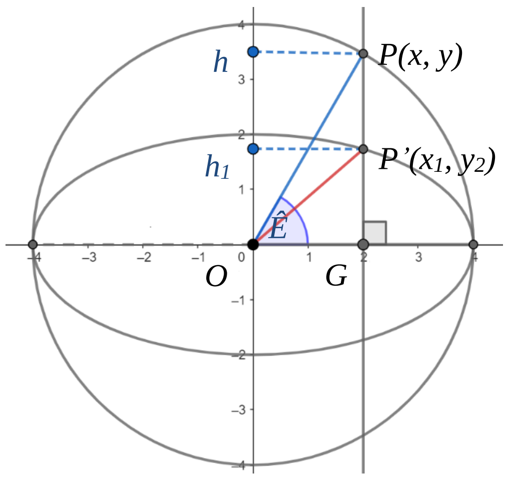
Fonte: próprio do autor, 2022.

Dados a e e, tem-se que: $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Uma vez que $\sqrt{1 - e^2}$ pode ser expandida como uma série de Taylor de 2ª ordem em torno de $e = 0$ por $\sim 1 - \frac{e^2}{2}$, os semieixos b e a são bastante próximos quando e é pequeno. Então o formato da elipse é próximo de um círculo para e quase nulo.

3.1.2 Deduzindo a Elipse em função da Circunferência e vice-versa

Outra forma na qual pode-se obter uma elipse é a partir de uma circunferência, redimensionando horizontalmente e/ou verticalmente por um fator constante. De acordo com Davis (2003), é essa a caracterização de elipse que Kepler usou em seu trabalho.

Figura 3. A circunferência comprimida de Kepler.



Fonte: próprio do autor, 2023.

Considerando a Figura 3 tem-se os elementos: *Oxy*: Sistema de coordenadas da circunferência; λ(*O*, *a*): Circunferência com centro em O e raio *a*; Oxy_1 : Sistema de coordenadas da Elipse; ε(*a*, *b*): Sistema de coordenadas da Elipse; *P(x, y)*: Ponto da circunferência; $P(x_1, y_1)$: ponto da Elipse; $\hat{E}= P\hat{O}A$: ângulo; $|\hat{E}|= E$: medida, em radianos, do ângulo $\hat{E}$.

(i) Escrevendo a circunferência a partir da elipse.

Seja a elipse ε(*a*, *b*), cuja equação geral é:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 = a^2.$$

Chamando $x = x_1$ e $y = \frac{a}{b} y_1$, tem-se:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(ii) Escrevendo a circunferência a partir da elipse.

Seja a circunferência λ(*O*, *a*), cuja equação geral é:

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a} y\right)^2}{b^2} = 1.$$

Chamando $x_1 = x$ e $y_1 = \frac{b}{a} y$, tem-se:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

(iii) Altura do triângulo $\Delta\mathrm{OGP}'$ a partir do ΔOGP :

A partir da Figura 3, como ΔOGP e $\Delta\mathrm{OGP}'$ são retos em *G*. Logo, pode-se calcular a altura do $\Delta\mathrm{OGP}'$:

$$h = y = a\, sen\, E. \tag{2}$$

Substituindo a Equação (1) em Equação (2), tem-se:

$$\frac{a}{b} y_1 = a\, sen\, E \ \Rightarrow y_1 = b\, sen\, E \ \xRightarrow{h_1 = y_1} h_1 = b\, sen\, E \ ,$$

o qual é a altura do ΔOGP.

3.1.3 Movimento planetário

Em um sistema de dois corpos massivo, como um planeta ou uma estrela, os dois corpos viajam em órbitas elípticas semelhantes em torno de seu centro de massa. A razão dos eixos é inversamente proporcional às suas massas. Se um corpo é muito maior que o outro, e o centro de massa é essencialmente fixo, o objeto menor viaja ao redor do maior em uma elipse aparente. Isto é, o que acontece, de fato, no sistema solar.

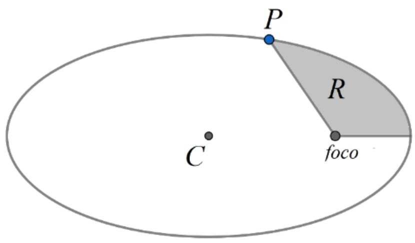
Considere um planeta em movimento numa elipse com um centro em *C*:(0,0), uma órbita com semieixo maior a e semieixo menor b. O sol S está em um dos focos $(ae, 0)$, e A:(a,0) e A':(-a,0) denotam o periélio e o afélio respectivamente (ver

Figura 5). Supondo que no instante $t = 0$, o planeta esteja no periélio, ou seja, o ponto em sua órbita mais próximo do Sol, que P denote a posição do planeta na sua órbita em um determinado momento t medido a partir do instante em que o planeta passa por A. Seja R a área da região percorrida pelo vetor raio $\overrightarrow{SP}$ do planeta a partir do Sol. A Segunda Lei de Kepler nos diz que:

$$R = \frac{\pi ab}{T} t,$$

onde T é o período de revolução do planeta.

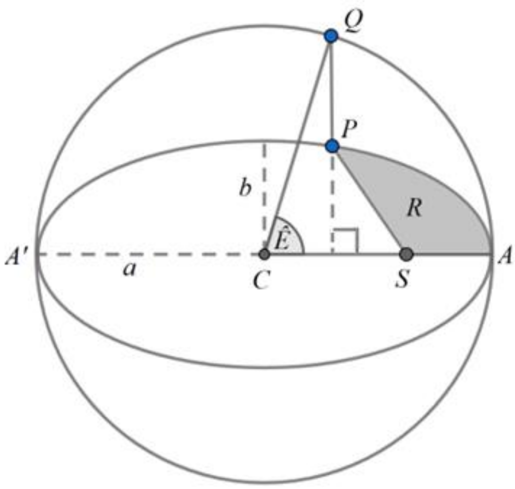
Figura 4. Modelo descrevendo a área R.



Fonte: próprio do autor, 2023.

Será usado um sistema de coordenadas paramétricas com origem no centro da elipse e descrito os pontos da órbita em termos de pontos no círculo que se pode inscrever em torno da elipse de raio a (ver modelo na Figura 5). A elipse é obtida a partir deste círculo comprimindo ao longo do eixo y por um fator b/a. Assim, se $Q = (a\cos E\,, a\,sen\,E)$ é um ponto da circunferência correspondente no círculo no momento t ao ponto $P = (a\cos E\,, b\,sen\,E)$ da elipse, ou seja, P e Q possuem a mesma ordenada. Os ângulos $A\hat{C}Q = \hat{E}$ e $A\hat{S}P = \widehat{W}$ são chamados de anomalia excêntrica e anomalia verdadeira, respectivamente.

Figura 5. A orbita elíptica de um planeta ao redor do Sol



Fonte: próprio do autor, 2023.

Finalmente, pelas leis de Kepler *M = 2πt/T* é chamado de anomalia média, de modo que *M* pode ser expresso em termos de tempo *t*. Pode-se facilmente deduzir as relações a seguir de forma análoga para o círculo, e obtêm-se as que estão na elipse redimensionando verticalmente pelo fator *b/a*. Observando o esquema acima, percebe-se que a área do setor *R* é a diferença entre a área do setor elíptico de ângulo $\hat{E}$, e o triângulo *CSP*, o qual, por projeção ortogonal, tem altura igual a *bsen E* e base $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. Portanto,

$$R = \frac{b}{a}\left(\frac{\pi a^2 E}{2\pi} - \frac{a^2 e\ sen\ E}{2}\right) = \frac{ab}{2}E - \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{2} sen\,E. \qquad (3)$$

Reescrevendo, tem-se:

$$\frac{R}{\frac{ab}{2}} = E - e\,sen\,E. \qquad (4)$$

A expressão *M = R/(ab/2)* também é, pela Lei de Kepler, igual a *2π(t/T*). Por isso

Preposição: No instante *t*, o ângulo $\hat{E}$ é a única solução da equação:

$$M = 2\pi\frac{t}{T} = E - e\,sen\,E. \qquad (5)$$

A expressão na Equação (5) é conhecida como equação de Kepler. O problema a resolver para $\hat{E}$, a anomalia excêntrica, em termos de *M*, a anomalia média (Além disso, o vetor raio $\overrightarrow{SP}$ e a verdadeira anomalia $\widehat{W}$ também podem ser expressos em termos de $\hat{E}$, de modo que todos os elementos geométricos da órbita podem ser expressos como funções de $\hat{E}$, e, consequentemente, como funções de *M* depois de resolvida a Equação (5).

Enquanto conhecer *M* é equivalente a conhecer *t.* Assim, a equação de Kepler afirma diretamente que, se conhecendo a posição *P*, pode-se dizer qual é *t*. Isso geralmente é o oposto do que geralmente se quer saber, que é como determinar *P* em termos de *t*. Para fazer isso, deve-se resolver a equação de Kepler para *E* em termos de *M*. Isso não é tão direto. Na verdade, não existe uma fórmula simples para *E* em termos de *M* (ou *P* em termos de *t*), e é preciso resolver a equação numericamente.

Kepler acreditava que a equação não podia ser resolvida exatamente devido à heterogeneidade do ângulo $\hat{E}$ e do valor de $sen\,E$. O seu método para obter uma solução aproximada era o oneroso cálculo de tabelas da anomalia média *M* e da verdadeira anomalia para valores integrais da anomalia excêntrica *E*, e utilizar a interpolação para obter o valor médio. Numerosos sucessores nos séculos XVII e XVIII deram soluções aproximadas de maior ou menor precisão.

3.2 ESTRATÉGIA DE LAGRANGE

Nesse tópico será apresentada a solução do problema de Kepler realizada por Lagrange e compará-la com a solução obtida por Bessel, esta última feita de forma diferente à realizada por Lagrange. Muitos problemas da época foram atacados por inversão de séries. Para resolver a equação $y = f(x)$ para *x* (isto é, para encontrar $x = f^{-1}(y)$ se escreve *f* em potências de *x* e depois se tenta inverter a série para obter uma série de potência para f^{-1}. Um dos primeiros resultados a tornar isto viável foi apresentado por Lagrange (CONWELL, 1992).

Em 1770 Lagrange deu uma solução analítica da equação de Kepler, ao desenvolver um teorema para a expansão de uma função definida por uma equação implícita em uma série (BATTIN, 1999). O teorema da inversão de Lagrange é um método analítico que fornece uma expansão em séries para certas equações não lineares que não podem ser resolvidas por manipulações algébricas, para o qual a Equação (5) é um caso específico (HOLZMANN; DALLAMUTA, 2021).

Inicia-se com a expressão obtida por Lagrange através da aplicação do seu método de inversão (BATTIN, 1999; CONWELL, 1992):

$$f(y) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[f'(x).\left(\varphi(x)\right)^n\right]. \tag{6}$$

Sendo *f* e φ funções analíticas, *t* um número real, $0 < t < 1$, *x* e *y* números complexos. A expressão acima é uma expansão em série de Taylor. Conforme apresentado por Battin (1999), pode-se considerar: $f(y) = y$, $\varphi(x) = sen\, x$, $x = M(E - e\, sen\, E)$, *t=e* (excentricidade), $y = E$ (medida do ângulo $\hat{E}$) e como $f(x) = x$, daí $f'(x) = 1$. Logo a Equação (6) é escrita como:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} [sen^n\, M]. \tag{7}$$

Ainda de acordo com Conwell (1992), Lagrange trabalhou para colocar essa solução na forma de uma série senoidal de Fourier. Na

Figura 5, a partir das coordenadas polares de *P* em relação ao foco *S*, tem-se que para raio *r* (*sendo r* a medida do vetor raio $\overrightarrow{SP}$):

$$r^2 = (f - \ a \cos E)^2 + (b\, sen\, E)^2 =$$

$$= a^2 \cos^2 E - 2af cosE + f^2 + b^2\, sen^2\, E =$$

$$= (a^2 - b^2) \cos^2 E - 2af cosE + f^2 + b^2(\cos^2 E + sen^2\, E) =$$

$$= f^2 \cos^2 E - 2af \cos E + a^2 =$$

$$= a^2(1 - e \cos E)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = a(1 - e \cos E). \quad (8)$$

A partir da Equação (8) segue que $\frac{r}{a}$ pode ser determinado em termos de M a partir da Equação (6) definindo $f(E) = 1 - e \cos E$. Considerando a Figura), Dutka (1995) faz:

$$r^2 = (a \cos E - ae)^2 + b^2 sen^2 E,$$

e conclui que:

$$f(E) = tan\left(\frac{W}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \cdot tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (9)$$

Da mesma forma, a anomalia verdadeira W pode ser obtida da Equação (9), determinando E a partir da Equação (7). No entanto, ao calcular as derivadas de ordem $n-1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, ocorrem: $\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(sen^2 M) = n \cos M \, sen^{n-1} M$ e Lagrange considerou isso muito trabalhoso. Ele foi levado a considerar as séries para E e r nas formas (DUTKA, 1995;WATSON, 1966):

$$\begin{cases} E = M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e)\, sen(nM) \text{ e} \\ \frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(M) \cos(nM), \end{cases} \quad (10)$$

Sendo a_n e b_n coeficientes que possuem a forma:

$$\begin{cases} \frac{a_n}{2} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n^{2m+n-1}}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m} \text{ e} \\ -\frac{b_n}{2} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+2m)^{2m+n-2}}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}. \end{cases} \quad (11)$$

Para $n = 1, 2, \ldots$, defini-se a função:

$$J_n(e) = \left(\frac{e}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(e+m)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}. \quad (12)$$

Note que e é excentricidade e não o número de Euler. No trabalho de Dutka (1995) tem-se que $J_n(e)$ é a função de Bessel de ordem "n" e realizando algumas transformações, na variável "e", os coeficientes são dados na forma:

$$a_n = \frac{2J_n(ne)}{n},\; b_n = -2\left(\frac{e}{n}\right) J'(ne). \quad (13)$$

O método utilizado por Lagrange para obter as expressões em Equação (11) a partir da Equação (10) é indireto e complicado, mesmo considerando $n = 1, 2$ e 3 (DUTKA, 1995). Bessel considerou o trabalho de Lagrange para obter $a_1(e)$, $a_2(e)$, $a_3(e)$, bem como outros esforços posteriores para encontrar mais coeficientes em (7), grosseiro e desajeitado. Na opinião dele o teorema de Lagrange era uma ferramenta muito geral para obter resultados tratáveis em casos específicos, e ele afirmou ter encontrado um método mais conveniente e prático que forneceria soluções mais claras para uma variedade de problemas em mecânica celeste (CONWELL, 1992).

Como resultado, Bessel desenvolveu um método diferente de solução envolvendo séries trigonométricas infinitas, cujos coeficientes produzem as funções desde então nomeadas em sua homenagem. Mas, antes de tratar a solução de Bessel, e introduzir a sua aplicação prévia de séries trigonométricas finitas à redução dos dados obtidos a partir de instrumentos astronômicos, é importante entender um pouco das suas motivações nesses trabalhos.

4 AS MOTIVAÇÕES DE BESSEL

A história da descoberta de Netuno é um exemplo interessante do potencial que se começava a ver na Matemática em predizer diferentes fenômenos. O planeta foi encontrado primeiro teoricamente graças à Matemática. No século XIX, as leis da gravidade de Newton eram bem entendidas e, com elas, as órbitas dos planetas ao redor do Sol podiam ser previstas, exceto a de Urano, que se desviou um pouco do caminho esperado. Naquela época, Urano era o planeta conhecido mais distante do Sol e alguns cientistas especularam que as leis da gravidade de Newton poderiam não funcionar a uma distância tão grande. Outros, porém, seguiam de forma dogmática a matemática do físico inglês.

Era o caso de Bessel, o seu grau de confiança nas leis de Newton era tão grande que, em 1824, ele foi o primeiro a apresentar a hipótese de um planeta perturbador para explicar o movimento de Urano. Entre 1834 e 1840, ele também previu a presença de um companheiro invisível em torno de Sirius 53, depois em torno de Prócion, estrela vizinha mais próxima a Sirius, com base nas irregularidades observadas em seus movimentos (DESCAMPS, 2015). Como o próprio Bessel havia antes intuído, a Matemática logo se tornaria, literalmente, um instrumento para a descoberta de novos corpos celestes (ŁAWRYNOWICZ, 1995). Bastava encontrar alguém que fosse disposto a se embrenhar pelo caminho dos laboriosos cálculos pelo qual os métodos numéricos conduziam. Em 23 de Setembro de 1846, o planeta Netuno foi descoberto no local calculado por J. C. Adams (1819-1892) e Urbain Le Verrier (1811-1877) independentemente, que estavam convencidos de que o grande instrumento necessário para resolver essa e outras questões não seria outra coisa senão o estudo e os cálculos de perturbações (LENHARD; CARRIER, 2017). Eles calcularam de forma precisa a posição do planeta, no entanto, a partir das informações de Adams, o Observatório de Cambridge não foi capaz de reconhecer Netuno. Somente quando o astrônomo Johann Gottfried Galle (1812 – 1910) apontou o seu telescópio em direção à área indicada pela matemática de Verrier, o planeta foi encontrado. A descoberta de Netuno representou um grande triunfo para a teoria gravitacional de Newton.

Os trabalhos astronômicos de Newton publicados em sua obra monumental Principia representam um marco na história da ciência. Depois dele, um dos nomes que mais contribuiu para a astronomia é o de Bessel. Além da teoria dos erros, o uso contínuo de métodos matemáticos para resolver problemas astronômicos e outros problemas científicos foi outra maneira pela qual ele mudou a astronomia. No século 18 e início do século 19, as fronteiras entre astronomia, geodésia, mecânica e matemática não eram tão bem delimitadas como são hoje. Essas disciplinas eram ministradas em um único ciclo nas faculdades de filosofia das universidades europeias, e a pesquisa científica dos mais importantes representantes das ciências exatas da época era geralmente relacionada a cada componente desse ciclo. Basta citar Euler, Clairaut, Lagrange, D'Alembert, Laplace e Gauss: todos desenvolveram notáveis trabalhos em mecânica celeste e são alguns dos nomes mais brilhantes da matemática. Gauss, por exemplo, com a teoria da determinação de órbitas, com trabalhos importantes de geodésica avançada e a criação do importante método dos mínimos quadrados contribuiu em diversos campos de investigação na resolução de certos problemas fundamentais.

O nome de Bessel, que era astrônomo e até certo ponto matemático, está incluído nessa lista. No entanto, em contraste com Gauss, que sempre foi mais inclinado para a teoria matemática pura, Bessel voltou-se quase exclusivamente para a Matemática como um instrumento para a solução de problemas em astronomia, geodésia e física. Além disso, os resultados matemáticos de Bessel tinham valor tanto aplicado quanto intrínseco, pois ele seguia a regra de que a solução para um problema científico deveria ser buscada na raiz. E entre os matemáticos, o nome Bessel sempre teve e ainda tem um significado especial.

O trabalho matemático de Bessel sempre foi de natureza aplicada, mas tem uma coisa em comum: um foco algorítmico claro, a tentativa de expressar um resultado matemático de forma calculável, numérica e tabular. Esta orientação do trabalho matemático de Bessel mostra novamente quão claramente ele via uma das tarefas essenciais da astronomia de seu tempo: a necessidade de conciliar a astronomia prática, baseada em observações e cálculos, com o alto nível da astronomia teórica, baseada na visão de Newton de mecânica celeste.

Bessel mostrou desde muito novo ser hábil com a matemática, mas dentro do contexto do observatório ele estava interessado em usá-la como um instrumento, ou até mesmo em combinação com eles, a serviço de um aumento crescente na precisão de suas observações e de seus próprios instrumentos como telescópios, heliômetros entre outros. Um autor que sustenta essa visão é Hirshfeld (2013), em seu livro de referência sobre a história da paralaxe, o autor cita que Bessel queria abordar um projeto que combinasse a observação de precisão com a análise matemática. Ainda na época em que esteve em Lilenthal, Bessel visionou um telescópio com ótica imaculada, movimento preciso e suave, montagem sem vibrações, e círculos de coordenadas finamente gravados. Com um tal instrumento, ele poderia medir as posições precisas das estrelas (HIRSHFELD, 2013).

Ele foi mais longe e explorou várias utilizações da matemática se aproximam ainda mais da ideia de um instrumento. Quando montou o seu observatório em Königsberg, Bessel recebeu um telescópio Dollond de aproximadamente 1,22 metros de distância focal e 6,86 centímetros de abertura, equipamentos que foram adquiridos do observatório do conde Friedrich Von Hahn (1742-1805), o proprietário do observatório em Remplin, na atual Alemanha, após sua morte. (LAWRYNOWICZ, 1995). Em cartas trocadas com Gauss, Bessel expressava a qualidade desse e de outros instrumentos adquiridos do observatório de Hahn, que até então era considerado o melhor da Europa, e novos métodos de análise matemática que ele havia desenvolvido para melhorar a precisão de seu instrumento analisando seus pequenos defeitos. Tendo empreendido a investigação microscópica da pequena elipticidade e excentricidade dos eixos, Bessel explicou que usou o que chamou de aplicação do método dos mínimos quadrados de Gauss, que havia encontrado em outra ocasião e que considerava “muito elegante”.

Para Carrier (2017), tal como fez com os telescópios, Bessel tinha a noção que se aprofundando na análise matemática como um instrumento que poderia ser aperfeiçoado ele atingiria objetivos práticos como, por exemplo, sondar os próprios fundamentos da teoria newtoniana. Em publicação de 1819, Bessel explicou: “Antes de dar a investigação detalhada deste e de outros erros do círculo, permito-me uma digressão sobre a solução de uma classe de equações que ocorrem com frequência na astronomia prática, que encontrarão sua aplicação aqui.” (LENHARD; CARRIER, 2017).

Essa digressão refere-se à própria abordagem de Bessel para determinar o coeficiente de uma série trigonométrica finita representando uma função, desenvolvida independentemente de Fourier (DUTKA, 1995), cujo contexto histórico já foi discutido anteriormente e que agora será analisado em pormenor, contudo, como método desenvolvido por Bessel para obter esses resultados é um tanto trabalhoso, aqui será apresentado de uma forma simplificada.

5 TRABALHO DE BESSEL COMO MATEMÁTICO

Ao longo do tempo, o trabalho de Bessel como matemático desenvolveu-se em paralelo e em estreita conexão com sua pesquisa em astronomia e outras ciências naturais. Os seus primeiros trabalhos matemáticos datam de 1810 até 1812, ou seja, da época do Observatório de Königsberg, antiga Prússia. Nessa altura, em ligação com a teoria da refração, Bessel preocupava-se com integrais tal como $\int \frac{dx}{\ln x}$, que, como é bem conhecido, não pode ser expressa por funções elementares, mas que ocorre frequentemente em aplicações. Para resolver essa integral, Bessel encontrou uma representação aproximada adequada (ŁAWRYNOWICZ, 1995). A partir desse fato já é possível constatar a destreza de Bessel em lidar com problemas complexos que exigissem uma solução analítica. Como será apresentado mais adiante, essa abordagem de Bessel será importante na sua solução do problema de Kepler.

5.1 A SOLUÇÃO DE BESSEL EM SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS INFINITAS

Dutka (1995) relata que em 1813 numa carta a Gauss, Bessel delineou um método para determinação dos coeficientes de uma série trigonométrica finita para representar uma função e publicou em artigo de 1815 e revistas astronômicas anteriores, ele aplicou o método à graduação de um círculo num instrumento astronômico (DUTKA, 1995). Dutka não apresenta em seu artigo de que forma o método se aplicaria na graduação de instrumentos astronômicos. Contudo, o problema de graduação de uma circunferência pode ser explorado aqui para introduzir a ortogonalidade das funções seno e cosseno de forma bastante conveniente.

O comprimento circunferência de um círculo unitário sendo denotada por 2π, qualquer fração comensurável dela pode ser expressa por por $2\pi\frac{x}{L} = \frac{2\pi x}{L}$, x e L sendo números inteiros positivos, e os sucessivos múltiplos desta parcela fracionária por $n\frac{2\pi x}{L}$, supondo que n tome sucessivamente os valores *0, 1, 2, ...*. Se agora for considerado apenas os múltiplos de *n=0,* a *n= L-1,* tem-se algumas definições importantes.

A graduação de uma circunferência fornece o argumento ideal para as funções periódicas adiante. Primeiro porque esse argumento $\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é o mesmo que aparecerá na abordagem de Bessel para o problema de Kepler. Segundo que demonstrando as relações de ortogonalidade para um argumento em um dado intervalo, se for alterado o argumento seria preciso reavaliar o intervalo.

5.1.1 Produto Interno

Definição 1: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função par se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o que significa que o gráfico da função *f* é simétrico com relação ao eixo das ordenadas.

Definição 2: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita função ímpar se $f(x) = -f(-x)$, $\forall$x $\in \mathbb{R}$, o que significa que o gráfico da função *f* é simétrico com relação à origem.

Definição 3: Seja *V* um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um produto interno sobre *V* é uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, que se denota por $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle$, tal que valem as seguintes propriedades:

(i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$,

(iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

(iv) $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0_v}$ e $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq \overrightarrow{0_v}$,

$\forall\, u, v, w \in V\ e\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1: Seja C o espaço das funções contínuas no intervalo [a, b], isto é:

$$C[a, b] = \{f: [a, b]\} \rightarrow \mathbb{R} \mid f: função\ contínua\}$$

Define-se o produto interno das funções contínuas:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Sendo *f*, g pertencentes a C.

5.1.2 Ortogonalidade de funções

Definição 4: Seja (*V*, $\langle\ ,\ \rangle$) o espaço vetorial munido de produto interno. Diz-se que os elementos u, *v* ∈ V são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemplo 2*:* Sejam $(C([-L, L]), \langle\ ,\ \rangle)$ o espaço vetorial das funções contínuas munido de produto interno em $C([-L, L])$ e a função $f_n \in C$ definida por: $f_n(x) = cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, -L \leq x \leq L$. O conjunto $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ é ortogonal.

Prova: $\forall\, f_n, f_m \in S$, calcula-se o produto interno:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Agora, a fim de calcular esta integral, é preciso efetivamente considerar três casos.

(i) *m* = *n* = 0:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{0\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{0\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{-L}^{L} 1\, dx = 2L.$$

(ii) $n = m \neq 0$:

A aplicação $\|f_i\| = \sqrt{\langle f_n, f_n\rangle}$ define uma norma em $C([-L, L])$. Pelo Exemplo 1:

$$\|f_i\|^2 = \langle f_n, f_n\rangle = \int_{-L}^{L} f_n^2(x)\, dx = \int_{-L}^{L} cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Pela identidade trigonométrica: $cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$, tem-se que:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx.$$

Observe que, como $sen\, x$ é uma função ímpar, tem-se que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi}\left[sen\left(\frac{k\pi L}{L}\right) - sen\left(\frac{-k\pi L}{L}\right)\right] = \frac{L}{n\pi} 2\, sen(k\pi) = 0.$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} dx = L$$

(iii) $n \neq m$:

A partir da identidade trigonométrica: $cos\,\alpha\, cos\,\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) + cos(\alpha+\beta)]$, pode-se escrever:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) + cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{L}^{L} cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\, dx \Rightarrow$$

$$\langle f_n, f_m\rangle = \frac{1}{2}\int_{L}^{L} cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{L}^{L} cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx. \tag{14}$$

Considerando $k = m - n$ na primeira parcela do integrando da Equação (15), e usando o cálculo integral, tem-se que:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

Da mesma forma pode-se mostrar que fazendo $k = m + n$ para a segunda parcela da Equação (14), essa integral zera. Sendo assim,

$$\frac{1}{2}\left[\int_{L}^{L} cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx\right] = 0.$$

Logo, $\langle f_n, f_m\rangle = 0, \forall\, n, m, n \neq m$, e pela Definição 4 o conjunto S é ortogonal.

Exemplo 3: Sejam $(C([-L,L]),\langle\ ,\ \rangle)$ o espaço vetorial das funções contínuas munido de produto interno em $C([-L,L])$, e a função $f_n \in C$ definida por: $f_n(x) = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 0, 1, 2, \ldots$ e $-L \leq x \leq L$. O conjunto $S = \{f_n\}$ é ortogonal.

Prova: Análoga ao Exemplo 2.

Exemplo 4: Sejam $(C([-L,L]),\langle\ ,\ \rangle)$ o espaço vetorial das funções contínuas munido de produto interno em $C([-L,L])$, e a função $f_n \in C$ definida por: $f_n(x) = cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $g_m(x) = sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, com $n, m \in \mathbb{N}$ e $-L \leq x \leq L$. Mostre que $\langle f_n, g_m\rangle = 0$ para $m, n\ =\ 0,1,2,\ldots$.

Prova: Utilizando a identidade trigonométrica: $sen\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)$ e $sen\,\alpha\,cos\,\alpha = \frac{1}{2}sen(2\alpha)$, então:

$$\langle f_n, g_m\rangle = \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[sen\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) + sen\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\langle f_n, g_m\rangle = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[sen\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + sen\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right] dx. \tag{15}$$

Considerando $k = m - n$ na primeira parcela do integrando da Equação (15), e usando o cálculo integral, tem-se que:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{L}{n\pi}\left[cos\left(\frac{k\pi L}{L}\right) - cos\left(-\frac{k\pi L}{L}\right)\right] = \\ &= \frac{L}{n\pi}[cos(k\pi) - cos(k\pi)] = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

e analogamente para o que foi feito acima, obtêm-se para a segunda parcela da Equação (15) e $k =\ m + n$:

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0. \tag{17}$$

Substituindo a Equação (16) e Equação (17) na Equação (15), obtêm-se:

$\langle f_n, g_m\rangle = 0.$

Portanto, f_n e g_m são ortogonais $\forall\ n, m = 0, 1, 2, \ldots$.

5.1.3 Séries trigonométricas infinitas

Em muitas tarefas em astronomia teórica e prática, é necessário aproximar uma dada função por uma expressão analítica que facilite o cálculo da função ou a investigação de suas propriedades. O método série trigonométrica é um dos mais importantes e frequentemente usados. Por conveniência, suponha-se um problema descrito por função periódica dada por *y=f(x)* e que tenha um período de *2π*. Diz-se que a função *f(x)* tem uma expansão em série trigonométrica quando é possível converter essa função em uma série trigonométrica, ou seja, na forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

na qual:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \quad (18)$$

onde a_0, a_n, b_n, $n= 1,2,3,...,$são coeficientes constantes, podem tomar como aproximação a soma das *n* primeiras somas da série $S_n(x)$. O fator ½ é acrescentado ao termo constante para permitir generalizar os coeficientes. E para dar o lado prático e aplicado da tarefa de aproximar uma função por polinômios trigonométricos, Bessel fez uma análise minuciosa do problema. Ele formulou o problema da seguinte forma: Para um dado *n*, determine os coeficientes a_0, a_n, b_n, tais que o polinômio trigonométrico construído $S_n(x)$ se aproxime otimamente de uma dada função *f(x)*. É muito característico que Bessel não tenha tocado nas questões teóricas da convergência de uma série infinita para a função *f(x)*; ele deu uma solução algorítmica direta para o problema desenvolvendo uma ideia que envolve o método dos mínimos quadrados. Como medida para a aproximação da soma $S_n(x)$ à função *f(x)*, ele considerou apenas o desvio médio quadrático e sugeriu escolher os coeficientes em $S_n(x)$ de forma que a integral assumisse o menor valor. Em outras palavras, o erro que é gerado quando, para um determinado *x*, substituímos *f(x)* pela soma $S_n(x)$ dos primeiros *2n+1* termos de uma série trigonométrica, é *f(x)* - $S_n(x)$ e a medida da proximidade de representação ao longo do intervalo $0<x<2\pi$ (o período de *f(x)*) será o quadrado do erro, ou seja, o erro é a integral:

$$J = \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx. \quad (19)$$

Para se obter uma boa aproximação para *f(x)* será preciso calcular a soma $S_n(x)$, para o qual a integral *J* tem um valor mínimo.

Uma condição necessária e suficiente para um mínimo de *J* (levando em conta a não negatividade do integrando) é o desaparecimento de suas derivadas parciais em relação a a_0, a_n, b_n, $n = 1,2, ... , v$. Desta condição a Bessel derivou fórmulas para os coeficientes da soma $S_n(x)$ que garantem uma aproximação ótima da função *f(x)* em termos do mínimo da derivada quadrada média. Estabelecer essa condição permitiu que Bessel determinasse os *2n+1* coeficientes a_n e b_n. Uma vez que *J* é uma função de *2n+1* valores para a_n e b_n, tem-se como condição necessária para mínimo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \qquad \dfrac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \ldots, \qquad \dfrac{\partial J}{\partial a_n} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial J}{\partial b_1} = 0, \ldots, \qquad \dfrac{\partial J}{\partial b_n} = 0, \end{cases} \tag{20}$$

Fica evidente, em se tratando de uma função J, com integrando quadrático, positiva de a_o, ..., b_n, que os valores das variáveis determinados por essas $2n+1$ equações fornecem um valor mínimo. Calculando as derivadas da Equação (20), observando que J é uma integral, as expressões assumem a forma:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]dx = 0, \\ \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]\cos x\, dx = 0, \ldots, \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]\cos nx\, dx = 0, \\ \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]\,sen\, x\, dx = 0, \ldots, \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]\,sen\, nx\, dx = 0, \end{cases} \tag{21}$$

Agora as integrais dos produtos de $S_n(x)$ por um cosseno ou um seno podem ser simplificadas. Tem-se que, para $m = 0, 1, ..., n$,

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos mx\, dx \quad =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \cos mx\, dx + \cdots + a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx +$$

$$+b_1 \int_0^{2\pi} sen\, x \cos mx\, dx + \cdots + b_n \int_0^{2\pi} sen\, nx \cos mx\, dx\,.$$

Por se tratar de funções trigonométricas elementares, das quais as propriedades são bem conhecidas, todos os termos à direita se anulam, com exceção do termo cosseno com índice m, que assume o valor $a_m\pi$, daí vem,

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos mx\, dx = a_m\, \pi, (m\ =\ 0, 1, \ldots, n).$$

Este resultado vale também para $m = 0$, em virtude de se ter escolhido para a_0 o fator ½. De forma análoga para os termos envolvendo b_n,

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) sen\, mx\, dx = b_m\, \pi, (m\ =\ 0, 1, \ldots, n).$$

Como fica evidente, minimizando a Equação (21), a partir das relações acima, pode-se escrever cada um dos coeficientes na forma:

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\, dx, \\ b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, sen\, mx\, dx, (m = 0, 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{22}$$

A partir do uso dos valores obtidos para os coeficientes em $S_n(x)$, e como o valor mínimo do erro é não negativo pode-se escrever para J:

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{v=1}^{m}[a_m^2+b_m^2]\right].$$

Bessel mostrou dessa forma que as somas parciais de uma série de Fourier são limitadas superiormente e, portanto, a série a $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{v=1}^{m}[a_m^2+b_m^2]$ converge. A partir dessa relação é possível obter a Desigualdade de Bessel:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{v=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx. \tag{23}$$

A partir da desigualdade na Equação (23) segue-se a convergência da série constituída pelos quadrados dos coeficientes da série de Fourier, já que a soma parcial das séries positivas do lado esquerdo para todos *n* é maximizada pela integral constante do lado direito (assumindo que a função *f(x)* é quadrado integrável, contudo, essa discussão foge do escopo desse trabalho).

A relação acima, encontrada por Bessel, garante que é válida a importante propriedade "definitiva" dos coeficientes determinados pela aplicação do método dos mínimos quadrados aos polinómios trigonométricos, e que é uma consequência das relações de ortogonalidade para as funções periódicas. Os valores dos coeficientes na Equação (22) permanecem inalterados quando *m* é substituído por *m+1*. Apenas os novos coeficientes a_{m+1}, e b_{m+1} têm de ser calculados. Dutka (1995) destaca que os valores dos coeficientes *a, b,* que resultam da forma definida incialmente para $S_n(x)$, são independentes do número *n*, e que, além disso, o coeficiente pertencente a um termo *cos(mx)* ou *sen(mx)* tem exatamente o mesmo valor, quer se utilize este termo sozinho ou em uma combinação com os demais, na aproximação de *f(x)* de acordo com o mesmo princípio (DUTKA, 1995). Se for feita a melhor aproximação possível a *f(x),* de um único termo cosseno $a_m cos(mx)$, isto é, de modo que:

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-a_m\cos mx]^2dx=Mínimo,$$

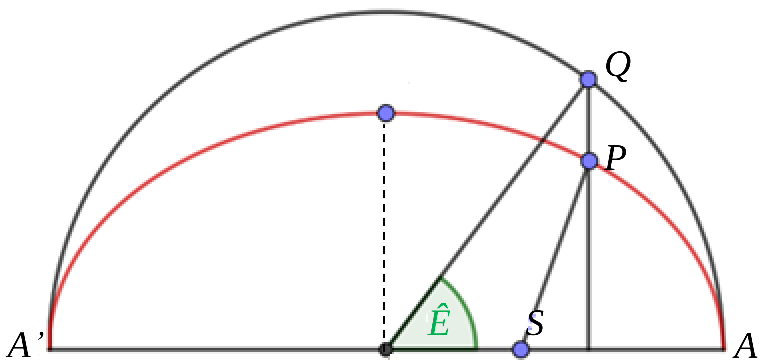
encontra-se para a_m, o mesmo valor que foi deduzido acima na Equação (22). Este fato torna este método de aproximação especialmente conveniente na prática. Se, por exemplo, uma pessoa foi levada a representar uma função por um único múltiplo de *sen(x)*, porque o seu comportamento se assemelhava ao seno, e descobre que a aproximação não é suficientemente próxima, pode-se acrescentar mais termos, sempre de acordo com o princípio dos quadrados mínimos, sem ter de alterar o termo já encontrado. Contudo, não é o escopo desse trabalho discutir essas propriedades detalhadamente.

5.2 FUNÇÕES DE BESSEL

Bessel encontrou pela primeira vez as funções cilindro na sua representação integral em 1818 quando calculou os coeficientes da revolução do vetor do raio de um planeta em uma série trigonométrica. Mais tarde, ele tratou sistematicamente da investigação destas funções, cujos resultados ele apresentou em 1824 em um grande tratado (LAWRINOWICZ, 1995). O conteúdo matemático deste trabalho tornou-se um novo capítulo na teoria das funções cilindro.

Para discutir a origem dessas funções que foram inicialmente introduzidas por Bessel, será retomada brevemente a discussão do problema de Kepler em relação ao movimento planetário, o qual pode ser resumidamente descrito da seguinte forma: Se *P* é um planeta movendo-se em uma elipse com foco *S* no Sol e cujo centro e eixo maior são *C* e *A'A* respectivamente (Figura 6), então o ângulo *ASP* é chamada de anomalia verdadeira do planeta.

Figura 6. Esquema de movimento planetário



Fonte: próprio do autor.

Verifica-se que, em cálculos astronômicos, a verdadeira anomalia não é um ângulo muito conveniente para lidar. Em vez disso, usa-se a anomalia média, *M*, que é definida como 2π vezes a razão entre a área do setor elíptico *ASP* e a área da elipse. Outro ângulo de significância é a anomalia excêntrica, $\hat{E}$, do planeta definido como sendo o ângulo $A\hat{C}Q$ onde Q é o ponto em que a ordenada de *P* encontra o círculo auxiliar da elipse.

Foi demonstrado anteriormente por meio de argumentos geométricos que, se *e* é a excentricidade da elipse, a relação entre a anomalia média e a anomalia excêntrica é expressada pela Equação (5). Dessa forma, *E-M* é uma função periódica que se anula quando o ponto *P* está no periélio ou afélio, ou seja, em múltiplos de π, e pode ser expressa como a série trigonométrica infinita.

Também da Equação (5), é possível constatar que *E-M* é uma função periódica ímpar de *E*. Da mesma forma que para M tem-se $M = -E - e\,sen(-E) = -(E - e\,sen\,E)$, e, portanto, é uma função ímpar. Mais ainda, analisando a derivada para *M* relativo a *E*:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e\,cos\,E \geq 0$$

Que só se anula no afélio e periélio, sendo assim, *M* é uma função ímpar e injetora, o que implica que *E* é também uma função ímpar de *M*. Além disso, ao subtrair duas funções ímpares de *E* e *M*, tem-se uma função de *M* que também é ímpar. Em suma, $f(M) = E - M = e\,sen\,E$ é ímpar. Da série trigonométrica na Equação), tem-se $a_m = 0$, uma vez que esses coeficientes se anulam para funções ímpares.

Da Equação (22), tem-se:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\,sen(mM)\,dM = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e\,sen\,E\,sen(mM)\,dM$$

O problema colocado por Bessel foi, portanto, o de expressar a diferença entre as anomalias média e excêntricas, *E-M*, como uma série de senos de múltiplos da anomalia média, ou seja, o de determinar os coeficientes $b_m(m = 1{,}2\,{,}3, \ldots, n)$, tal que:

$$E - M = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m\,cos\left(\frac{m\pi t}{n}\right) + b_m\,sen\left(\frac{m\pi t}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_m\,sen(mM),$$

Para o caso específico em que *n* é o período, *t* é o tempo, conforme discussão no tópico movimento planetário. Sendo assim,

$$E - M = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e\,sen\,E\,sen(mM)\,dM\right] sen(mM) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\,sen\,E\,sen(mM)\,dM\right] sen(mM).$$

Para obter os valores dos coeficientes b_m de uma maneira mais simples, integra-se a expressão $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\,sen\,E\,sen(mM)\,dM$ por partes, obtendo-se:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\,sen\,E\,sen(mM)\,dM =$$

$$= \left[-\frac{1}{m\pi}\,e\,sen\,E\,cos(mM) + \frac{1}{m\pi}\int cos(mM)(e\,sen\,E)'dM\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} cos(mM)\,(E - M)'dM = \frac{1}{m\pi}\left[\int_0^{\pi} cos(mM)\left(\frac{dE}{dM} - 1\right)dM\right] =$$

$$= \frac{1}{m\pi}\left[\int_0^{\pi} cos(mM)\left(\frac{dE}{dM}\right)dM - \int_0^{\pi} cos(mM)\,dM\right] =$$

$$= \frac{1}{m\pi}\left[\int_0^{\pi} cos(mM)\,dE - 0\right].$$

Portanto, usando a Equação (5), obtêm-se o resultado:

$$b_m = \frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi} cos[\, m(E - e\, sen\, E)]. \tag{24}$$

A integral do lado direito da Equação (24) é a função de *m* e da excentricidade *e* da orbita do planeta, ou seja, Bessel obteve uma função de cilindro do primeiro tipo de ordem *n* (*n* é um número inteiro), assim definida:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos(n\theta - xsen\theta)d\theta; n \in \mathbb{Z}; \tag{25}$$

Segue das Equação (10) e Equação (24) que:

$$E - M = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(en)\frac{sen(nM)}{n}.$$

A função J_n definida na Equação (25) é chamada de coeficiente de ordem *n* de Bessel, o que está de acordo com a expressão para a_n obtida por Lagrange na Equação (13). E de maneira análoga, pode-se obter a expressão para o coeficiente b_n e identificar que também se verifica.

5.3 ENCONTRANDO A EQUAÇÃO DE BESSEL

O estudo das perturbações planetárias exigiu a avaliação da evolução do vetor do raio de um planeta e suas outras coordenadas em séries trigonométricas, mas para realizar esta operação, Bessel precisou calcular integrais da forma da Equação (26), ou seja, uma função de Bessel do primeiro tipo da ordem *h* (*h* é um número inteiro) do argumento *k*.

$$I_k^h = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(hE - k\, sen\, E)dE; \tag{26}$$

Bessel introduziu a designação acima mencionada para ela, mas não lhe deu um nome. Mais tarde Bessel investigou sistematicamente as propriedades das funções I_k^h (na notação atual $J_h(k)$) que ele encontrou anteriormente no estudo do problema de Kepler (LAWRINOWICZ, 1995). Se forem definidos $y = \int_0^{\pi} cos\, n(\theta - xsen\,\theta)d\theta$, depois de uma integração por partes de $\frac{dy}{dx}$, em relação a θ, obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = -n^2y + \frac{n^2}{x}\int_0^{\pi} cos\,\theta\, cos\, n\,(\theta - x\, sin\,\theta)d\theta =$$

$$= -n^2y + \frac{n}{x^2}[sen\, n(\theta - x\, sin\,\theta)\,]_0^{\pi} + \frac{n^2}{x^2}y,$$

que, ao substituir *nx* por *x* fornece a equação diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + n^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0,$$

Para a função $J_h(k)$, ele encontrou o desenvolvimento da série de potências convergentes em todo seu domínio na forma:

$$J_h(k) = \left(\frac{k}{2}\right)^h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2n}$$

De acordo com o próprio Bessel "*Como a maioria dos problemas em astronomia física remonta a tais expansões em série, é desejável um conhecimento mais detalhado dessas integrais", *fica evidente que o interesse particular de Bessel por estas funções decorreu de sua profunda compreensão de sua grande importância nas aplicações (LAWRINOWICZ, 1995). Mas Bessel não se limitou à teoria em seu trabalho, como também forneceu tabelas calculadas das funções $J_0(k)$ e $J_1(k)$ para os valores do argumento *k* de *0,00* a *3,20* com o incremento *0,01*, e deu exemplos do uso das tabelas em cálculos astronômicos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou mostrar que ao percorrer a história das principais ideias matemáticas desenvolvidas por Bessel na forma em que foram descobertas pela primeira vez, é possível tornar mais clara a motivação primordial para elas, o que também mostra, às vezes, em seu traje menos técnico. Estudar a história presente neste trabalho permite perceber que muitas vezes os resultados da matemática aplicada influenciam a matemática pura, e vice-versa. Ao estudar funções que apareceram em um problema prático, Bessel fez descobertas fundamentais acerca das propriedades matemáticas dessas funções, que por sua vez, conduziram a novas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Por outro lado, as observações de Bessel relativo a 61 Cygni e ao movimento planetário não só exigiam tecnologia especializada para produzir os instrumentos científicos adequados, como também pressupunham a matemática originada anteriormente como instrumento poderoso na análise de informação. São exemplos disso a teoria newtoniana, as leis de Kepler, o método dos mínimos quadrados de Gauss etc.

Espera-se que por meio deste trabalho, examinando como os conceitos foram evoluindo e sendo construídos, seja possível chegar a uma compreensão desses conceitos. Contudo, principalmente quando se trata da história da Matemática, percebe-se que ela não é esculpida em mármore. Informações divergentes, principalmente no que se refere a datas, notações que se transformam ao longo do tempo, falta de rigor e formalismo nas demonstrações são alguns percalços que o aluno que pretende estudar a história da Matemática precisa superar na busca por entender como um conceito mais elaborado e complexo veio a ser o que é agora, o que não foi diferente no estudo das funções de Bessel.

De qualquer maneira, é parte do sentido de beleza que se enxerga na matemática a forma como diversas etapas na construção desses conceitos é dada a partir da contribuição de diversos matemáticos que viveram anteriormente, nomes famosos vão aparecendo atrelados a história da Função de Bessel, o que desperta ainda mais o interesse pelo assunto, e reforça a admiração por esses matemáticos.

7 REFERÊNCIAS

BARICZ, A. **Generalized Bessel functions of the first kind**. New York: Springer Berlin, Heidelberg, 2010. 200 p.

BATTIN, R. H. **Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics**. Revised, Subsequent edition. AIAA - American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000. 799 p.

BOTTAZZINI, U. **Lagrange et Le Problème de Kepler**. Revue d'Histoire Des Sciences, vol. 42, no. 1, 1989, pp. 27–42, 10.3406/rhs.1989.4133.

BOTTAZZINI, U., GRAY, J. **Hidden harmony-geometric fantasies: the rise of complex function theory**. New York: Springer, 2016. 1576 p.

CARRIER, M., LENHARD, J. **Mathematics as a Tool: Tracing New Roles of Mathematics in the Sciences**. Springer, 2017. 286 p.

CASSELMAN, B. **Planetary motion and Kepler's equation**. Essays on mathematical astronomy. University of British Columbia, 2018.

COLWELL, P. **Bessel Functions and Kepler's Equation**. The American Mathematical Monthly, v. 99, n. 1, p. 45-48, jan. 1992.

COLWELL, P. **Solving Kepler's equation over three centuries**. Willmann-Bell, 1993. p. 212.

DAVIS, A. E. L. **The Mathematics of the Area Law: Kepler's Successful Proof in Epitome Astronomiae Copernicanae (1621**). Archive for History of Exact Sciences, v. 57, n. 5, p. 355–393, jul. 2003.

DESCAMPS, P. **The Discovery of Neptune: Between Success and Failure**. Revue d'histoire des sciences, 2015/1 (Volume 68), p. 47-79. DOI: 10.3917/rhs.681.0047. URL: https://www.cairn-int.info/journal-revue-d-histoire-des-sciences-2015-1-page-47.htm.

DUTKA, J. **On the early history of Bessel functions**. Arch. Hist. Exact Sci. 49, 105–134, 1995. https://doi.org/10.1007/BF00376544.

FLORIAN CAJORI**. A history of mathematics**. Providence, R.I.: Ams Chelsea, 1999.

GRATTAN-GUINNESS, I. **Joseph Fourier and the Revolution in Mathematical**

Physics. IMA Journal of Applied Mathematics, v. 5, n. 2, p. 230–253, 1969. https://doi.org/10.1093/imamat/5.2.230.

GRAY, A; MATHEWS, G. B; MACROBERT, T. M. **A treatise on Bessel functions and their applications to physics**. 2° Edição. New York: Dover Publications, 1966. p.327.

HERSCHEL, J. F. W. **A brief notice of the life, research, and discoveries of Friedrich Wilhelm Bessel.** George Barclay, 1847. p.16.

HIRSHFELD, A. W. **Parallax: the race to measure the cosmos**. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2013.

HOLBERG, J. B. The Discovery of the Existence of White Dwarf Stars: 1862 to 1930. **Journal for the History of Astronomy**, v. 40, n. 2, p. 137–154, 2009.

HOLZMANN, H. A; DALLAMUTA, J. Coleção desafios das engenharias: **Engenharia mecânica 2**. 1ª Edição. Ponta Grossa – Paraná: Atena Editora, 2021. p.140.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from a Higher Standpoint Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis**. Verlag: Berlin, Heidelberg Springer, 2016. p.332.

KLINE, M. **Mathematical thought from ancient to modern times. Volume 3**. USA, Oxford University Press, 1990. p.390.

LAWRINOWICZ, K. Friedrich Wilhelm Bessel 1784–1846. Springer-Verlag, 1995.

SIMMONS, G. F. **Differential equations with applications and historical notes.** Boca Raton: Chapman & Hall Crc, 2017.

SMITH, D. E. **History Of Modern Mathematics**. S.L.: Createspace Independent P, 2014.

WATSON, G. N. **A treatise on the theory of Bessel functions**. 2° Edição. Cambridge: Cambridge University Press, 1966. p.814.

WILLIAMS, M. E. W. **Attempts to measure annual stellar parallax: Hooke to Bessel**. Spiral Imperial a.c. UK, 1981.