

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

LUIS GUILHERME INGLESE GAGLIARDI

**UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS E MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AOS
UNIVERSOS DE FRIEDMANN**

Sorocaba

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

LUIS GUILHERME INGLESE GAGLIARDI

**UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AOS UNIVERSOS DE
FRIEDMANN**

Monografia apresentada ao Departamento
de Física, Química e Matemática da
Universidade Federal de São Carlos –
Campus Sorocaba, para obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

Orientação: Prof.^a Dra. Graciele P. Silveira.

Sorocaba

2019

INGLESE GAGLIARDI, LUIS GUILHERME

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E
MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS AOS UNIVERSOS DE
FRIEDMANN / LUIS GUILHERME INGLESE GAGLIARDI. -- 2019.

111 f. : 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal de São
Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: GRACIELE P. SILVEIRA

Banca examinadora: GERALDO POMPEU JÚNIOR, RAPHAEL DE
OLIVEIRA GARCIA

Bibliografia

1. EQUAÇÕES DE FRIEDMANN. 2. COSMOLOGIA. 3.
MODELAGEM MATEMÁTICA. I. Orientador. II. Universidade Federal de
São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979



FOLHA DE APROVAÇÃO

LUIS GUILHERME INGLESE GAGLIARDI

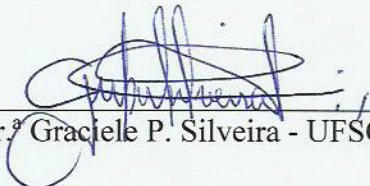
UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E
MODELAGEM MATEMÁTICA
APLICADAS AOS UNIVERSOS DE FRIEDMANN

Trabalho de Conclusão de Curso

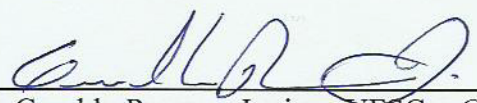
Universidade Federal de São Carlos - *Campus Sorocaba*

Sorocaba, 05/12/2019.

Orientadora


Prof.^a Dr.^a Graciele P. Silveira - UFSCar *Campus Sorocaba*

Examinador


Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior - UFSCar *Campus Sorocaba*

Examinador


Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia - UNIFESP *Campus Osasco*

*Dedico esta realização a minha avó Maria
de Lourdes e ao meu irmão José Victor por
todo apoio, incentivo e confiança.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço profundamente à minha avó Maria de Lourdes Inglese e ao meu irmão José Victor Inglese Gagliardi por sempre me apoiarem e me incentivarem a buscar novos conhecimentos, como também por sempre estarem presentes nos momentos mais sinuosos de minha jornada como estudante e como pessoa, apesar das minhas ausências.

Agradeço a minha orientadora Prof. Graciele P. Silveira por toda preocupação, auxílio e paciência tanto durante a redação deste trabalho como durante a iniciação científica e também nas disciplinas nas quais tive o prazer de ter como professora. Agradeço imensamente também por todo carinho e pelo auxílio fora do âmbito acadêmico, pois no momento em que mais precisei esteve presente para me amparar, tanto na minha mudança de endereço como para a aquisição da bolsa de pesquisa de IC.

Agradeço aos meus professores por todas as lições e conhecimentos transmitidos. Em especial, aos professores Sílvia Maria Simões de Carvalho, Renato Fernandes Cantão, Geraldo Pompeu Júnior e ao Raphael de Oliveira Garcia por acreditarem em mim e por todos os ensinamentos e lições dentro e fora de sala de aula que contribuíram na minha formação acadêmica, de caráter, e social.

Agradeço aos meus colegas de turma e a todos os amigos que adquiri na universidade e em decorrência desta, pois se tornaram muito importantes para mim. Agradeço principalmente a Luciana Oliveira Rosa de Almeida Barros e ao José Carlos de Almeida Barros, pois sempre me ajudaram nos momentos em que mais precisei e por todo apoio, incentivo, confiança e pelos sábios conselhos que me presentearam desde o início do curso. Aos grandes amigos, Cícero Inácio, José Reis de Almeida, Carlos Moraes de Freitas Junior, Júlia Mayumi Uno, Gabriela Pimenta, Beatriz Von Simonyi, Kelvin Massayoshi Masuyama por todo companheirismo e pelos momentos que levarei para toda a vida.

Agradeço a todos meus amigos de república, pelo companheirismo e por todas as histórias que passamos juntos nessa longa jornada da graduação.

Por fim, agradeço a instituição UFSCar – Campus Sorocaba por ter me dado a chance e todas as ferramentas que me permitiram chegar hoje ao final desse ciclo.

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso possui como tema o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e a modelagem matemática aplicadas na solução da Equação de Friedmann em suas versões: Plano, Aberto e Fechado, do problema cosmológico famoso conhecido como as Equações de Friedmann. Os conceitos e as etapas do processo de modelagem são apresentados e discutidos, e por se tratar de um assunto cosmológico, serão abordadas as principais teorias desenvolvidas na cosmologia no século XX. Os métodos matemáticos escolhidos se dividem em duas categorias, os métodos analíticos das Equações Separáveis e Equação de Bernoulli para solução do Friedmann Plano; e os métodos numéricos de Runge-Kutta de graus 1, 2 e 4 foram os instrumentos utilizados para se obter a solução da Equação de Friedmann Plano, Aberto e Fechado uma vez que são ferramentas úteis no processo de modelagem matemática e permitem a realização de discussões e previsões acerca do fenômeno de estudo. Os resultados obtidos nos informam as soluções analíticas e numéricas da Equação de Friedmann Plano, juntamente com o erro cometido pelos métodos numéricos quando comparados com a solução analítica. Como também as soluções numéricas para as Equações de Friedmann Aberto e Fechado. Por fim, o gráfico de ambas as soluções para as Equações de Friedmann foram construídas e condizem com a referência base adotada consolidando assim os resultados obtidos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, modelagem matemática, cosmologia, Equações de Friedmann.

ABSTRACT

The present Course Conclusion Paper has as its subject the study of Ordinary Differential Equations and Mathematical Modeling Applied to the Friedmann Equation Solution in its versions: Plan, Open and Closed, of the cosmological problem known as Friedmann Equations. The concepts and stages of the modeling process are presented and discussed, and because they are a cosmological subject, they are approached as the main theories applied in cosmology in the nineteenth century. The mathematical methods chosen are divided into two categories, the analytical methods of the Separable Equations and Bernoulli's Equation for Friedmann Plane solution; and the Runge-Kutta numerical methods of 1st, 2nd and 4th order were the instruments used to obtain a solution of the Friedmann Plan, Open and Closed once, which are useful tools in the process of mathematical modeling and analysis execution. discuss about the phenomenon of study. The results obtained inform us as analytical and numerical solutions of the Friedmann Plane Equation, included with the error made by numerical methods when compared with an analytical solution. As well as numerical solutions for Friedmann Open and Closed Equations. Finally, the properties and solutions graph for Friedmann's equations were constructed and conducted with a reference base adopted, consolidating the obtained results.

Key-words: Ordinary Differential Equations, mathematical modeling, cosmology, Friedmann Equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Comprimento de onda e espectro luminoso.....	23
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Erro máximo dos métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem.....	91
Tabela 2 - Diferença entre o erro dos métodos numéricos para Friedmann Plano.....	92

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Método de Euler de passo simples.....	49
Gráfico 2 – Solução numérica e analítica do PVI.	54
Gráfico 3 – Erro absoluto cometido ponto a ponto.	54
Gráfico 4 – Solução do método de Euler e solução analítica.	56
Gráfico 5 – Erro cometido pelo método de Euler.....	57
Gráfico 6 – Solução numérica e analítica para $h = 0,5$	57
Gráfico 7 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,5$	58
Gráfico 8 – Solução numérica e analítica pelo método de Euler para $h = 0,25$	58
Gráfico 9 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,25$	59
Gráfico 10 – Soluções numéricas e analíticas para $h = 0,1$	59
Gráfico 11 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,1$	60
Gráfico 12 - Método de Heun (Runge-Kutta de 2ª ordem).	61
Gráfico 13 - Solução numérica e analítica do PVI.	63
Gráfico 14 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.	64
Gráfico 15- Solução numérica e analítica do PVI.	65
Gráfico 16 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.	65
Gráfico 17 - Solução numérica e analítica do PVI.	66
Gráfico 18 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.	66
Gráfico 19 - Solução numérica e analítica do PVI.	67
Gráfico 20 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.	67
Gráfico 21 – Curvas da solução analítica e numérica para Friedmann Plano com $h = 1,39$	82
Gráfico 22 – Erro cometido ponto a ponto pelo método de Euler para $h = 1,39$	83
Gráfico 23– Solução analítica e numérica para Friedmann Plano com $h = 0,139$	83
Gráfico 24– Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,139$	84
Gráfico 25 – Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$	84
Gráfico 26 – Erro do método de Euler para $h = 0,0139$	85
Gráfico 27 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 1,39$	85
Gráfico 28 - Erro do método de Heun para $h = 1,39$	86
Gráfico 29 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,139$	86
Gráfico 30 - Erro do método de Heun para $h = 0,139$	87
Gráfico 31 – Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$	87
Gráfico 32 - Erro do método de Heun para $h = 0,0139$	88
Gráfico 33 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 1,39$	88
Gráfico 34 - Erro do método de Runge-Kutta para $h = 1,39$	89
Gráfico 35 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,139$	89
Gráfico 36 - Erro do método para $h = 0,139$	90
Gráfico 37 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$	90
Gráfico 38 - Erro do método de Runge-Kutta para $h = 0,0139$	91
Gráfico 39 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$	93
Gráfico 40 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$	94
Gráfico 41 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$	95
Gráfico 42 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$	96

Gráfico 43 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$	97
Gráfico 44 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$	98
Gráfico 45 – Solução numérica pelo método de Heun para Friedmann Plano, Aberto e Fechado.....	98
Gráfico 46– Gráficos das soluções das Equações de Friedmann.	99

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA	14
2.	MODELAGEM MATEMÁTICA ATRELADA A EDO's	17
3.	INTRODUÇÃO AOS MODELOS COSMOLÓGICOS	21
3.1.	COSMOLOGIA E METODOLOGIA CIENTÍFICA	21
3.2.	EDWIN HUBBLE E A EXPANSÃO DO UNIVERSO	23
3.3.	A TEORIA DO BIG BANG	28
3.4.	MODELOS DE UNIVERSO	31
4.	MÉTODOS MATEMÁTICOS	36
4.1.	TÉCNICAS ANALÍTICAS PARA SOLUÇÕES DE EDO'S	36
4.1.1.	MÉTODO DAS EQUAÇÕES SEPARÁVEIS	36
4.1.2.	MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE.....	41
4.1.3.	EQUAÇÃO DE BERNOULLI	44
4.2.	TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA SOLUÇÕES DE EDO'S.....	48
4.2.1.	MÉTODO DE EULER.....	48
4.2.2.	MÉTODO DE HEUN (EULER APERFEIÇOADO).....	60
4.2.3.	FORMA GERAL DOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA	69
5.	APLICAÇÃO NAS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN.....	75
5.1.	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FRIEDMANN PLANO.....	77
5.1.1.	EQUAÇÕES SEPARÁVEIS	77
5.1.2.	MÉTODO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI.....	78
5.2.	SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN PLANO	80
5.2.1.	MÉTODO DE EULER.....	82
5.2.2.	MÉTODO DE HEUN	85
5.2.3.	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM	88
5.3.	SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN ABERTO	92
5.3.1.	MÉTODO DE EULER.....	93
5.3.2.	MÉTODO DE HEUN	94
5.3.3.	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM	94
5.4.	SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN FECHADO	95
5.4.1.	MÉTODO DE EULER.....	96
5.4.2.	MÉTODO DE HEUN	97
5.4.3.	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM	97
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103

1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O objeto de estudo abordado neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) consistiu em estudar e compreender as teorias e formulações das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), assim como o processo de modelagem matemática, para que posteriormente se aplicassem os conhecimentos adquiridos em um problema cosmológico conhecido como as Equações de Friedmann.

O motivo pela escolha deste tema se deu pela grande curiosidade acerca dos astros e do universo, juntamente com o interesse pela matemática. Por este motivo a cosmologia se apresentou como a mais interessante dentre os demais ramos de estudo. A linha de pesquisa foi definida durante a realização de uma iniciação científica, onde buscou-se contemplar uma vasta gama de assuntos físicos e matemáticos. Por se tratar de um tema relativamente distante da graduação, e pela necessidade de teorias complexas e elaboradas, os estudos se iniciaram a partir de uma Iniciação Científica (agosto de 2017 à março de 2018) e foram então finalizados neste TCC.

Concomitante com os estudos matemáticos foram estudadas as principais teorias físicas relacionadas ao ramo da cosmologia, juntamente com seu contexto histórico buscando entender a linha de raciocínio empregada na postulação das teorias apresentadas. Dentre estas podemos destacar os estudos realizados por grandes pesquisadores e influenciadores como Isaac Newton, Albert Einstein, George Gamow, Edwin Hubble, Willem de Sitter e Alexander Friedmann.

A principal referência bibliográfica adotada para a elaboração da teoria descrita nesse TCC foi Viglioni e Soares (2011), porém foram realizadas diversas outras pesquisas assim como Soares (2009) e Goto (2019) de modo a obter um maior aprofundamento e conhecimento para amparar o desenvolvimento do tema uma vez que realizam as discussões pertinentes acerca da cosmologia e sua evolução, como também um viés matemático, pois obtém as soluções para as Equações de Friedmann a partir as manipulações das equações da Relatividade Geral por métodos analíticos, fornecendo os mesmos resultados dos obtidos neste TCC pelos métodos numéricos, o que corrobora com a veracidade dos fatos.

Assim, tomam-se como objetivos específicos:

- Pesquisar sobre o processo de modelagem matemática e as principais teorias cosmológicas do século XX.

- Estudar os métodos analíticos para resoluções de EDO's.
- Compreender os métodos numéricos do tipo Runge-Kutta para soluções de EDO's.
- Aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução das equações de Friedmann.

De modo a facilitar a compreensão deste trabalho, considera-se que o leitor possua conhecimentos prévios acerca do Cálculo Diferencial e Integral e do Cálculo Numérico. O Capítulo 2 foi destinado à abordagem dos conceitos da modelagem matemática bem como as etapas atreladas ao seu processo, ressaltando a importância e a necessidade do estudo das equações diferenciais para a obtenção dos resultados acerca do fenômeno estudado. Por último foi realizada a discussão em relação ao tratamento do erro cometido, para que se possa obter dados mais consistentes e pertinentes ao fenômeno real.

No Capítulo 3 há uma breve abordagem sobre a natureza da ciência, e da pesquisa científica uma vez que existe a discussão no âmbito acadêmico sobre a cosmologia ser ou não considerada uma ciência. Na sequência, são apresentadas as principais teorias cosmológicas do século XX, partindo dos princípios propostos por Edwin Hubble sobre a expansão do universo, realizados a partir da luz emitida pelos cosmos. Como consequência do conceito de um universo em expansão, é intuitivo pensar em momento inicial para o universo e, por este motivo surge a necessidade da discussão do modelo mais famoso sobre a origem do universo, o Big Bang.

Por fim, são apresentados os modelos de universo e sua construção histórica, nos quais podemos observar a evolução dos pensamentos empregados em cada período, com destaque para as teorias relativísticas estabelecidas por Albert Einstein, bem como os modelos cosmológicos propostos por Alexander Friedmann.

No capítulo 4 foram desenvolvidas as teorias matemáticas para resoluções de EDO's que consistem nos métodos analíticos do Fator Integrante, Equações Separáveis e a Equação de Bernoulli, como também os métodos numéricos de Runge-Kutta, com destaque para os casos do método de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Os métodos matemáticos estudados foram grande utilidade para a compreensão do Capítulo 5 onde será demonstrado a solução para a Equação do Friedmann em suas versões: Plano, Aberto e Fechado para que posteriormente se realizasse a comparação entre os métodos utilizados como também a interpretação física dos resultados recolhidos.

No Capítulo 6 é descrito o levantamento dos resultados obtidos para que se realizassem as considerações finais. Por fim são apresentadas as Referências utilizadas para a elaboração deste TCC.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA ATRELADA A EDO's

A ciência é uma atividade inerente ao ser humano, que almeja compreender a natureza por meio de teorias e postulados; ainda que, a natureza continue existindo e funcionando independente das teorias científicas, o homem utiliza de suas teorias para prosseguir em seus desenvolvimentos de modo que possibilitam num futuro tomar decisões e agir corretamente sobre o fenômeno estudado.

A modelagem matemática é uma área do conhecimento científico responsável pelo estudo da simulação de fenômenos reais com a finalidade de descrever e prever seus comportamentos. Ou seja, a modelagem matemática consiste na arte de descrever um fenômeno natural utilizando da matemática como sua principal ferramenta.

Neste contexto, Bassanezi (2012, p. 16) destaca que:

[...] A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Esta forma de se abordar a matemática pode seguir um viés voltado para a pesquisa e construção acadêmica como um método científico, como também uma estratégia facilitadora de docência para o processo de ensino aprendizagem. Em sua essência, a modelagem matemática pressupõe a multidisciplinaridade e, nesse sentido, acompanha as novas tendências pedagógicas no que diz respeito à unificação dos diversos ramos do saber.

Pensar na modelagem matemática é pensar num processo cognitivo buscando a unificação entre a teoria e a prática, motivando e encorajando o pesquisador na busca pela compreensão da realidade e de formas de se atuar sobre ela. Neste trabalho realizaremos a abordagem da modelagem matemática como viés de pesquisa científica. Desse modo, Bassanezi (2012, p.7) destaca seis etapas essenciais para a elaboração e validação de um modelo matemático para representação de um determinado fenômeno físico/social. A primeira etapa para a elaboração de um modelo matemático consiste no processo de **experimentação**, no qual são realizadas as primeiras obtenções de dados de interesse por meio de processos experimentais ou empíricos que contribuam para a compreensão e

validação do problema. Essa é uma atividade puramente laboratorial e de levantamento estatístico.

Após a coleta de dados, surge à necessidade do processo de determinação e seleção das variáveis de interesse e a formação da linguagem para se tratar do problema real, essa etapa pode ser caracterizada como a **abstração** do problema. Na etapa de **resolução**, ocorre à transcrição da linguagem natural do problema para uma linguagem matemática, essa transcrição é realizada por meio do estabelecimento de um modelo matemático. Esse modelo pode seguir um caráter analítico ou numérico, dependendo da sua complexidade de abordagem. Outra possibilidade também pode ocorrer, quando a teoria matemática necessária para a construção e compreensão do modelo não exista. Nesta conjuntura, uma possibilidade é a do desenvolvimento de um novo ramo de estudo assim como realizado no final do século XVII por I. Newton (1642 – 1727) e G. W. Leibniz (1646 – 1716) na elaboração dos conceitos e definições do Cálculo Diferencial e Integral e mais recentemente pelos trabalhos realizados por J. Von Neumann (1903 – 1957) no ramo da teoria dos jogos, para modelar situações de competição econômica. Entretanto, esta não é uma tarefa corriqueira na elaboração de um TCC, portanto uma alternativa mais viável seja a construção/desenvolvimento de um modelo dentro de uma teoria matemática já desenvolvida e ratificada.

Na etapa de **validação**, os resultados obtidos por meio da resolução do modelo matemático são confrontados com os valores dos dados reais do problema. A aproximação obtida é fator crucial a se preponderar sobre a aceitação ou não do modelo construído. Caso esta não seja pertinente, inicia-se a etapa de **modificação**, em que as variáveis e/ou lei de formação são reconsideradas e conseqüentemente o modelo inicial é alterado. Por fim, ocorre a etapa da **aplicação**, no qual já se estabeleceu o modelo matemático e com isso, torna-se possível a compreensão, descrição e a realização de previsões acerca do fenômeno. Ou seja, a capacidade de se intermediar diretamente ou indiretamente no objeto de estudo.

Dentre as diversas formas e métodos de descrever um fenômeno físico, têm-se a modelagem matemática por meio de Equações Diferenciais, visto que o comportamento do mundo físico é regido, muitas vezes, por relações envolvendo taxas de variações de determinadas grandezas. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais. No estudo matemático, tais relações podem ser equacionadas e as taxas de variações representadas com a utilização de derivadas e, nesse contexto surgem à

necessidade do uso de equações que contêm derivadas, ou seja, ao procurarmos pela solução do problema físico, buscamos pela solução da Equação Diferencial.

As Equações Diferenciais são classificadas em duas categorias cujas diferenças consistem em saber se a função desconhecida que modela o fenômeno é dependente de uma única variável independente ou de mais de uma variável independente. No primeiro caso, surgem nas equações diferenciais apenas derivadas simples e, portanto, é dita uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). No segundo caso, as derivadas que aparecem são derivadas parciais (isto é, envolvem funções com duas ou mais variáveis) e, portanto, a equação é dita Equação Diferencial Parcial (EDP).

Assim, o desenvolvimento das Equações Diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da Matemática e não pode ser de forma alguma separado dela (BOYCE e DIPRIMA, 2010). Neste sentido, apesar das equações diferenciais parciais abrangerem um ramo muito maior de problemas reais, o foco de estudo no decorrer da pesquisa se deu exclusivamente às Equações Diferenciais Ordinárias, uma vez que fazem parte da ementa do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba.

Na busca pela solução de uma Equação Diferencial, surge a necessidade do estudo acerca da existência e unicidade ou não da solução do problema, como também a metodologia necessária para se obtê-la. Neste sentido, podemos dividir a solução em duas categorias, a primeira no qual procuramos a solução exata ou analítica da equação e a segunda na qual procuramos por uma solução aproximada.

A metodologia científica analítica, iniciada a partir das contribuições de grandes mentes como Galileu Galilei (1564 – 1642), consiste em restringir e isolar o campo de estudo apropriadamente, de modo que o problema seja tratável e mantenha sua relevância. Ao considerarmos as características do fenômeno, recaímos geralmente, em expressões matemáticas extremamente complicadas e em muitos casos, a solução analítica é impossível. Uma alternativa para se obter a solução do problema é tentar simplificar suas hipóteses, ou seja, ignorar dados que de alguma forma possam ser considerados menos relevantes ao objeto de estudo, tornando o problema inicial mais simples, afim de que a solução analítica seja possível.

Por outro lado, a obtenção de soluções aproximadas explícitas, em termos de funções elementares e suas integrais para problemas gerais apresentaram-se como um grande desafio no decorrer da história da matemática. Uma alternativa para contornar este problema foi desenvolvida pela primeira vez pelo exímio matemático e físico Leonhard

Paul Euler (1707 – 1783) a partir de seus estudos com seus colegas e professores Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Johann Bernoulli (1667 – 1748), Nicolau Bernoulli (1695 – 1726) e Jacques Bernoulli (1655 – 1705). Euler apresentou uma abordagem numérica acerca das soluções das Equações Diferenciais, em sua primeira instância a aproximação fornecida era obtida por meio de um processo geométrico iterativo com a construção de retas poligonais.

Com o auxílio das teorias acerca das séries de potências, Euler desenvolve uma segunda abordagem acerca das aproximações das soluções diferenciais no qual utiliza de polinômios para a análise de convergência dos resultados. Este método, entretanto, foi atribuído a outro matemático, Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917) responsável pela sua generalização. Apesar dos fundamentos necessários para o desenvolvimento do Cálculo ainda não estarem completamente estabelecidos, não havia dúvida que esta teoria era essencialmente correta. Era inevitável, portanto que os esforços se voltassem para se obter e esclarecer fundamentos teóricos do Cálculo e procurar outros métodos de estudo das Equações Diferenciais que não a sua solução explícita.

É importante destacar que em ambos os casos, tanto para as soluções analíticas quanto as soluções numéricas, podem ocorrer erros na solução obtida, advindos da observação/simplificação ou do método utilizado. Assim, a busca pelo referencial teórico é fundamental para que se possam minimizar os erros obtidos e justificá-los, tendo em mente que mesmo não sendo possível obter sempre soluções exatas, todo o procedimento envolvido em tal busca proporciona grande aprendizado e possibilidades de se aferir conclusões.

No que concerne ao estudo da física, em especial a cosmologia, a maior dificuldade encontrada durante a modelagem de um fenômeno é o fato da generalização, uma vez que estender os conhecimentos oriundos de uma pequena região do universo para o universo como um todo não é uma tarefa trivial.

3. INTRODUÇÃO AOS MODELOS COSMOLÓGICOS

Os modelos cosmológicos utilizados como referência para o desenvolvimento desse trabalho contemplam hipóteses que nos remetem ao início do próprio universo a partir do Big Bang e seu desenvolvimento até os tempos atuais, conforme os modelos expansionistas de Friedmann. A evolução do pensamento científico é algo a se destacar, pois a medida que hipóteses são testadas, novos modelos e teorias são desenvolvidos. Seria impossível considerarmos nesse TCC todos os modelos cosmológicos relativos à origem e formação dos cosmos, por este motivo vamos considerar as principais hipóteses desenvolvidas no século XX.

3.1. COSMOLOGIA E METODOLOGIA CIENTÍFICA

A ciência assim como tudo na natureza está sujeita a evoluir e neste sentido, suas definições, hipóteses e teorias devem se ajustar de acordo com as novas evidências e descobertas. De acordo com uma visão mais tradicional, a ciência apresenta toda a forma de conhecimento obtido por meio de estudos ou da reprodução, baseando-se em determinados princípios. De modo geral, a ciência é constituída a partir da união de diversos saberes, nos quais são propostas e elaboradas suas teorias, baseadas em suas próprias metodologias científicas. Assim, toda a forma de conhecimento fundamentada pela ciência tem como princípio a possibilidade de experimentos reproduzíveis (ABRAMO, 2019).

O conhecimento e a produção científica têm por sua essência, um conjunto de leis e postulados que possibilitam prever, explicar e descrever determinados fenômenos recorrentes na natureza, em quaisquer situações. Desta forma, em situações semelhantes e controladas, o resultado de determinada experiência deve ser equivalente independentemente do local em que a prática seja realizada.

Por outro lado, de acordo com as definições de ciência obtidas na literatura atualmente, ciência é todo o conhecimento oriundo do estudo, observação ou prática, baseando-se em determinados princípios. De acordo com a etimologia da palavra derivada do latim *scientia*, seu significado é *conhecimento* ou *saber*. Assim, surge a discussão de a ciência ser embasada por conceitos reproduzíveis ou não.

Podemos destacar o caso da astronomia, em específico a cosmologia. A rigor, de acordo com o conceito de ciência mais tradicional, a cosmologia não é considerada uma

ciência, uma vez que seu objeto de estudo não pode ser reproduzido em condições controladas, ou até mesmo manipulado, nem as circunstâncias de seu surgimento e as ocorrências de sua evolução podem ser reproduzidas. Os estudos relacionados aos cosmos se dão estritamente pela observação de fenômenos físicos ocorridos, e pelas hipóteses acerca de seu surgimento, evolução, juntamente com os motivos para tais desenvolvimentos.

Um grande exemplo que podemos destacar em relação ao fato da cosmologia ser, ou não, considerada ciência é que em meados da década de 1970 uma prestigiada revista científica alemã *Zeitschrift für Physik* se recusava a publicar qualquer artigo relacionado à cosmologia uma vez que havia um princípio de ciência mais conservadora na época. Entretanto, atualmente essa é considerada uma revista de referência para físicos e matemáticos, especialmente em relação aos estudos acerca da cosmologia e da física de partículas (FLEMING, 2004).

Na cosmologia, não podemos investigar hipóteses e modelos cosmológicos experimentalmente, mas contamos com uma farta abundância de eventos muito semelhantes. A cosmologia é, portanto, uma *pseudociência* apesar de não poder prever o resultado de nenhum experimento, é baseada na confirmação de leis e hipóteses por meio de um número consideravelmente significativo de observações.

Assim como a cosmologia, outra área com um viés de estudo muito semelhante em diversos aspectos é a geologia, uma vez que realiza a abordagem sob as condições nas quais o planeta Terra se originou, estruturou e evoluiu até o estágio atual, sua composição química e sua geomorfologia são fatos consumados, irreproduzíveis num ambiente experimental (ABRAMO, 2019). Os geólogos foram responsáveis por formular um conjunto de teorias e princípios que explicam o estado atual do planeta bem como sua origem e evolução, para isso, seus estudos se deram essencialmente pela observação e coleta de dados a partir dos registros fósseis que temos disponíveis.

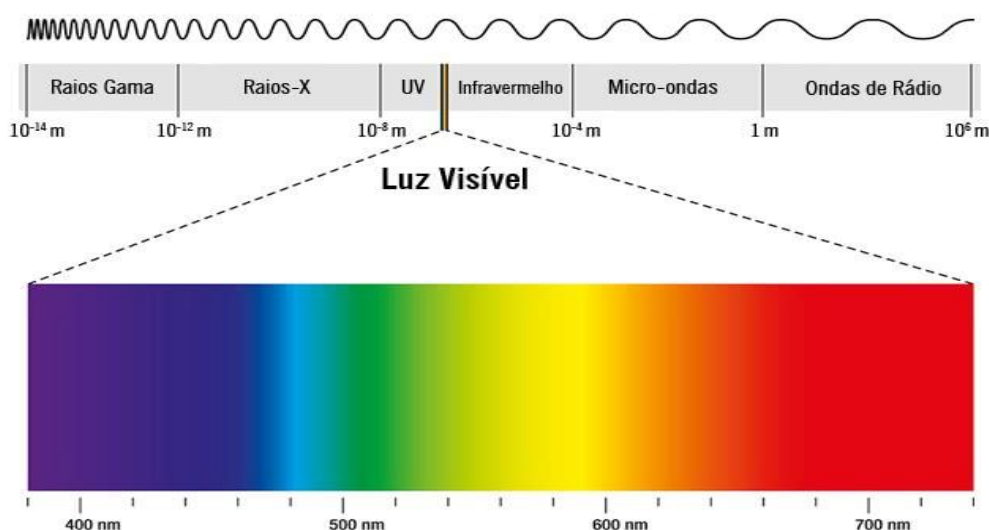
Sendo assim, a cosmologia é considerada a ciência que estuda os fenômenos físicos em grandes proporções, especialmente em escala cósmica e é considerada como um ramo da astronomia na qual se preocupa com a origem, estrutura e evolução do universo e seus cosmos. Ao nos referirmos sobre o termo cosmologia, utilizamos com o sentido mais restrito, compreendendo a cosmologia científica, como uma componente da astronomia que utiliza modelos físicos e matemáticos para estudar o universo em larga escala (HENRIQUE e SILVA, 2019).

3.2. EDWIN HUBBLE E A EXPANSÃO DO UNIVERSO

Ao olharmos para o céu em uma noite estrelada, a luz emitida pelas estrelas que chega até nós, passou na maioria dos casos dezenas de milhares de anos ou até mesmo bilhões de anos se propagando no espaço até que se pudéssemos observá-la. Assim, podemos pensar que quanto maior a distância da estrela até o nosso planeta, maior será seu tempo de propagação no espaço. Sendo assim, quando observarmos uma determinada estrela distante, estamos na realidade olhando para seu passado.

De acordo com muitos pesquisadores, assim como Abramo (2019), a Cosmologia moderna nasceu em 1926 a partir das observações de Edwin Powell Hubble (1889 – 1953) que podem ter revelado a origem e destino dos cosmos. Hubble notou que as galáxias mais afastadas estão se distanciando da nossa galáxia, com uma velocidade de recessão proporcional à sua distância. Os estudos de Hubble consistiram em sua essência nas observações da luz emitida pelos cosmos. Como atualmente é de nosso conhecimento, a luz é considerada uma onda na qual pode ser decomposta em relação ao seu espectro luminoso com cada onda possuindo um comprimento com sua respectiva cor. A cor azul, por exemplo, possui um comprimento de onda menor ao comparado com a cor vermelha que possui um comprimento de onda mais longo.

Figura 1 - Comprimento de onda e espectro luminoso.



Fonte: [HTTPS://www.todamateria.com.br/espectro-eletromagnetico/](https://www.todamateria.com.br/espectro-eletromagnetico/)

Porém, quando um corpo está em movimento é possível observar uma alteração no seu comprimento de onda, alterando assim sua cor. Se uma galáxia estiver se aproximando da nossa, as ondas emitidas são comprimidas fazendo com que sua coloração tenda ao azul, entretanto, se a galáxia estiver se afastando, o comprimento de luz emitida aumenta tornando sua coloração mais avermelhada. Este fenômeno é conhecido como efeito Doppler relativístico e, a partir dele os astrônomos são capazes de descobrir se um objeto está se afastando ou se aproximando de nós.

O nome Efeito Doppler é uma referência ao físico austríaco Christian Johann Doppler (1803 – 1853) que estudou e descreveu esse fenômeno. Doppler publicou seus resultados acerca deste fenômeno em 1842 e constatou que a frequência do som depende do movimento relativo entre a fonte de emissão do som e o observador receptor, e pode ser enunciado da seguinte maneira, *“O Efeito Doppler é a alteração da frequência sonora percebida pelo observador em virtude do movimento relativo de aproximação ou afastamento entre a fonte e esse observador”* (Sears *et al*, 2009) Um exemplo análogo ao ocorrido entre os cosmos e mais próximo à nossa realidade, está presente em uma sirene de ambulância ligada, durante a aproximação ou afastamento de um observador.

Vamos supor a seguinte situação: Você está dentro de um carro parado em um semáforo, no qual escuta a sirene de uma ambulância, imediatamente olha no retrovisor, porém não consegue avistá-la. É intuitivo o fato de que conseguimos distinguir se a ambulância está se afastando ou se aproximando de acordo com a frequência emitida pela sirene. Se a ambulância estiver se aproximando do carro, o som emitido será mais agudo e, caso a ambulância esteja se distanciando, o som será mais grave. Este é um fenômeno característico das propagações ondulatórias e por este motivo foi utilizada como uma das principais ferramentas de estudo para diversos astrônomos assim como Hubble.

O comprimento de onda entre duas cristas, nós ou vales de uma onda determinado por um observador terá um comprimento menor e a tendência natural ao azul (som agudo) quando a fonte emissora aproxima-se do observador. Quando a fonte emissora se afasta do observador, o comprimento de onda será maior e ocorrerá uma tendência ao vermelho (som grave). Assim, o Efeito Doppler pode ser relacionado do seguinte modo

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (1)$$

Em que λ' é o comprimento de onda observado, λ é o comprimento de onda no referencial da fonte e $\beta = v_e/c$, onde v_e é a velocidade da fonte em relação ao observador e c é o valor da velocidade da luz. Os valores para velocidades positivas indicam afastamento da fonte em relação ao observador e para valores negativos indicam a aproximação da fonte em relação ao observador.

Além de Doppler, diversos outros pesquisadores dedicaram boa parte de suas vidas ao estudo da espectroscopia e das propriedades luminosas. Dentre eles, podemos destacar a astrônoma estado-unidense do Harvard College Observatory, Henrietta Swan Leavitt (1868 – 1921) e o físico russo Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) que realizara seus estudos concomitantemente Johann Doppler, porém, somente em meados de 1859 associou-se ao renomado químico, também russo Robert Wilhelm Eberhard Von Bunsen (1811 – 1899) e em suas pesquisas, Kirchhoff e Bunsen tiveram a ideia de analisar a composição da luz por meio de sua decomposição a partir de suas frequências luminosas, em que cada frequência apresentava uma cor característica ao seu comprimento de onda. Para isto, os pesquisadores fornecem uma fonte de energia térmica e incineravam os objetos e observaram que cada material liberava uma cor distinta. Assim, utilizaram desta mesma teoria para examinar a luz emitida pelas estrelas, e a partir destas observações, puderam determinar suas composições químicas. Analisando os resultados obtiveram uma conclusão muito importante, as estrelas, assim como a Terra possuem a mesma composição, ou seja, são constituídos dos mesmos elementos.

Em meados de 1912, os estudos realizados por Harlow Shapley (1885 – 1972), e Henrietta Leavitt apresentaram uma importante relação entre a luminosidade absoluta média de estrelas variáveis de Cefeidas¹ e o período de oscilação da intensidade da luz. A relação entre o período e a luminosidade para Cefeidas permitiu a determinação das distâncias entre galáxias. Essas distâncias são muito grandes, de modo que não fosse possível aplicar o método da paralaxe, usado para medir distâncias entre estrelas próximas. Utilizando os conceitos estudados por Doppler, Kirchhoff e especialmente Henrietta Leavitt, Hubble foi capaz de determinar a distância da Via Láctea à Andrômeda e concluir que esta é bem maior que o raio da via Láctea, sendo de aproximadamente cinquenta mil anos luz.

Cefeidas¹: Uma Cefeida é uma estrela super gigante de 4 a 15 vezes mais massiva que o sol, cuja luminosidade varia de 0,1 a 2 magnitudes para um período bem definido compreendido entre 1 a 100 dias.

Hubble pôde concluir, portanto, que Andrômeda é uma galáxia espiral semelhante à nossa e que está a uma distância aproximada de dois milhões de anos luz.

Em 1929, utilizando os métodos apresentados na teoria dos “redshifts” realizadas por Milton La Salle Humason (1891 – 1972), Hubble pôde observar a relação linear entre o desvio luminoso z para o vermelho e a sua distância, isto é, $cz = H_0 d$, onde H_0 é denominado parâmetro de Hubble, d é a distância do objeto e c é a velocidade da luz. De acordo com os estudos de diversos pesquisadores, chegou-se no consenso aproximado para o valor do parâmetro de Hubble H_0 de 70 km/(s Mpc), com uma incerteza de 10% desse valor (ABRAMO, 2019). A relação acima somente é válida para pequenas distâncias ou pequenos desvios para o vermelho. No trabalho de Hubble de 1929 as galáxias mais afastadas apresentavam uma distância de aproximadamente quatro milhões de anos luz. Para essas distâncias, ou maiores, a lei de Hubble dada pela Eq. (2) é perfeitamente válida, uma vez que é consequência direta da homogeneidade e isotropia do universo. Utilizando a relação entre a velocidade e desvio para o vermelho, temos a seguinte relação

$$v(t) = H(t)d(t). \quad (2)$$

Um fato a se destacar é em relação à unidade de medida para a constante de Hubble, a medida *Megaparsec* (Mpc) é a unidade mais utilizada no estudo da cosmologia por se tratar de distâncias extraordinariamente grandes. Um Megaparsec equivale a 3.10^{22} m, equivalente a distância que um raio de luz, cuja velocidade é de aproximadamente 3.10^8 m/s alcança em três milhões de anos, com cerca de quinze vezes o tamanho da Via Láctea de acordo com a lei de Hubble, assim, para uma galáxia que apresenta uma distância de um Mpc da Via Láctea, está com uma velocidade de afastamento de aproximadamente 70 Km/(s Mpc) (ABRAMO, 2019).

Assim, embora a possibilidade teórica de um universo em expansão tivesse sido considerada pela primeira vez por Alexander Alexandrovich Friedmann (1888 – 1925), foi Edwin Hubble quem nos mostrou ser a expansão uma propriedade do universo real. Hubble pôde concluir que a maioria das galáxias observáveis está se afastando da Via Láctea e, além disso, quanto maior a distância de uma galáxia, mais rápido ela está se afastando, essa descoberta era uma prova concreta e necessária de que o universo estava se expandindo.

É comum muitas pessoas pensarem na expansão do universo como galáxias se movendo e se distanciando umas das outras. Porém, esta não é a maneira mais correta de se

abordar esse assunto, na realidade as galáxias não estão se movendo, mas sim a distância entre elas que está aumentando. Em outras palavras, a expansão do universo pode ser compreendida como a própria expansão do espaço tempo. De modo análogo, podemos utilizar do exemplo clássico de uma bexiga sendo inflada, assim como Waga (2005 p. 161), para explicar o fato da expansão do universo.

Vamos considerar primeiramente uma bexiga de borracha para representar a forma do universo, em que cada galáxia seria representada por pontos marcados à caneta e distribuídos uniformemente na superfície do balão, de modo que ao enchermos o balão, as galáxias se afastariam umas das outras. Entretanto, pelas galáxias estarem uniformemente distribuídas, podemos nos posicionar em um desses pontos e observar sempre a mesma paisagem, na qual todos os pontos são equivalentes em todas as direções. Além disso, esse exemplo ressalta o fato do universo não possuir um centro, uma vez que as galáxias estão distribuídas na mesma superfície esférica e simétrica a bexiga.

Outra consequência deste exemplo consiste no fato de que embora os pontos estejam se afastando, estes não aumentam de tamanho, uma vez que são considerados puntiformes em relação ao tamanho do balão, assim como ocorre com as galáxias em nosso universo. Dessa forma, as observações de Hubble fazem todo sentido, quanto maior a distância entre duas galáxias, maior é a velocidade de afastamento. Por outro lado, a expansão do universo não aumenta a distância entre as estrelas ou planetas, como a terra e a lua, por exemplo, uma vez que esses corpos estão unidos pela força gravitacional e a expansão do universo não é rápida o suficiente para superar essa força, por isso as únicas distâncias que estão aumentando são entre as galáxias.

A teoria mais aceita atualmente é que o universo está em expansão, e esta expansão é diretamente proporcional a sua distância, ou seja, quanto maior for a sua distância, maior sua velocidade de recessão. Tal conceito é empregado ao medirmos a taxa de expansão do Universo, que é dada pela relação entre a velocidade de recessão das galáxias, isto é, a velocidade com que aparentemente se afastam. Importante destacar que essa expansão do universo é homogênea e isotrópica, ou seja, do ponto de vista de qualquer observador, independentemente de sua galáxia e direção de observação, a mesma verificação da Lei de Hubble será consolidada.

As observações de Hubble foram reconhecidas em pouco tempo pelos pesquisadores e consideradas como inovadoras e revolucionárias, pois demonstrava que o universo estava se expandindo como também abriu novas possibilidades para desvendar um dos maiores mistérios da ciência, a origem do universo. Se o espaço-tempo está se

expandindo é intuitivo pensar que se voltássemos no tempo, os objetos estariam mais próximos. Ou seja, se voltássemos ao início do próprio tempo poderíamos verificar que toda matéria que constitui o universo estaria comprimida em um único ponto infinitamente denso contendo toda a matéria e energia do universo, uma singularidade.

3.3. A TEORIA DO BIG BANG

A taxa de expansão do universo também pode ser utilizada para que possamos enxergar e compreender o passado mais remoto do nosso universo, o então famoso Big Bang. Observe que a unidade de medida Megaparsec representa uma distância, logo, a constante de Hubble tem dimensões do inverso do tempo. Assim, podemos definir um momento inicial dado pela Eq. (3) em que representa o “tempo de expansão universal” de acordo com a equação newtoniana de velocidade escalar média e a Eq. (2), de aproximadamente 13,8 bilhões de anos

$$t_o = \frac{1}{H_0}. \quad (3)$$

É de conhecimento que o universo possui uma densidade de matéria visível, a matéria bariônica, composta por prótons e nêutrons. Elétrons e fótons possuem uma densidade limite de aproximadamente 5.10^{31} g/cm³, isso é equivalente a cerca de um átomo de hidrogênio a cada três metros cúbicos (ABRAMO, 2019). Tal matéria não está distribuída uniformemente no universo, mas agrupadas em satélites naturais, como a lua, por exemplo, estrelas, planetas, nuvens de gás entre outros. Tais planetas, nuvens e estrelas, entretanto, não estão distribuídos uniformemente no universo, mas fazem parte de estruturas ainda maiores, como nuvens de estrelas, aglomerados globulares e galáxias. As galáxias por sua vez, estão concentradas em aglomerados com centenas de galáxias em escalas maiores. O universo está de fato, ocupado por uma hierarquia de estruturas, contemplando de escalas pequenas como sistemas solares, até escalas gigantescas, como superaglomerados de galáxias, as que se temos como as maiores atualmente.

A formação desta inacreditável hierarquia cosmológica se dá pela presença da força de atração gravitacional, uma vez que além de dar coesão preserva suas estruturas. Assim, a força de atração gravitacional não só mantém toda a matéria unida, mas ela é a própria responsável por sua formação. De acordo com a expansão do universo, hoje os cosmos são

considerados frios e rarefeitos, porém apresentam ser quentes e densos em sua origem. Neste sentido, surge o questionamento sobre como verificar as hipóteses dos questionamentos acerca do Big Bang, como observar as evidências de uma era quente e densa em que nem mesmo as estrelas haviam se formado?

Em meados de 1948, George Anthony Gamow (1904 – 1968) juntamente com seus alunos Ralph Asher Alpher (1921 – 2007) e Robert Herman (1914 – 1997) propuseram pela primeira vez o conceito de Radiação Cósmica de Fundo (RCF), no qual poderíamos observar fatos e eventos de um passado remoto utilizando as propriedades das frequências luminosas, assim como realizado por Edwin Hubble. Entretanto, somente em meados de 1965 os engenheiros de comunicações estadunidenses Arno Allan Penzias de 1933 hoje com (86 anos) e Robert Woodrow Wilson de 1936 (83 anos) puderam observar de fato essa teoria, que acarretou no prêmio Nobel de física em 1978. Sendo considerada por muitos pesquisadores como uma das maiores descobertas da cosmologia moderna, uma vez que eliminou todos os modelos concorrentes que não apresentavam um início quente e denso para o universo. Este resultado é uma consequência direta das soluções das equações da TRG realizadas por Friedmann que considera como constante o nível de entropia do universo, apresentando neste processo um decaimento de temperatura ao decorrer do tempo, implicando em temperaturas altíssimas no início. Este é um dos principais argumentos para o qual a teoria recebeu o nome de *Big Bang*.

O termo *Big Bang* foi cunhado pelo astrofísico e cosmólogo britânico Fred Hoyle (1915 – 2001) ao se referir sobre os modelos cosmológicos expansionistas com a origem dos cosmos dada por uma singularidade inicial. Este termo ficou mundialmente conhecido a partir de uma audição realizada em uma famosa série de rádio da BBC (*British Broadcasting Corporation*) de radiodifusão do Reino Unido. A priori, Hoyle utilizou desta conotação como forma pejorativa, uma vez que acreditava ser uma teoria equivocada e inadequada sobre o surgimento e descrição do Universo. A propósito, rigorosamente, a tradução apropriada de *Grande Explosão* para o inglês seria *Great Explosion* (WAGA 2005, p.161).

Ao Interpretar o Big Bang pelo seu significado literal, uma “grande explosão” pode levar à compreensão equivocada sobre esse evento, uma vez que não houve qualquer “explosão” (em seu sentido literal) dando origem ao universo. É comum pensar no Big Bang como a explosão de uma granada, cujos fragmentos se dispersam no espaço. Essa concepção possui alguns elementos adequados para entender o conceito de Big Bang, mas pode levar a alguns equívocos.

A percepção acerca de uma explosão nos remete intrinsecamente à ideia de um processo súbito de liberação de energia de forma violenta. Desta maneira, de certo modo, a associação com o Big Bang não se torna totalmente errônea, uma vez que a formação do universo teria ocorrido a partir de uma gigantesca liberação de energia. Entretanto, essa percepção se difere muito quando pensamos no processo de explosão como um processo de combustão, no qual necessita geralmente da presença de oxigênio. Este fato torna-se equivocado, pois até o instante desta liberação de energia, não havia a presença de oxigênio, assim como o espaço ou o próprio tempo. No caso do Big Bang essa “explosão” é um processo anormal e especial, uma vez que o Big Bang não ocorre dentro de um espaço de três dimensões, ele cria o espaço-tempo.

A partir das observações de estrelas, galáxias e especialmente os quasares observáveis, independente da direção que se olhe, o universo apresenta possuir as mesmas características e propriedades. Entretanto, na realidade essas estruturas e aglomerados cósmicos não são perfeitamente congruentes, porém o mesmo modelo cosmológico padrão é observado. Em outras palavras, as informações advindas das observações acerca da radiação cósmica de fundo nos remetem a ideia de que independente da direção que se apontem os detectores, a radiação luminosa de fundo é praticamente a mesma. Isto significa que as características do universo nas regiões de onde a luz fora emitida eram, em um passado remoto exatamente as mesmas.

Os quasares são objetos cósmicos que se situam a distâncias extremas da Via Láctea, sendo atualmente os objetos existentes mais longínquos do Universo e são consideradas massas extremamente poderosas energeticamente, pois são os maiores emissores de energia conhecidos atualmente, com energia comparada a universos inteiros. Além disso, por apresentarem uma distância exorbitante, os quasares estão se afastando com uma velocidade de aproximadamente 16% da velocidade da luz de acordo com a Lei de Hubble.

Assim como os fósseis, que nos dão informações acerca do seu passado, a RCF nos permite compreender diversos aspectos até então em aberto do passado mais longínquo do Universo. Apesar de considerarmos como sendo homogênea e isotrópica isso não ocorre na realidade, uma vez que sua temperatura característica da emissão luminosa varia por um fator de aproximadamente 0,001% dependendo da direção que se aponte os detectores (ABRAMO, 2019). Esta distribuição das flutuações térmicas nos mostra as condições nas quais as estruturas cósmicas presentes no universo se formaram e a partir dos estudos realizados por Newton, podemos conjecturar que a distribuição de matéria bariônica

presente no universo era muito mais homogênea em um passado longínquo. Há cerca de alguns bilhões de anos, grande parte dessas estruturas cósmicas ainda não haviam se formado uma vez que a força de atração gravitacional foi vagarosamente aglomerando em centros de massas densos toda a matéria ao seu redor, criando as primeiras estrelas e assim formando as primeiras galáxias.

Essa hipótese de formação dos cosmos a partir do colapso gravitacional proposto por Newton é atualmente a mais aceita no meio acadêmico e têm ao longo dos anos se mostrado promissora em decorrência do amparo das observações dos astrônomos ao redor do mundo. Entretanto, não podemos negar a influência e importância do caráter das flutuações térmicas iniciais.

A partir dos estudos acerca da RCF, podemos obter informações do Universo quando tinha apenas trezentos e oitenta mil anos de idade. Este retrato do universo nos fornece informações essenciais para o estudo da cosmologia, no qual a radiação de fundo nos dá as condições para as quais o universo assumiu sua forma atual, como também conduz marcas dos processos químicos e físicos que ocorreram e, portanto, permite que testemos modelos com mais detalhes que certas observações (ABRAMO, 2019).

3.4. MODELOS DE UNIVERSO

Em consequência das teorias propostas por Isaac Newton (1643 – 1727), mais precisamente seus estudos acerca da gravidade, publicado no ano de 1687 em sua famosa obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que descreve a Lei da Gravitação Universal, a gravidade pode ser compreendida como uma força de atração mútua entre corpos que possuem massa. Além disso, a atração gravitacional é proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância, conforme representado pela Eq. (4)

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}. \quad (4)$$

Sendo F a intensidade da força de atração, G a constante gravitacional cujo valor é de aproximadamente $G = 6,674184 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$, m_1 e m_2 a massas dos corpos em estudo e d a distância entre seus respectivos centros de massa. Porém, diante da teoria apresentada surge à seguinte indagação, por qual motivo não ocorre um colapso de matéria

no universo? Uma vez que a força gravitacional é sempre atrativa. De modo a responder esse questionamento, Newton propõe o princípio da *Universalidade da Interação Gravitacional*, que consiste no fato do universo ser infinito com uma distribuição uniforme e homogênea de astros. Desta maneira, a força de atração gravitacional resultante seria nula em cada corpo, uma vez que teríamos forças de sentido contrário distribuídas em seu redor, implicando assim na estabilidade cósmica do universo. (HENRIQUE e SILVA, 2019)

Entretanto, antes de qualquer indício científico, Tito Lucrécio Caro (99 a. C – 55 a. C) antes de Cristo, já estabelece a partir de uma formulação empírica que o universo fosse infinito e monótono, no qual pode ser enunciado como: “*Independente do ponto que alguém ocupe, a partir dele, o universo estende-se em todas as direções, sem limite*”. A partir de termos atuais, Lucrécio afirma que o universo era isotrópico em relação a qualquer observador, independentemente de seu referencial.

A partir da percepção da Universalidade da Interação Gravitacional de Newton, Albert Einstein (1879 – 1955) publicou a então TRG que apresentava uma percepção inovadora e revolucionária acerca da gravidade. Em sua teoria, Einstein propôs o princípio de equivalência e às equações da relatividade geral, que representavam a geometrização da gravitação. Segundo Einstein, dois corpos não apresentavam mais a ação de uma força à distância, conforme a teoria de Newton, mas a simples presença de matéria/energia seria responsável pela curvatura do espaço-tempo, tornando então sua geometria não euclidiana. Para Waga (2005) o nascimento da cosmologia moderna se dá a partir das teorias desenvolvidas por Einstein, especialmente em relação à TRG e mais, de acordo com Tolman (1987), trouxe uma revolução teórica, uma vez que desenvolveu uma nova concepção da teoria da gravitação universal e foi responsável por explicar fenômenos até então em aberto, como o avanço no periélio de Mercúrio, a deflexão gravitacional da luz, e o deslocamento das linhas espectrais na superfície do Sol e estrelas.

Em 1905, Albert Einstein divulgou os resultados de suas pesquisas referentes à *Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, no qual apresentava uma reformulação inovadora acerca da física, especialmente em relação às concepções do espaço e tempo, no qual é conhecido atualmente como *Relatividade Restrita*. Entretanto, a Relatividade de Einstein tornou-se conhecida pelos pesquisadores pouco tempo depois, em 1908, quando o matemático alemão Hermann Minkowski (1864 – 1909) que fora professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique ministrou sua famosa palestra sobre o espaço e tempo. Minkowski propunha que os conceitos de espaço e tempo fossem na realidade meras

percepções de um conceito ainda mais relevante, o espaço-tempo, e apresentava uma interpretação geométrica para as teorias de Einstein.

A partir das concepções de Minkowski, Einstein buscou a todo custo realizar a generalização de sua teoria da relatividade, porém só obteve êxito em 1916 na publicação de seus resultados no artigo *Fundamentos da Relatividade Geral*, no qual utiliza como principal ferramenta os conceitos propostos por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), porém com uma percepção no espaço-tempo quadri-dimensional. Einstein em sua teoria da relatividade apresentava inicialmente uma ideia contrária a Newton no que diz respeito aos referenciais inerciais, entretanto essa teoria se apresentava como sendo muito mais farta, revelando-se como substituta à consagrada Teoria da Gravitação Universal.

A TRG só recebeu notoriedade internacional após a consolidação experimental ou observacional de seus estudos em 1919, a partir das expedições britânicas em Sobral, Ceará e na Ilha do Príncipe, no Golfo da Guiné na África, do fenômeno não newtoniano da deflexão dos raios luminosos de uma estrela que se encontrava na parte posterior do Sol durante um eclipse solar. Neste período, o fato da existência de galáxias ainda não era conhecido, uma vez que estas só foram descobertas com Hubble, um pouco mais tarde em 1926. É interessante destacarmos que não apenas Einstein, como também o matemático, físico e astrônomo neerlandês Willem de Sitter (1872 – 1934) não apreciavam o conceito de um universo em expansão, essa possibilidade teórica só surgiria em meados de 1922 a partir das teorias de Friedmann.

Em 1916 a comunidade científica ainda defendia as teorias propostas por Newton e se considerava que o Universo fosse aproximadamente estático. Este fato acarretou em uma pequena falha na teoria de Einstein, no qual notou que para distâncias longínquas, as interações gravitacionais deveriam se interagir e se acumular. Em outras palavras, Einstein notou que a estabilidade cósmica só seria possível se houvesse um mecanismo que atuasse contra a atração gravitacional entre as galáxias.

No ano de 1917, no artigo *Considerações Cosmológicas na Terra da Relatividade Geral*, Einstein baseando-se nas observações de que as velocidades das estrelas são pequenas, comparadas a velocidade da luz e modo a satisfazer as equações da relatividade e explicar o fato da estabilidade cósmica, considera um princípio cosmológico no qual o universo é estático, parcialmente homogêneo e isotrópico. De início, não consegue obter, de suas equações, qualquer solução com essas propriedades. Modificou-as, então, acrescentando um termo denominado *Constante Cosmológica* (Λ) (WAGA, p. 02. 2005) e, obtém, assim, a solução desejada. Entretanto, não notara na época que este mecanismo de

estabilização cósmica do universo fosse instável, uma vez que qualquer alteração ou perturbação que ocorresse no universo desencadearia em sua instabilidade, e conseqüentemente, em um colapso universal. Einstein logo percebeu seu equívoco, e posteriormente, descreveu o episódio de “my biggest blunder” (meu maior erro).

Neste mesmo ano, de Sitter publicou os resultados de seus trabalhos em que apresenta uma nova percepção acerca das resoluções das equações da TRG com a inserção da constante cosmológica. Entretanto, o modelo de Sitter apresentava uma abordagem mais matemática, e com uma interpretação física que não agradou a maioria da comunidade científica, pelo fato de o universo de Sitter ser estacionária e ser ausente de matéria. Neste âmbito, entende-se por estacionárias uma solução cujas propriedades não dependem do tempo (WAGA, 2005).

O universo de de Sitter mostra que a velocidade de recessão de planetas distribuídos aleatoriamente era proporcional a distância que os separa. Este fenômeno recebeu o nome de *Efeito de Sitter* e fora responsável por explicar razoavelmente bem a deflexão da radiação espectral de nebulosas observáveis.

Entretanto, Friedmann e de Sitter demonstraram antes mesmo de Hubble, que um modelo de expansão do universo seria perfeitamente compatível com a teoria da relatividade de Einstein. Além disso, foram capazes de apresentar um resultado extremamente relevante, no qual a taxa de expansão do universo era totalmente dependente de sua massa como também de sua pressão. Tanto no caso de a matéria constituinte ser bariônica ou do tipo radiação, a força de atração gravitacional apresenta-se contrária a expansão. Logo, atuando como uma força ao contrário, desacelerando a expansão do universo. E, além disso, observaram outro fato acerca da relatividade, à possibilidade de o espaço possuir uma curvatura intrínseca que poderia influenciar na relação de expansão do universo.

Em 1922 Alexander Friedmann, por influência das teorias de Paul Ehrenfest (1880 – 1993) publicou seus resultados acerca da curvatura intrínseca do universo no artigo *sobre a curvatura do Espaço* para a renomada revista científica alemã *Zeitschrift für Physik*, que neste período ainda publicava artigos relacionados à cosmologia. Neste artigo, apresenta duas interpretações possíveis para a curvatura do universo a partir das soluções das equações da TRG, no qual poderia se comportar como uma função periódica não estacionária ou uma função crescente. Apesar de haver publicado seu artigo na prestigiosa revista, a teoria de Friedmann não foi reconhecida. Nesse artigo em que considerou

espaços com curvatura constante e positiva, Friedmann obteve pela primeira vez soluções expansionista, com e sem constante cosmológica, das equações de Einstein.

A influência da curvatura do universo poderia ocorrer de três formas distintas dependendo de sua da forma estrutural intrínseca: *Friedmann Aberto*, *Friedmann Fechado* e *Friedmann Plano*. Para os dois primeiros casos, a curvatura do espaço aumenta e diminui o fator de expansão, respectivamente, porém propõem um universo infinito e em expansão. Pode ocorrer também no *Friedmann Fechado*, um universo em sucessivas expansões e contrações, e por último, a curvatura de *Friedmann Plano*, consiste em um universo euclidiano na qual a curvatura não apresenta qualquer influência no processo de expansão do universo. Neste aspecto, essa era a primeira vez que se propunha um modelo cosmológico em que o universo estava em expansão.

O fator de expansão do universo é dado pela densidade de matéria escura presente em nosso universo. Este parâmetro foi obtido a partir da interpretação acerca das equações da TRG, na qual pressupõe um modelo homogêneo e isotrópico. Entretanto, a partir das observações acerca das propriedades da curvatura do universo, pôde-se concluir que esta influência é praticamente insignificante, o que nos remete a ideia de que no início do universo deveria ser ainda menor, uma vez que a tendência natural da curvatura seria aumentar de acordo com o tempo.

A partir da concepção de um universo em expansão proposto por Friedmann, foi possível se conjecturar a possibilidade da gravidade atuar como um mecanismo de desaceleração na expansão do universo. Esta hipótese é compatível quando pensamos em um modelo de expansão conforme ilustrado pelo exemplo do balão sendo inflado, em que a gravidade atua de modo análogo a elasticidade da borracha. Entretanto, os resultados atuais nos mostram o contrário, que o universo está se expandindo de forma acelerada. Esse fato se dá pela matéria constituinte do universo ser predominante escura, uma vez que Friedmann se baseou no modelo de Einstein que pressupunha a matéria ser do tipo bariônica. Neste sentido, Einstein propõe (Λ) em suas equações da TRG e hoje entende-se como o termo atrelado a matéria escura.

4. MÉTODOS MATEMÁTICOS

Esse capítulo se destina a parte dos conceitos matemáticos abordados durante a pesquisa para a elaboração deste trabalho que serão de grande utilidade para o tratamento da problemática proposta. No que diz respeito às soluções das Equações Diferenciais, realizaremos uma breve discussão dos métodos analíticos do Fator Integrante, Equações Separáveis e da Equação de Bernoulli, bem como os métodos numéricos de Runge-Kutta de ordens 1 e 2, conhecidos como método de Euler e método de Heun (Euler Aperfeiçoado) como também o método de Runge-Kutta de 4º ordem.

4.1. TÉCNICAS ANALÍTICAS PARA SOLUÇÕES DE EDO'S

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento deste TCC, serão apresentados alguns resultados sustentados pelo livro escrito pelos autores Boyce e Diprima (2010).

4.1.1. MÉTODO DAS EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Seja a Equação Diferencial Ordinária geral de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (5)$$

Em que $y = y(t)$ e $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Utilizaremos neste caso uma classe mais restrita de EDO's de primeira ordem cuja solução pode ser obtida pela integração direta. Para isso, vamos reescrever a Eq. (5) da seguinte maneira

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (6)$$

Isto sempre será verdadeiro devido ao fato de tomarmos $M(t, y) = -f(t, y)$ e $N(t, y) = 1$. Porém, podem ocorrer casos particulares em que M depende exclusivamente de t e N depende exclusivamente de y . Neste caso, temos

$$M(t) + N(y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (7)$$

A Eq. (7) é dita separável, pois podemos reescrevê-la na forma diferencial

$$M(t) dt + N(y) dy = 0. \quad (8)$$

Analogamente é possível estabelecer este procedimento para qualquer equação separável.

Sejam as primitivas quaisquer H_1 e H_2 de M e N respectivamente. Assim

$$H_1'(t) = M(t) \text{ e } H_2'(y) = N(y). \quad (9)$$

A Eq. (7) fica

$$H_1'(t) + H_2'(y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (10)$$

A partir da regra da cadeia podemos escrever

$$H_2'(y) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dy} H_2(y) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} H_2(y). \quad (11)$$

Podemos escrever a Eq. (11) da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt} [H_1(t) + H_2(y)] = 0. \quad (12)$$

Realizando a integração em ambos os membros da Eq. (12), e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo parte I (STEWART. 2013, p. 351), obtemos

$$H_1(t) + H_2(y) = C, \quad (13)$$

Onde C é uma constante arbitrária a se determinar. Desta maneira, qualquer solução da forma $y = \phi(t)$ da Eq. (5) deve satisfazer a Eq. (13). Isto é, a Eq. (13) nos define uma solução implicitamente ao invés de explicitamente.

A Eq. (5) acompanhada de uma condição inicial fornece um Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}. \quad (14)$$

Para resolvê-lo, é necessário determinar o valor da constante C na Eq. (13), tomando $t = t_0$ e $y = y_0$. Logo,

$$H_1(t_0) + H_2(y_0) = C. \quad (15)$$

Substituindo o valor de C na Eq. (15) e aplicando na Eq. (13) encontramos

$$H_1(t) - H_1(t_0) = \int_{t_0}^t M(s) ds. \quad (16)$$

E

$$H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds. \quad (17)$$

Portanto, obtém-se

$$\int_{t_0}^t M(s) ds + \int_{y_0}^y N(s) ds = 0. \quad (18)$$

A Eq. (18) nos fornece uma solução implícita da Eq. (7) satisfazendo a condição inicial dada pela Eq. (14), uma vez que para se obter a solução explícita da Eq. (7) é necessário resolver a Eq. (18) considerando y como uma função de t , fato este não trivial e muitas vezes impossível por métodos analíticos. Uma forma alternativa de se obter sua solução é através de métodos numéricos nos quais serão estudados posteriormente com mais detalhes.

EXEMPLO 1

De modo a exemplificar os resultados obtidos, vamos considerar a seguinte Equação Diferencial Ordinária

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}. \quad (19)$$

Juntamente com a condição inicial $y(0) = 1$, tem-se um problema de valor inicial. Assim, Podemos escrever a Eq. (19) da seguinte maneira

$$y \frac{dy}{dt} = t. \quad (20)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (20) na variável t

$$\int y \, dy = \int t \, dt. \quad (21)$$

A partir da resolução da Eq. (21) com as devidas simplificações, obtemos a solução geral para a Eq. (19)

$$y(t) = \pm \sqrt{t^2 + C}. \quad (22)$$

Aplicando a condição inicial, obtemos o valor de $C = 1$. Desta forma,

$$y(t) = \pm \sqrt{t^2 + 1}. \quad (23)$$

A Eq. (23) fornece a solução analítica para o problema, juntamente com a condição inicial.

EXEMPLO 2

Seja o PVI de acordo com a Eq. (24), determine o valor de $y(1)$ com dez casas decimais, utilizando o método das Equações Diferenciais Separáveis

$$\begin{cases} y' = 0,04y \Rightarrow f(t_n, y_n) = 0,04y_n \\ y(0) = 1000. \end{cases} \quad (24)$$

Podemos reescrever a nossa Equação Diferencial dada pela Eq. (24) em termos de diferenciais, conforme a Eq. (25)

$$y' = 0,04y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0,04y. \quad (25)$$

Isolando a variável $y(t)$ em um lado da igualdade, obtemos

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 0,04. \quad (26)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (26) na variável t

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = \int 0,04 dt. \quad (27)$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo parte I (STEWART. 2013, p. 351), e realizando os devidos cálculos, encontramos

$$\ln|y| = 0,04t + C. \quad (28)$$

Reescrevendo a Eq. (28), isolando o termo $y(t)$ obtém-se a Eq. (29)

$$y(t) = ke^{0,04t}. \quad (29)$$

Pelo PVI, temos:

$$y(0) = ke^{0,04*0} = 1000$$

$$k = 1000. \tag{30}$$

Logo a solução geral da nossa Equação Diferencial é dada por

$$y(t) = 1000e^{0,04t}. \tag{31}$$

Para determinar $y(1)$, basta substituir o valor de $t = 1$ na Eq. (31). Assim,

$$y(1) = 1000e^{0,04}$$

$$y(1) \approx 1040,8107741923. \tag{32}$$

4.1.2. MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

Consideremos agora um caso mais geral de equações diferenciais lineares de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(t)y = g(t), \tag{33}$$

em que p e g são funções fornecidas na variável t .

O método de resolução descrito a seguir foi desenvolvido por Leibniz, e se baseia na multiplicação da Eq. (33) por uma função $\mu(t)$, de modo a torná-la facilmente integrável, essa função $\mu(t)$ é denominada de fator integrante da Equação Diferencial e assim, obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dx} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \tag{34}$$

Podemos observar que a expressão do membro à esquerda da Eq. (34) representa a regra da derivação do produto $\mu(t)y$, desde que satisfaça a condição

$$\frac{d\mu(t)}{dx} = p(t)\mu(t). \quad (35)$$

Supondo o valor de $\mu(t)$ positiva, temos a seguinte expressão

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t). \quad (36)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (36), obtemos

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt + C. \quad (37)$$

Tomando a constante arbitrária C obtida na Eq. (37) como sendo zero, restringimos a função $\mu(t)$ a sua forma mais simples. Assim,

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t) dt\right). \quad (38)$$

Observe que a função $\mu(t)$ é sempre positiva para todo valor de t , conforme supomos. Assim, retomando a Eq. (34) temos

$$\frac{d}{dx} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \quad (39)$$

Dessa forma,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + C \quad (40)$$

sendo o valor da constante C arbitrário. Deste modo, a solução geral da Eq. (33) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + C \right], \quad (41)$$

onde t_0 é algum limite de integração conveniente.

EXEMPLO 3

Consideremos a seguinte Equação Diferencial de primeira ordem linear

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t+1}{t}y = 1. \quad (51)$$

De acordo com a Eq. (38), vamos determinar primeiramente o fator integrante em relação à Eq. (51)

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{t+1}{t} dt\right) \quad (52)$$

Após a resolução da integral descrita pela Eq. (52), encontramos

$$\mu(t) = te^t. \quad (53)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade da Eq. (51) pelo fator encontrado na Eq. (53) para $t \neq 0$

$$y'te^t + \frac{te^t(t+1)}{t}y = te^t. \quad (54)$$

Podemos compreender o lado esquerdo da Eq. (54) como a regra do produto para derivadas. Assim,

$$\frac{d}{dt}(yte^t) = te^t. \quad (55)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (55) em relação a t e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo parte I, obtemos

$$y te^t = \int te^t dt. \quad (56)$$

Para o cálculo da integral do membro direito da Eq. (56), recorreremos ao método da integração por partes (STEWART. 2013, p. 420)

$$\int u dv = u v - \int v du. \quad (57)$$

Para isso, seja $u = t$, e $dv = e^t dt$, assim, $du = dt$ e $v = e^t$

$$\int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt. \quad (58)$$

Desta maneira,

$$\int t e^t dt = t e^t - e^t + C. \quad (59)$$

A Eq. (59) mostra a solução para a integral da Eq. (56). Substituindo a solução encontrada e realizando as devidas simplificações, encontramos

$$y(t) = \frac{(t-1)}{t} + \frac{C}{t} e^{-t}. \quad (60)$$

A expressão dada pela Eq. (60) representa a solução geral para a Eq. (51) para um valor arbitrário C que satisfaça uma dada condição inicial.

4.1.3. EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Em alguns casos é possível determinar a solução de uma EDO de primeira ordem não linear realizando a mudança da variável dependente, transformando assim a EDO não linear em uma equação linear. Dentre os casos possíveis, vamos considerar a equação na forma da Eq. (61)

$$y' + p(t)y = q(t)y^n. \quad (61)$$

Esta equação é conhecida como Equação de Bernoulli, no qual sua resolução consiste em considerar o fator $u(t)$ para a mudança de variável da forma

$$u(t) = y^{1-n}. \quad (62)$$

Assim, podemos isolar o termo $y(t)$, no qual obtemos

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}. \quad (63)$$

A partir da Eq. (63) vamos realizar a diferenciação em ambos os membros da igualdade, na variável t resultando na Eq. (64)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dt}. \quad (64)$$

Substituindo a Eq. (64) na Eq. (61), encontramos

$$\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \frac{du}{dt} + p(t)u^{\frac{1}{1-n}} = q(t)u^{\frac{n}{1-n}}. \quad (65)$$

Após as devidas simplificações na Eq. (65), podemos escrever

$$\frac{du}{dt} + p(t)(1-n)u = q(t)(1-n), \quad (66)$$

que é uma equação linear. Note que basta considerar

$$\begin{cases} P(t) = p(t)(1-n) \\ Q(t) = q(t)(1-n), \end{cases} \quad (67)$$

reescrevendo a Eq. (66) de modo que se tenha

$$\frac{du}{dt} + P(t)u = Q(t). \quad (68)$$

Podemos obter a solução analítica por meio do método do fator integrante ou pelo método das equações separáveis. Para isto, utilizemos os resultados obtidos pelo método do fator integrante, uma vez que contempla um ramo ainda maior de equações diferenciais

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)Q(s) ds + C \right]. \quad (69)$$

Utilizando a Eq. (63) e a Eq. (69), podemos determinar $y(t)$ em função do fator integrante

$$y(t) = \left(\frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)Q(s) ds + C \right] \right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (70)$$

Em consequência das transformações realizadas nas equações (63) e (64), foi possível trabalharmos com uma equação diferencial não linear do mesmo modo que uma equação linear. A Eq. (70) nos fornece a Solução analítica para a Eq. (61) com y em função de t .

EXEMPLO 4

Vamos considerar a Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem não linear

$$y' - \frac{3}{t}y = t^4 \sqrt[3]{y}. \quad (71)$$

Comparando com a Eq. (61) do método descrito anteriormente, temos que $n = 1/3$, $p(t) = -3/t$ e $q(t) = t^4$. Assim, vamos considerar

$$u(t) = y^{2/3}. \quad (72)$$

Isolando o termo $y(t)$, encontramos

$$y(t) = u^{\frac{3}{2}}. \quad (73)$$

Derivando ambos os membros da igualdade da Eq. (73) na variável t , obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} u^{1/2} \frac{du}{dt}. \quad (74)$$

Substituindo as Eq. (73) e (74) na Eq. (71)

$$\frac{3}{2} u^{1/2} \frac{du}{dt} - \frac{3}{t} u^{3/2} = t^4 u^{1/2}. \quad (75)$$

Realizando as manipulações necessárias na Eq. (75)

$$\frac{du}{dt} - \frac{2}{t} u = \frac{2}{3} t^4. \quad (76)$$

Logo, podemos afirmar que $p(t) = -2/t$ e $q(t) = \frac{2}{3} t^4$ e utilizando os resultados obtidos na Eq. (13) da Seção 4.1.1 podemos concluir que

$$u(t) = e^{2 \int \frac{1}{t} dt} \left[\frac{2}{3} \int t^4 e^{-2 \int \frac{1}{t} dt} dt + C \right]. \quad (77)$$

Realizando as devidas simplificações, obtemos

$$u(t) = t^2 \left[\frac{2}{3} \int t^2 dt + C \right] \quad (78)$$

e encontramos

$$u(t) = \frac{2}{9} t^5 + C t^2. \quad (79)$$

Substituindo a Eq. (79) na Eq. (73)

$$y(t) = \left(\frac{2}{9} t^5 + C t^2 \right)^{3/2}. \quad (80)$$

A Eq. (80) fornece a solução analítica para o problema descrito pela Eq. (71).

4.2. TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA SOLUÇÕES DE EDO'S

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento desse TCC, serão apresentados alguns resultados sustentados pelo livro M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes (1996), pois serão muito úteis como pré-requisito de modo a amparar os conteúdos apresentados.

4.2.1. MÉTODO DE EULER

O método de Euler consiste em um método numérico do tipo passo-simples para o qual podemos determinar uma solução aproximada de uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem a partir de um dado PVI da forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (81)$$

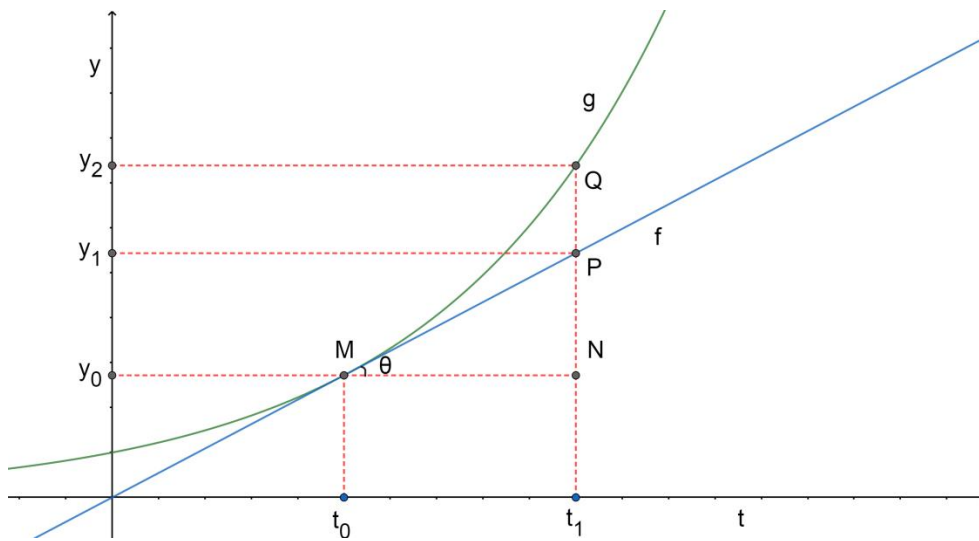
Dados t_0 e y_0 com $y(t_0) = y_0$, podemos aproximar a solução da EDO por meio de uma equação da reta. Seja $M(t_0, y_0)$, $N(t_1, y_0)$ e $P(t_1, y_1)$, podemos então determinar a inclinação da reta $f(t)$, $y'(t_0, y_0)$ a partir do triângulo ΔNMP do Gráfico 1, de modo que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{PN}}{\overline{MN}} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}. \quad (82)$$

Com $t_1 = t_0 + h$, podemos aproximar a solução da EDO cuja solução está representado pela função $g(t)$, $y_2 = g(t_1) \cong f(t_1)$. Assim, a Eq. (82) fica da forma

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (83)$$

Gráfico 1 - Método de Euler de passo simples.



Fonte: Autor

Para h suficientemente pequeno, obtemos a seguinte relação

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = y'(t_0). \quad (84)$$

A partir da equação da reta, temos

$$y(t_1) = y(t_0) + m(t_1 - t_0). \quad (85)$$

No qual m representa a inclinação da reta f . Substituindo a Eq. (84) na Eq. (85), encontramos

$$y(t_1) = y(t_0) + h y'(t_0). \quad (86)$$

Mas como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y_0 = f(t_0, y_0) \end{cases} \quad (87)$$

com,

$$\begin{cases} y(t_0) \cong y_0 \\ y'(t_0, y_0) \cong f(t_0, y_0), \end{cases} \quad (88)$$

então, pelas Eqs. (87) e (88), podemos escrever

$$y(t_1) = y_0 + h f(t_0, y_0). \quad (89)$$

Logo, como o passo y_n depende exclusivamente do passo y_{n-1} , podemos considerar um ponto y_{n+1} , de modo que dependa de y_n

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). \quad (90)$$

O método de Euler assim como os demais métodos numéricos de resoluções de EDO's consiste em sua essência em buscar uma solução aproximada e, dessa forma possui certo erro. Neste caso, podemos utilizar a expansão em série de Taylor para majorar este valor, no qual obtemos

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + y'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \\ & + \frac{y''(t_n)(t_{n+1} - t_n)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (91)$$

O método de Euler consiste no truncamento da série de Taylor

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)(t_{n+1} - t_n). \quad (92)$$

Assim, o erro cometido pelo método é a soma dos demais termos da Eq. (91) retirando o termo dado pela Eq. (92), no qual podemos representar pela Eq. (93)

$$\frac{y''(t_n)(t_{n+1} - t_n)^2}{2} + \dots \quad (93)$$

O método de Taylor de segunda ordem consiste em

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n). \quad (94)$$

A partir das Eqs. (92) e (94), podemos determinar o erro do método de Euler

$$\frac{h^2}{2} y''(\varepsilon_n) \Rightarrow E \leq \max|y''(t)|. \quad (95)$$

Como não é possível determinar o valor de ε_n para o qual a segunda derivada seja máxima, majoramos este valor num determinado intervalo I . Por se tratar de um método simples, o método de Euler apresenta um elevado custo computacional para se obter a solução desejada, uma vez que salvo funções simples, apresenta muitas iterações.

EXEMPLO 5

Vamos considerar a seguinte EDO de primeira ordem linear da forma

$$\begin{cases} y' = y. \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (96)$$

Trabalhando com uma aproximação de quatro casas decimais, usaremos o método de Euler para aproximar $y(0,04)$ com $\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-4}$, sendo ε o valor do erro cometido. De acordo com a Eq. (95), podemos escrever a seguinte relação

$$(t_n) = \frac{y''(\varepsilon_n)}{2} h^2. \quad (97)$$

Nesse caso, conhecemos a solução analítica do PVI, para $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = 1 \quad (98)$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 dt \quad (99)$$

$$\ln|y| + C_1 = t + C_2 \quad (100)$$

$$y(t) = Ce^t. \quad (101)$$

Pelo PVI, temos que

$$y(0) = C = 1 \quad (102)$$

$$y(t) = e^t. \quad (103)$$

Temos, a partir das Eqs. (95) e (103) que

$$\begin{aligned} M_2 = \max |y''(t)| &= e^{0,04} \cong 1,0408 \\ |y''(\varepsilon_n)| &\leq M_2, t \in [0; 0,04], \end{aligned} \quad (104)$$

onde

$$|e(t)| \leq \frac{1,0408}{2} h^2, \forall t \in [0; 0,04]. \quad (105)$$

Assim

$$\frac{1,0408}{2} h^2 \leq 5.10^{-4}, \quad (106)$$

então

$$h \leq 0,0310. \quad (107)$$

Tomemos o maior valor de h , de forma a trabalhar com pontos igualmente espaçados, ou seja, $h = 0,02$, pois queremos $y(t) = 0,04$. Assim, pelo PVI dado pela Eq. (96), temos

$$t_0 = 0; y(t_0) = y(0) = 1 \quad (108)$$

e obtemos pela Eq. (102)

$$\begin{cases} t_1 = 0,02 \\ t_2 = 0,04. \end{cases} \quad (109)$$

Com os valores de t_1 e t_2 , podemos utilizar a Eq. (100) para obter uma aproximação para $y(t_1) \approx y_1$

$$\begin{aligned} y(t_1) \approx y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + hy_0 \\ &= y_0(1 + h) = 1,02. \end{aligned} \quad (110)$$

Analogamente, obtemos

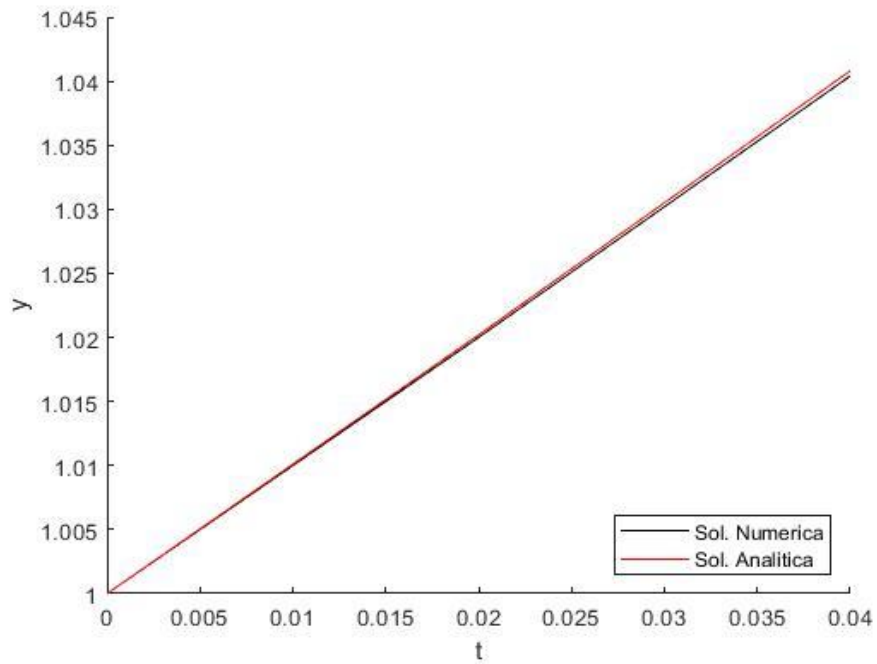
$$\begin{aligned} y(t_2) \approx y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + hy_1 \\ &= y_1(1 + h) = 1,02(1 + 0,02) = 1,0404. \end{aligned} \quad (111)$$

Dado que $e^{0,04}$, com quatro casas decimais, vale 1,0408, temos que o erro cometido foi de $1,0408 - 1,0404 = 4.10^{-4} < 5.10^{-4}$.

Para melhor exemplificação e aproximação para a solução do PVI dado, utilizaremos a implementação computacional, para isso, o software utilizado foi o MATLAB uma vez que apresenta valiosos recursos e opções. Entretanto, outros softwares podem ser utilizados, assim como o Python ou o Octave, pois apresentam recursos semelhantes e com a vantagem de serem gratuitos e de fácil acesso. Assim, o código utilizado está descrito e comentado no Apêndice A.

Realizando a simulação com as entradas do PVI considerando $t_0 = 0$, $t = 0,04$, $y_0 = 1$ e $N = 2$ intervalos obtemos que o erro máximo absoluto cometido pelo método de Euler é de $4,107741923882191.10^{-4}$. Desta maneira, o Gráfico 2 apresenta as soluções numérica e analítica, no qual podemos observar que para $0 \leq t \leq 0,025$ aproximadamente, ambas as curvas quase não apresentam diferença, entretanto, para $0,025 \leq t \leq 0,04$ já é possível observarmos que há uma pequena distinção que corresponde ao erro cometido.

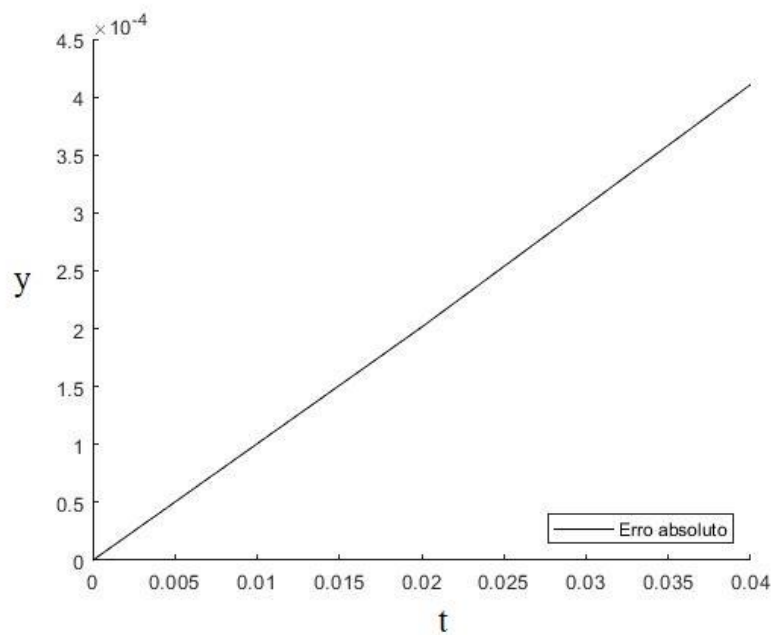
Gráfico 2 – Solução numérica e analítica do PVI.



Fonte: Autor

Para o tratamento do erro cometido pelo método de Euler, vamos considerar o Gráfico 3, que mostra o erro para cada valor de t no intervalo de 0 a 0,04.

Gráfico 3 – Erro absoluto cometido ponto a ponto.



Fonte: Autor

EXEMPLO 6

Seja o PVI de acordo com a Eq. (112) abaixo, estime o valor de $y(1)$ utilizando o método de Euler

$$\begin{cases} y' = 0,04y \Rightarrow f(t_n, y_n) = 0,04y_n \\ y(0) = 1000. \end{cases} \quad (112)$$

Neste caso, sabemos a solução analítica para o PVI dado, que nos fornece o valor exato de $y(t) = 1000e^{0,04t}$ de onde $y(1) = 1040,8107741923$, com dez casas decimais. Consideremos a expressão do método de Euler conforme a Eq. (113)

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (113)$$

$$y_{n+1} = y_n + h * 0,04y_n = (1 + 0,04h)y_n. \quad (114)$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + 0,04h) * y_0 \\ y_1 &= (1 + 0,04h) * 1000 \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= (1 + 0,04h)y_1 \\ &= (1 + 0,04h) * (1 + 0,04h) * 1000. \end{aligned} \quad (116)$$

Logo,

$$y_2 = (1 + 0,04h)^2 * 1000. \quad (117)$$

De forma análoga, obtemos uma expressão geral

$$y_k = (1 + 0,04h)^k * 1000. \quad (118)$$

Para valores de $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ e tomando $k = h$, obtemos as aproximações para y_n em cada iteração.

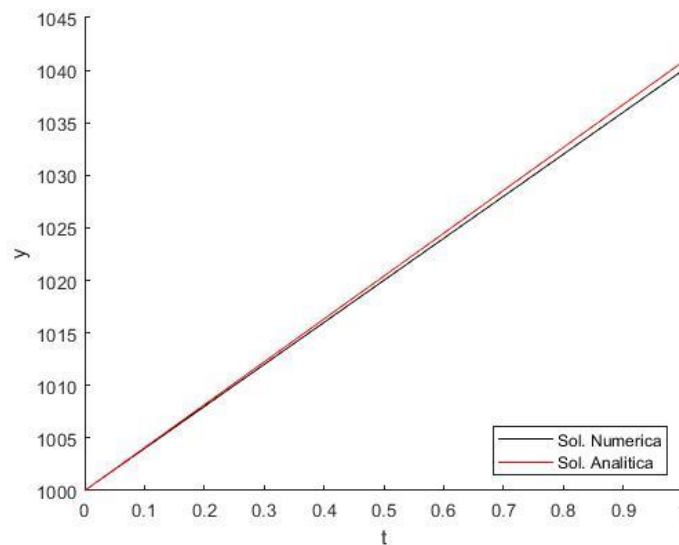
Assim como executado no exemplo anterior, realizamos a implementação computacional do método de Euler para valores de $h = 1; 0,5; 0,25; 0,1$. Para isso, utilizou-se o mesmo código descrito no Apêndice A, salvo pequenas alterações, como os valores do intervalo t , a quantidade de subintervalos, a condição inicial, a solução analítica e a função do método de Euler.

Para $h = 1$, obtemos:

$$y(1) \approx y_1 = (1 + 0,04) * 1000 = 1040. \quad (119)$$

A partir do desenvolvimento do algoritmo do método de Euler o erro máximo obtido para a aproximação de $y(1)$ para uma iteração, ou seja, para $N = 1$ é de $0,810774192388180$. O Gráfico 4 exibe as curvas obtidas por meio da solução numérica e analítica da EDO.

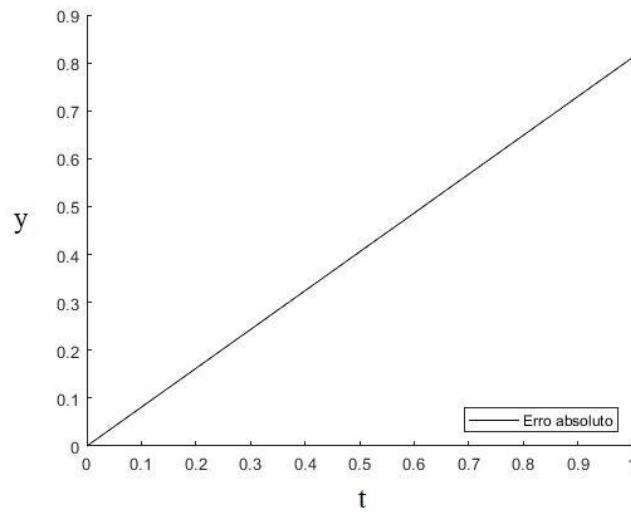
Gráfico 4 – Solução do método de Euler e solução analítica.



Fonte: Autor

É possível observar no Gráfico 5 o erro cometido pelo método de Euler para a aproximação de $y(1)$.

Gráfico 5 – Erro cometido pelo método de Euler.



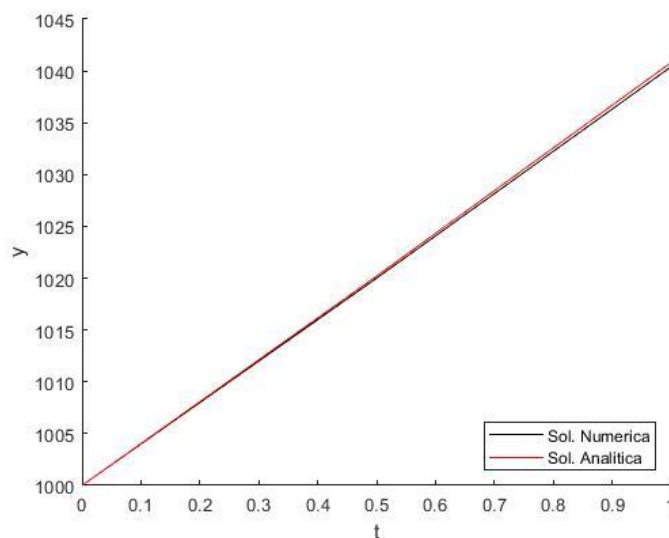
Fonte: Autor

Para $h = 0,5$, temos:

$$y(1) \approx y_2 = (1 + 0,04 * 0,5)^2 * 1000 = 1040,4. \quad (120)$$

O erro máximo do método de Euler para $y(1)$ com o passo $h = 0,5$ é de 0,410774192388089. O Gráfico 6 mostra os gráficos da solução numérica da EDO juntamente com a solução analítica.

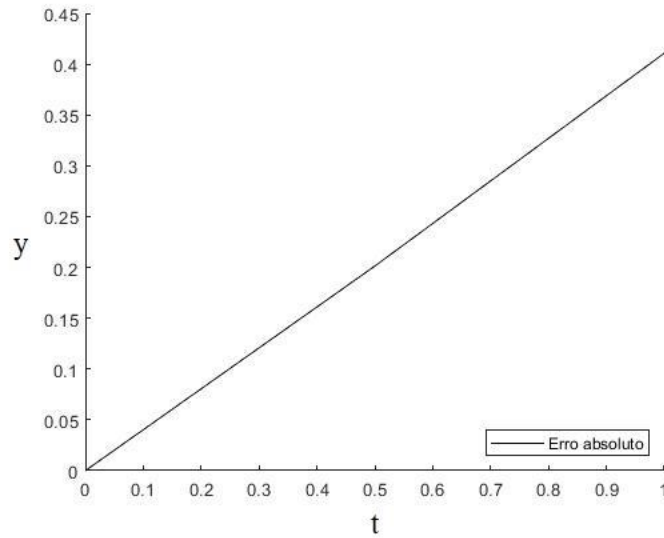
Gráfico 6 – Solução numérica e analítica para $h = 0,5$.



Fonte: Autor

O Gráfico 7 fornece a dispersão de erro do método de Euler ponto a ponto.

Gráfico 7 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,5$.

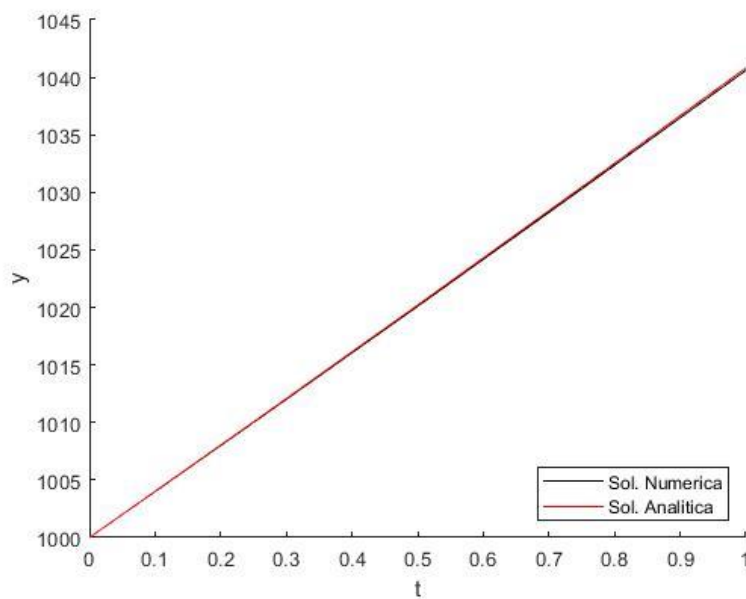


Fonte: Autor

Para $h = 0,25$, temos:

$$y(1) \approx y_4 = (1 + 0,04 * 0,25)^4 * 1000 = 1040,604. \quad (121)$$

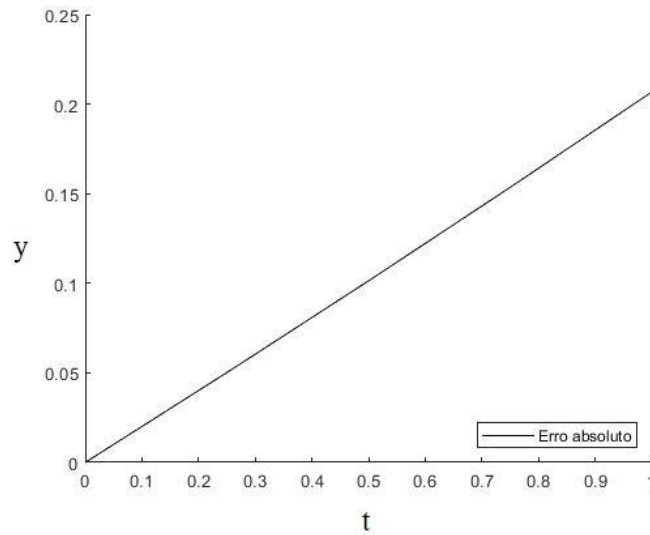
Gráfico 8 – Solução numérica e analítica pelo método de Euler para $h = 0,25$.



Fonte: Autor

O erro máximo do método de Euler para $y(1)$ com o passo $h = 0,25$ é de $0,206764192388164$. As curvas das soluções analítica e numérica podem ser observadas no Gráfico 8. O Gráfico 9 informa o erro cometido pelo método de Euler ponto a ponto.

Gráfico 9 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,25$.

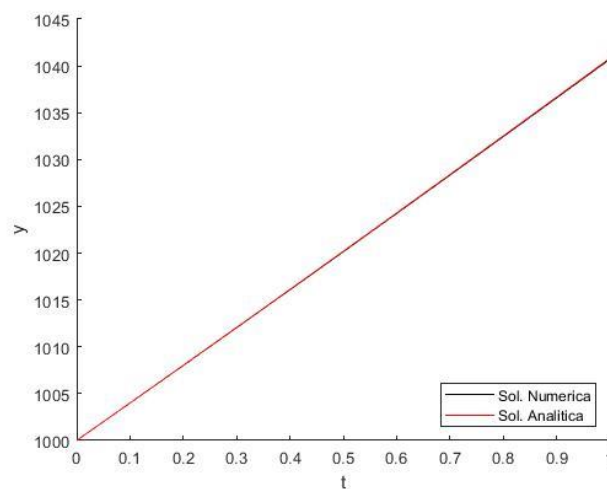


Fonte: Autor

Para $h = 0,1$, temos:

$$y(1) \approx y_{10} = (1 + 0,04 * 0,1)^{10} * 1000 = 1040,7277. \quad (122)$$

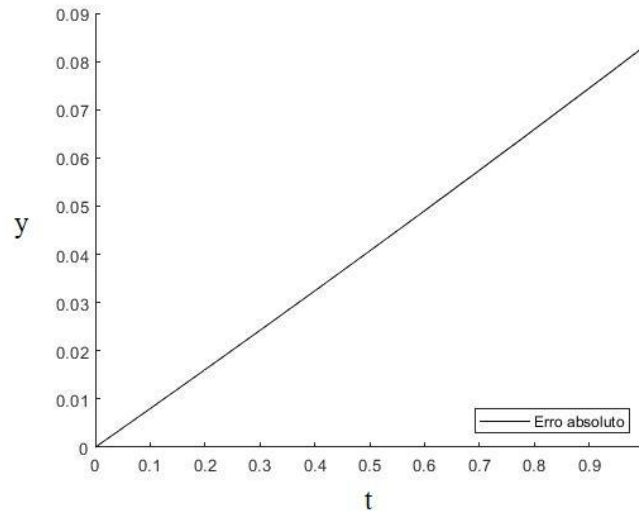
Gráfico 10 – Soluções numéricas e analíticas para $h = 0,1$.



Fonte: Autor

As curvas das soluções numérica e analítica do PVI dado, estão representadas no Gráfico 10. O erro máximo cometido pelo método de Euler para $y(1)$ com o passo $h = 0,1$ é de 0,08040173478139. O Gráfico 11 apresenta a dispersão do erro para $h = 0,1$.

Gráfico 11 – Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,1$.



Fonte: Autor

4.2.2. MÉTODO DE HEUN (EULER APERFEIÇADO)

O método de Heun, ou como também é conhecido, método de Euler Modificado ou Euler Aperfeiçoado consiste, conforme sugere o nome, realizar mudanças favoráveis no método de Euler, baseando-se na utilização da média aritmética das inclinações em t_n e t_{n+1} .

Dado o PVI representado pela Eq. (123)

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y_0 = f(t_0, y_0). \end{cases} \quad (123)$$

Podemos aproximar a solução da EDO por meio da equação da reta Eq. (124),

$$y(t_1) = y(t_0) + m (t_1 - t_0). \quad (124)$$

Dada a aproximação inicial (t_n, y_n) , vamos supor a situação em que a curva $y(x)$ seja a solução da nossa Equação Diferencial. De fato, isso só ocorre em (x_0, y_0) . Por essa aproximação (t_n, y_n) traça-se a reta L_1 cujo coeficiente angular é $y'_n = f(t_n, y_n)$, ou seja,

$$L_1 : z_1(t) = y_n + (t - t_n)y'_n. \quad (125)$$

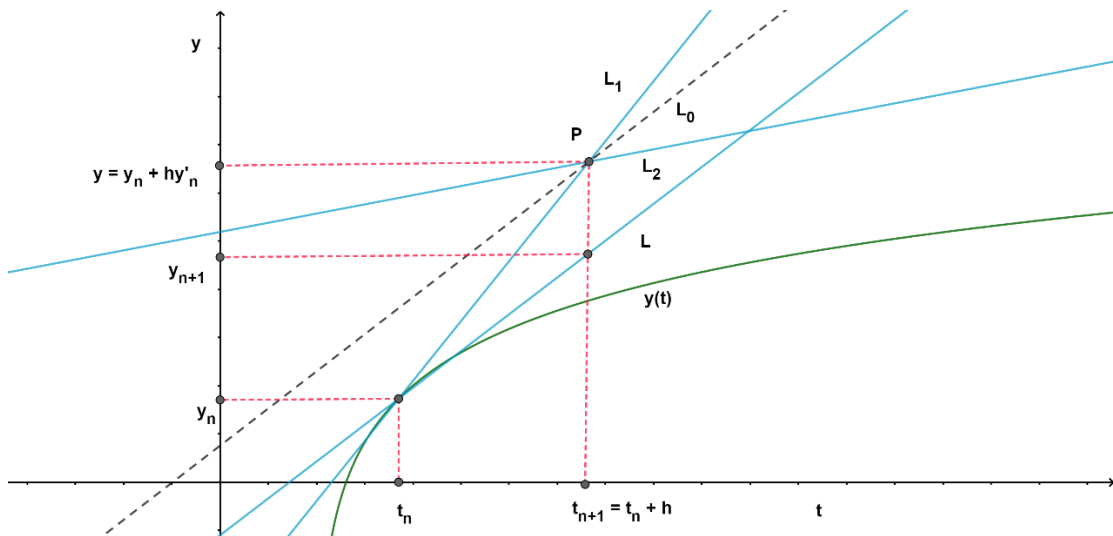
Podemos escrever a Eq. (125) na forma

$$L_1 : z_1(t) = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n). \quad (126)$$

Assim, dado o passo $h = t_{n+1} - t_n$, $z_1(t_{n+1}) = z_1(t_n + h) = y_{n+1}$ do método de Euler. Seja $P \equiv (t_n + h, y_n + hy'_n) = (t_{n+1}, y_{n+1})$. Pelo ponto P , traçamos a reta L_2 , cujo coeficiente angular é $f(t_n + h, y_n + hy'_n) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, representada pela Eq. (127):

$$L_2 : z_2(t) = (y_n + hy'_n) + [t - (t_n + h)]f(t_n + h, y_n + hy'_n). \quad (127)$$

Gráfico 12 - Método de Heun (Runge-Kutta de 2ª ordem).



Fonte: Autor

A reta tracejada L_0 intercepta P e possui como inclinação a média das inclinações das retas L_1 e L_2 , ou seja, sua inclinação é $[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hy'_n)]/2$. A reta L passa por (t_n, y_n) e é paralela a reta L_0 , conforme observa-se no Gráfico 12.

$$L : z(t) = y_n + (t - t_n)[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hy'_n)]/2. \quad (128)$$

Desta maneira o valor obtido aproximado para y_{n+1} pelo método de Heun é $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$, ou seja, podemos escrever a expressão para y_{n+1} conforme a Eq. (129):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hy'_n)], \quad (129)$$

para quaisquer valores de $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Podemos observar que assim como no método de Euler, o método de Heun também é de passo simples e de forma análoga não envolve o cálculos de suas derivadas, uma vez que trabalha apenas com os cálculos de $f(t, y)$.

EXEMPLO 7

Método de Heun (Runge-Kutta 2ª ordem). Analogamente ao que vimos no exemplo do método de Euler. Seja o PVI representado pela Eq. (130). Estime o valor de $y(1)$ utilizando o método de Heun.

$$\begin{cases} y' = 0,04y \Rightarrow f(t_n, y_n) = 0,04y_n \\ y(0) = 1000. \end{cases} \quad (130)$$

Neste caso, sabemos a solução analítica para o PVI dado, que nos fornece o valor exato de $y(t) = 1000e^{0,04t}$, onde $y(1) \approx 1040,8107741923$. Assim, Seja a expressão do método de Heun representada pela Eq. (131):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))]. \quad (131)$$

Substituindo $f(t_n, y_n)$ por $0,04y_n$ de acordo com a Eq. (130) na Eq.(131), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[0,04y_n + 0,04(y_n + h * 0,04y_n)] \quad (132)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[0,04y_n + 0,04y_n + h * 0,04^2y_n] \quad (133)$$

$$y_{n+1} = y_n \left(1 + 0,04h + \frac{h^2}{2} * 0,04^2 \right) \quad (134)$$

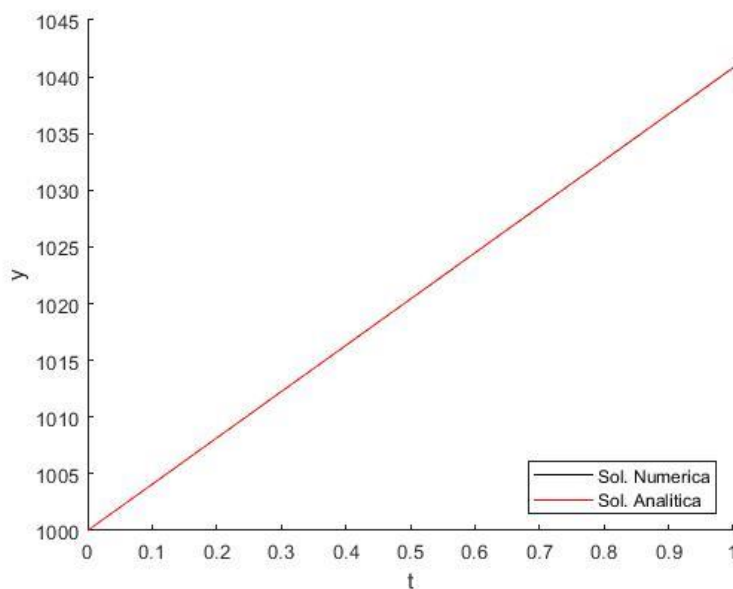
$$y_k = \left(1 + 0,04h + \frac{h^2}{2} * 0,04^2 \right)^k * 1000. \quad (135)$$

Atribuindo valores para h suficientemente pequenos, quanto menor o valor de h , maior será a aproximação para $y(1)$. Assim, para $h = 1$, temos:

$$y(1) \approx y_1 = \left(1 + 0,04 + \frac{1}{2}0,04^2 \right) * 1000 = 1040,8. \quad (136)$$

A partir da implementação computacional descrita no Apêndice B, vamos realizar a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0$, $t = 1$, $y_0 = 1000$ e $N = 1$. O erro máximo cometido é de 0,010774192388226. No Gráfico 13 têm-se as curvas obtidas por meio da solução numérica e analítica da EDO.

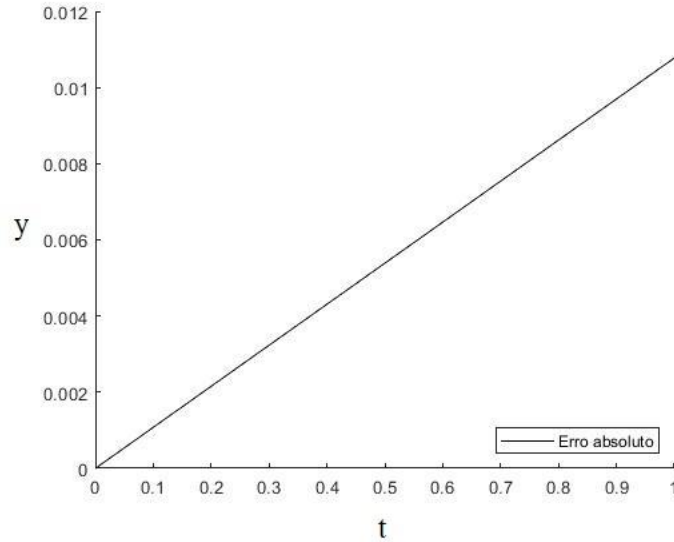
Gráfico 13 - Solução numérica e analítica do PVI.



Fonte: Autor

Para o tratamento do erro cometido pelo método de Euler, vamos considerar o Gráfico 14, que explicita o erro para cada valor de t no intervalo de 0 a 1.

Gráfico14 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.



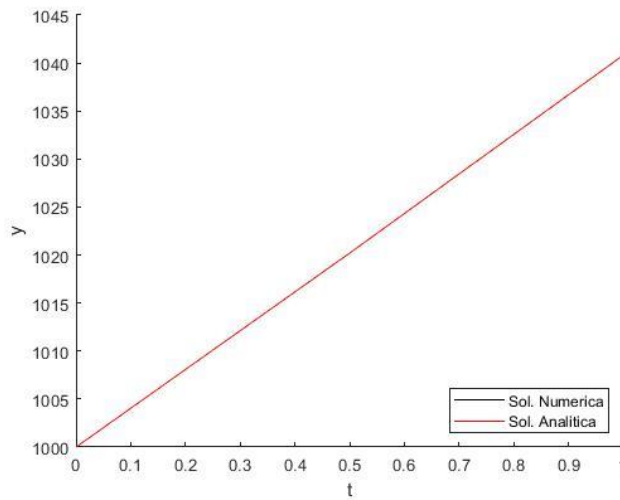
Fonte: Autor

Para $h = 0.5$, temos:

$$\begin{aligned} y(1) \approx y_2 &= \left(1 + 0,04 * 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2} * 0,04^2 \right)^2 * 1000 \\ &= 1040,80804. \end{aligned} \tag{137}$$

O erro máximo do método de Heun para $y(1)$ com o passo $h = 0,5$ é de 0,002734192388061. As soluções numérica e analítica da EDO podem ser visualizadas no Gráfico 15.

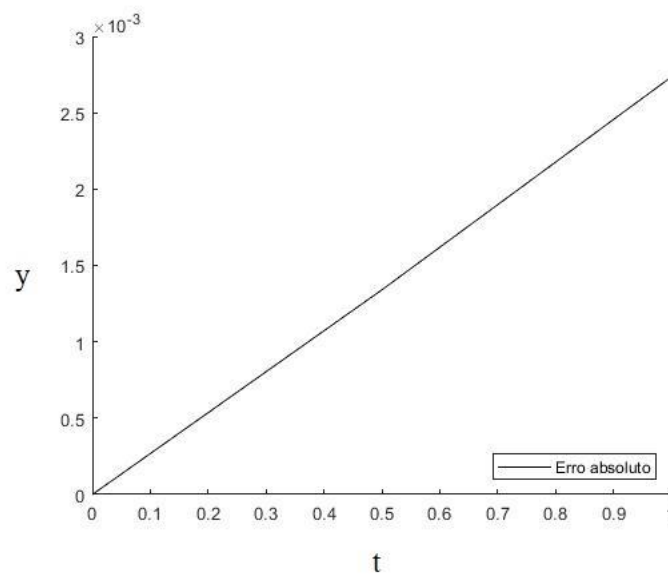
Gráfico 15- Solução numérica e analítica do PVI.



Fonte: Autor

O Gráfico 16 fornece a dispersão de erro do método de Heun ponto a ponto.

Gráfico 16 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.



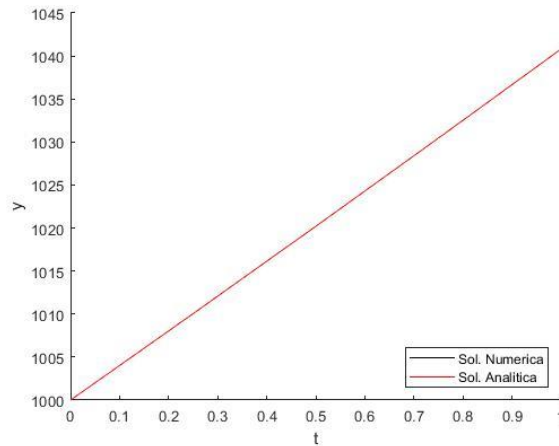
Fonte: Autor

Para $h = 0,25$, temos:

$$y(1) \approx y_4 = \left(1 + 0,04 * 0,25 + \frac{(0,25)^2}{2} * 0,04^2 \right)^4 * 1000 \quad (138)$$
$$= 1040,8100855020.$$

O erro máximo do método de Heun para $y(1)$ com o passo $h = 0,25$ é de $6,886903831855307 \cdot 10^{-4}$. As soluções numérica e analítica da EDO podem ser visualizadas no Gráfico 17.

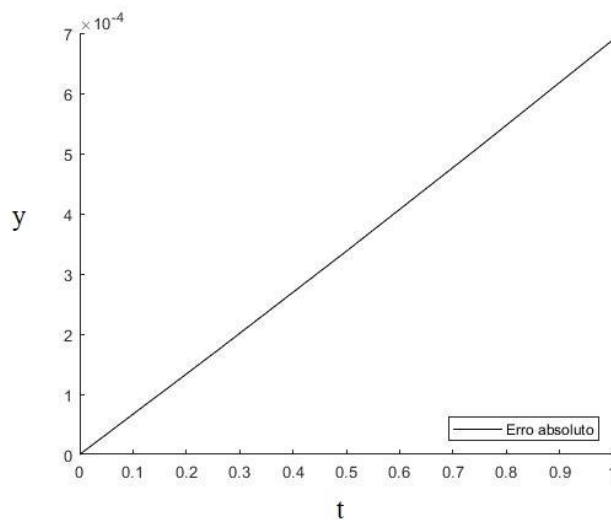
Gráfico 17 - Solução numérica e analítica do PVI.



Fonte: Autor

O Gráfico 18 retrata a dispersão de erro do método de Heun ponto a ponto para $h = 0,25$.

Gráfico 18 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.



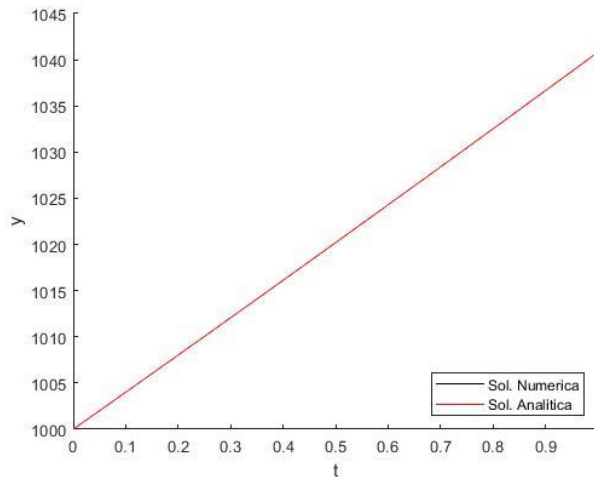
Fonte: Autor

Para $h = 0.1$, temos:

$$y(1) \approx y_{10} = \left(1 + 0,04 * 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} * 0,04^2 \right)^{10} * 1000 \quad (139)$$

$$= 1040,8106635051.$$

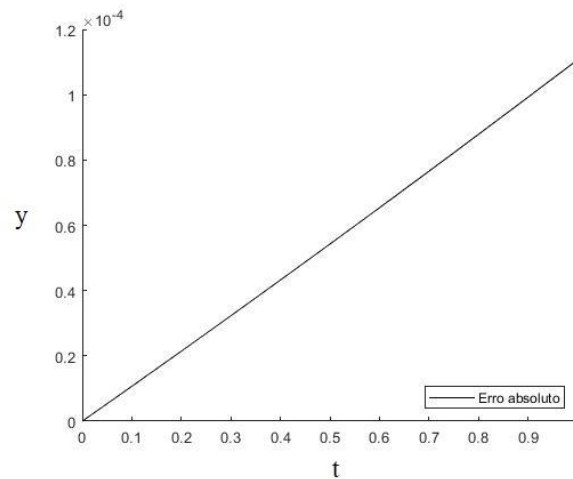
Gráfico 19 - Solução numérica e analítica do PVI.



Fonte: Autor

O erro máximo do método de Heun para $y(1)$ com passo $h = 0,1$ é de $1,106872832679073 \cdot 10^{-4}$. As soluções numérica e analítica da EDO podem ser visualizadas no Gráfico 19. O Gráfico 20 fornece a dispersão de erro do método de Heun ponto a ponto para $h = 0.1$.

Gráfico 20 - Erro absoluto cometido ponto a ponto.



Fonte: Autor

Considerando a solução analítica demonstrada no exemplo do método das Equações Separáveis, $y(1) = 1040,8108$ com quatro casas decimais, podemos observar que à medida que h diminui tanto o método de Euler como o método de Heun obtém-se uma melhor aproximação do valor quando comparado com o analítico. Além disso, que dentre os dois métodos apresentados, como esperado na maioria dos casos, o método de Heun nos fornece melhores resultados. Para $h = 0,1$, $y(1) \approx 1040,8107$, por Heun enquanto que para o método de Euler o valor obtido foi de $y(1) \approx 1040,7277$, com uma diferença de aproximadamente $0,083$ entre os valores.

Observemos ainda que para $t_0 = 0$, então

$$t_n = t_0 + n * h = n * h. \quad (140)$$

A série de Taylor de $e^{0,04t}$, em torno de $t = 0$ pode ser escrita na forma da Eq.(141)

$$e^{0,04h} = 1 + 0,04t + 0,04^2 \frac{t^2}{2} + (0,04)^3 \frac{t^3}{3!} + \dots . \quad (141)$$

Assim,

$$e^{0,04h} = 1 + 0,04h + 0,04^2 \frac{h^2}{2} + (0,04)^3 \frac{h^3}{3!} + \dots . \quad (142)$$

Observa-se que tanto $(1 + 0,04h)^{1/h}$ do método de Euler como $\left(1 + 0,04h + 0,04 \frac{h^2}{2}\right)^n$ do método de Heun são aproximações para $e^{0,04hn} = e^{0,04t_n}$. A segunda aproximação está mais próxima mesmo do valor real e , como estamos interessados em $y(1)$, seja, $t = 1$, então $n = \frac{1}{h}$. Assim, à medida que h diminui nos aproximamos da solução analítica, uma vez que

$$e^{0,04} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 0,04h)^{1/h}. \quad (143)$$

4.2.3. FORMA GERAL DOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Os métodos de Runge-Kutta são métodos numéricos de passo simples para resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias, de modo que a solução aproximada y_{n+1} é obtida utilizando apenas os termos t_n e y_n . Um método de Runge-Kutta de ordem ρ não requer o cálculo de qualquer derivada de $f(t, y)$, entretanto necessita de uma função ϕ definida avaliando $f(t, y)$ em determinados pontos. Desta forma os métodos de Runge-Kutta são descritos por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\phi(t_n, y_n) \\ \forall n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{144}$$

Em que ϕ é uma função de t e y dependente indiretamente de $f(t, y)$ e do tamanho do comprimento h .

Estes métodos se apresentaram como ótimos aprimoramentos do método de expansão em série de Taylor, uma vez que neste método as iterações são realizadas envolvendo o cálculo de derivadas. Para que um método numérico seja classificado como do tipo Runge-Kutta, devemos realizar uma comparação ao método de expansão em série de Taylor em termos da ordem de h . Neste trabalho, realizaremos a demonstração apenas para o método de Heun, entretanto as demais demonstrações são encontradas facilmente na literatura acadêmica.

Ao considerar $\phi(t, y) = f$ e substituindo na Eq. (144), obtemos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ \forall n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{145}$$

que coincide com o método de Euler visto anteriormente. Assim, o método de Euler consiste no método de Runge-Kutta de ordem $\rho = 1$. Para verificar este fato com mais detalhes, basta analisar se há concordância com o método de expansão em série de Taylor até os termos de 1ª ordem em h .

O método de Heun consiste em um método de Runge-Kutta de ordem $\rho = 2$ e podemos pensar que ele pertence a uma classe mais geral de métodos do tipo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \quad (146)$$

$$\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

onde os valores de k_1 e k_2 são dados por

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1). \end{cases} \quad (147)$$

Ou seja, de forma equivalente,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)) \right). \quad (148)$$

$$\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Observe que esse é um método de Runge-Kutta com

$$\phi(t, y) = \frac{1}{2} \left(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)) \right) \quad (149)$$

Em outras palavras, podemos reescrever a Eq. (148) da seguinte forma

$$y_{n+1} = y_n + ha_1 f(t_n, y_n) + ha_2 f(t_n + b_1 h, y_n + b_2 h y'_n). \quad (150)$$

Ao comparar a Eq.(150) com a expressão do método de Heun, podemos concluir que

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 \text{ e } b_1 = 1 \\ a_2 &= 1/2 \text{ e } b_2 = 1. \end{aligned} \quad (151)$$

A partir da Eq. (150) é possível observar que temos quatro parâmetros livres, sendo estes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 de modo que é necessária a inserção de um novo parâmetro para que de fato a expressão esteja de acordo com a expansão em série de Taylor até os termos de h^1 . Em relação aos termos de ordem h^2 para que haja essa correspondência entre os métodos, são necessários mais dois parâmetros correspondentes aos termos de $h^2 f_t$ e $h^2 f f_y$. De fato, ao expandir os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
& f(t_n + b_1 h, y_n + b_2 h y'_n) = \\
& = f(t_n, y_n) + b_1 h f_t(t_n, y_n) + b_2 h f(t_n, y_n) f_y(t_n, y_n) + \\
& \quad + \text{termos em } h^2.
\end{aligned} \tag{152}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + a_1 h f(t_n, y_n) + \\
& + a_2 h [f(t_n, y_n) + b_1 h f_t(t_n, y_n) + b_2 h f(t_n, y_n) f_y(t_n, y_n)] + \\
& + \text{termos em } h^3.
\end{aligned} \tag{153}$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + (a_1 + a_2) h f(t_n, y_n) + \\
& + (a_2 b_1) h^2 f_t(t_n, y_n) + (a_2 b_2) h^2 f(t_n, y_n) f_y(t_n, y_n) + \\
& + \text{termos em } h^3.
\end{aligned} \tag{154}$$

Desta forma, Pelo método de série de Taylor até os termos em h^2 é preciso que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = 1/2 \\ a_2 b_2 = 1/2. \end{cases} \tag{155}$$

Conforme já salientado anteriormente, a Eq. (155) representa um sistema de equações lineares com quatro variáveis e três equações. Desta maneira nosso sistema admite um grau de liberdade no qual denotamos pelo parâmetro w . Tomando $a_2 = w \neq 0$, obtemos

$$\begin{cases} a_1 = 1 - w \\ b_1 = b_2 = \frac{1}{2w}. \end{cases} \tag{156}$$

Desta maneira, a expressão geral para o método de Runge-Kutta de 2ª ordem é representada pela Eq. (157)

$$y_{n+1} = y_n + h \left[(1-w)f(t_n, y_n) + wf \left(t_n + \frac{h}{2w}, y_n + \frac{h}{2w} f(t_n, y_n) \right) \right]. \quad (157)$$

para valores de $n = 0, 1, 2, \dots$

A partir do desenvolvimento teórico, vamos verificar se o método de Heun satisfaz as condições necessárias para ser classificada neste método acerca do método numérico de Runge-Kutta de 2ª ordem. Para isso, devemos equiparar se sua expressão coincide com a do método de séries de Taylor até os termos de 2ª ordem em h , de acordo com a Eq. (158):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_t(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f(t_n, y_n) f_x(t_n, y_n). \quad (158)$$

Com seu erro dado pela Eq. (153), analogamente ao realizado pelo método de Euler.

$$e(t_{n+1}) = \frac{h^2}{3!} y'''(\xi_{t_{n+1}}). \quad (159)$$

No método de Heun, trabalha-se com $f(t_n + h, y_n + hy'_n)$ desenvolvendo $f(t, y)$ pela expansão em série de Taylor em torno de (t_n, y_n) , assim:

$$f(t, y) = f(t_n, y_n) + f_t(t_n, y_n)(t - t_n) + f_y(t_n, y_n)(y - y_n) + \frac{1}{2} [f_{tt}(\alpha, \beta)(t - t_n)^2 + 2f_{ty}(\alpha, \beta)(t - t_n)(y - y_n) + f_{yy}(\alpha, \beta)(y - y_n)^2]. \quad (160)$$

Com α entre t_n e $t_n + h$ e β entre y_n e $y_n + hy'_n$. Desta forma,

$$f(t_n + h, y_n + hy'_n) = f(t_n, y_n) + f_t(t_n, y_n)h + f_y(t_n, y_n)hy'_n + \frac{h^2}{2} [f_{tt}(\alpha, \beta) + 2f_{ty}(\alpha, \beta)y'_n + f_{yy}(\alpha, \beta)y_n'^2]. \quad (161)$$

Então o método de Heun se torna:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, y_n) + f(t_n, y_n + hf(t_n, y_n)) \right. \\
 + hf(t_n, y_n)f_y(t_n, y_n) \\
 + \frac{h^2}{2} [f_{tt}(\alpha, \beta) + 2f(t_n, y_n)f_{ty}(\alpha, \beta) \\
 \left. + f^2(t_n, y_n)f_{yy}(\alpha, \beta)] \right\}. \tag{162}
 \end{aligned}$$

A partir da Eq.(162), temos

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} y_n + hf(t_n, y_n) + \\
 + \frac{h^2}{2} [f_t(t_n, y_n) + f(t_n, y_n)f_y(t_n, y_n)] + \\
 + \frac{h^3}{4} [f_{tt}(\alpha, \beta) + 2f(t_n, y_n)f_{ty}(\alpha, \beta) + f^2(t_n, y_n)f_{yy}(\alpha, \beta)]. \tag{163}
 \end{aligned}$$

Esta expressão está de acordo com a do método de série de Taylor até os termos de ordem h^2 , demonstrando ser um método de Runge-Kutta de 2ª ordem.

Em relação aos métodos numéricos de Runge-Kutta de ordem mais alta, apresentaremos somente as expressões para os métodos de 3º e 4ª ordem respectivamente uma vez que não estão de acordo com a proposta deste trabalho. Entretanto, o procedimento para obtenção de tais métodos segue a mesma linha de raciocínio supracitada. Assim, o método de Runge-Kutta de 3ª ordem pode ser expresso pela Eq. (164).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3. \tag{164}$$

De modo que os valores de k_1 , k_2 e k_3 são representados por

$$\begin{aligned}
 k_1 = hf(t_n, y_n) \\
 k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \tag{165}
 \end{aligned}$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right).$$

De forma análoga, podemos representar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem pela Eq. (166)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (166)$$

Tem-se k_1 , k_2 , k_3 e k_4 expressos pela Eq. (167)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \quad (167)$$

Os métodos de Runge-Kutta apresentam dois principais aspectos positivos em relação aos demais métodos, especialmente no que diz respeito à dispensabilidade do uso de derivadas em seus cálculos e se tratarem de um método auto iniciante. Entretanto, assim como todo método numérico possui uma desvantagem que concerne ao fato de sua dificuldade no tratamento do erro cometido. Ao majorarmos este valor, perdemos parte de sua informação que poderia ser de grande utilidade para o tratamento do intervalo h pertinente.

Com todo o aporte teórico devidamente apresentado e explicado, encerra-se o Capítulo 4 sobre Métodos Matemáticos. Estes métodos serão ferramentas para a realização dos estudos da Equação de Friedmann Plano apresentados no Capítulo 5.

5. APLICAÇÃO NAS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Os modelos cosmológicos de Friedmann, conforme dito anteriormente são modelos expansionistas do universo e descrevem a relação de alteração nas distâncias dos cosmos por meio de um parâmetro denominado de fator de escala. Este fator de escala, ao considerar modelos expansionistas assumem valores crescentes e podem ser descritos pela equação clássica de Friedmann, isto é, sem a inserção da constante cosmológica

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (168)$$

Os modelos expansionistas de Friedmann são descritos pela taxa de variação relativa do fator de escala $R(t)$; pelo parâmetro de Hubble $H_0 = R/R(t_0)$, no qual t_0 é a idade de um determinado modelo, e o parâmetro de densidade $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{co}$, onde ρ_0 é a densidade de massa do modelo e $\rho_{co} = 3H_0/8\pi G$ é a densidade do modelo plano, também chamada de densidade crítica de acordo com Viglioni e Soares (2011).

As interpretações acerca das soluções clássicas da Equação de Friedmann descrita na Eq. (1) nos fornecem três resultados distintos a partir das considerações do parâmetro de densidade Ω_0 . Friedmann Plano tomando $\Omega_0 = 1$; o Friedmann Fechado para $\Omega_0 > 1$ e o Friedmann Aberto com $\Omega_0 < 1$ e, vamos considerar para isto, $R(t_0) = 1$, por convenção, para valores arbitrários de Ω_0 .

Em relação às soluções clássicas da Equação de Friedmann vamos neste trabalho apresentar apenas o modelo de Friedmann Plano, uma vez que o objetivo é determinar suas soluções de forma analítica e numérica para que posteriormente se realize as devidas comparações. Entretanto iremos apresentar de antemão a solução desejada para Friedmann Plano, juntamente com as demais soluções para Friedmann Fechado e para Friedmann Aberto para que o leitor tome ciência de sua existência e forma. Sendo assim, a solução para o modelo de Friedmann Plano ($\Omega_0 = 1$) se torna

$$R_{pl}(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (169)$$

No qual o valor de $t_o = 2/(3H_0)$ representa a idade do universo no modelo plano. Ao considerarmos o modelo de Friedmann Fechado ($\Omega_0 > 1$) a solução é representada em sua forma paramétrica pelas Eqs. (170) e (171)

$$R_{fe}(x) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)} [1 - \cos(x)] \quad (170)$$

e

$$t(x) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [x - \sin(x)]. \quad (171)$$

Para valores do parâmetro é $x \geq 0$. Por último, consideremos o modelo de Friedmann Aberto ($\Omega_0 < 1$), no qual sua solução é expressa pelas Eqs. (172) e (173)

$$R_{ab}(x) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)} [\cos(x) - 1] \quad (172)$$

e

$$t(x) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\sin(x) - x]. \quad (173)$$

As soluções para o modelo de Friedmann Plano serão obtidas por meio dos métodos analíticos das Equações Separáveis e pelo método da Equação de Bernoulli e pelos métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem pois são métodos simples e robustos com alto grau de confiabilidade, uma vez que sua teoria fora bem consolidada no decorrer dos anos. Além disso, ambos os métodos utilizados neste trabalho foram apresentados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e Cálculo Numérico e contemplam uma vasta gama de Equações Diferenciais incluindo a Equação de Friedmann.

5.1. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FRIEDMANN PLANO

Ao considerarmos a Equação de Friedmann Plano, apresentaremos sua solução a partir da utilização dos métodos das equações separáveis e Equação de Bernoulli, uma vez que sua teoria fora apresentada e discutida na Seção 4.1.

5.1.1. EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Vamos considerar primeiramente o método analítico das Equações Separáveis. Para isto, tomemos a Equação geral de Friedmann e, para facilitar a solução vamos copiá-la e expressá-la novamente pela Eq. (174).

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2(\Omega_0 - 1). \quad (174)$$

Tomando o valor do parâmetro de densidade $\Omega_0 = 1$, temos

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{R} = 0. \quad (175)$$

A partir das devidas simplificações na Eq. (175) obtemos

$$\sqrt{R} \left(\frac{dR}{dt}\right) = H_0. \quad (176)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (176) em relação a t , encontramos a partir do teorema fundamental do cálculo parte I

$$\int \sqrt{R} dR = \int H_0 dt. \quad (177)$$

Logo,

$$R(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3}. \quad (178)$$

Tomando $t_o = 2/(3H_0)$, obtemos

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{2/3}. \quad (179)$$

Temos a partir da Eq.(179) a solução para a Equação de Friedmann Plano, pelo método das Equações Separáveis o que condiz com a Eq.(169) apresentada no Capítulo 5.

5.1.2. MÉTODO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Vamos considerar primeiramente o método analítico das Equação de Bernoulli. Para isto, tomemos novamente a Equação geral de Friedmann, expressa pela Eq. (180)

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2(\Omega_0 - 1). \quad (180)$$

Para $\Omega_0 = 1$, temos a equação para o modelo de Friedmann Plano:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2}{R} = 0. \quad (181)$$

Podemos reescrever a Eq. (181) de modo que

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = H_0 R^{-1/2}. \quad (182)$$

Seja a Equação de Bernoulli em R e t , da forma:

$$\frac{dR}{dt} + p(t)R = q(t)R^n. \quad (183)$$

Comparando a Eq. (182) com a Eq.(183), podemos afirmar que $n = -1/2$, $p(t) = 0$, $q(t) = H_0$. Consideremos a mudança de variável de acordo com a Eq. (184)

$$u(t) = R^{3/2}. \quad (184)$$

Isolando o termo $R(t)$ em função de $u(t)$ obtemos a Eq. (185)

$$R = u^{2/3}. \quad (185)$$

Realizando a diferenciação em ambos os membros da Eq. (185) em relação a t , resulta na Eq. (186)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} u^{-1/3} \frac{du}{dt}. \quad (186)$$

Substituindo a Eq. (185) e Eq. (186) na Eq. (183), encontramos

$$\frac{2}{3} u^{-1/3} \frac{du}{dt} + 0 \cdot u^{2/3} = H_0 \left(u^{2/3} \right)^{-1/2}. \quad (187)$$

Após os devidos cálculos e simplificações

$$\frac{du}{dt} = \frac{3}{2} H_0. \quad (188)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (188) em relação a t

$$\int \frac{du}{dt} dt = \frac{3}{2} \int H_0 dt. \quad (189)$$

A partir da Eq. (189) encontramos

$$u(t) = \frac{3}{2} H_0 t + C. \quad (190)$$

Entretanto, é necessário realizar a alteração da variável de acordo com a Eq. (185). Assim, a solução analítica para a Equação de Friedmann Plano pode ser expressa por

$$R = \left(\frac{3}{2} H_0 t + C \right)^{2/3}. \quad (191)$$

Sem perda de generalidade, obtemos

$$R(t) = \left[\frac{3}{2} (H_0 t + C) \right]^{2/3}. \quad (192)$$

Se considerarmos $t_o = 2/(3H_0)$ por definição, obtemos

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3}. \quad (193)$$

Assim como obtido pelo método das Equações Separáveis, a Eq. (193) fornece a solução para a Equação de Friedmann Plano pela mudança de variável proposta pelo método da Equação de Bernoulli.

5.2. SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN PLANO

Para a obtenção da solução da Equação de Friedmann Plano, consideremos os métodos de Runge-Kutta de primeira, segunda e quarta ordem conforme descritos na Seção 4.2. Uma vez que apresenta um método robusto e com sua teoria bem desenvolvida. Para isso, seja a Equação de Friedmann descrita pela Eq. (194)

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (194)$$

Considerando o valor do parâmetro de densidade $\Omega_0 = 1$, obtemos

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{H_0^2}{R} = 0. \quad (195)$$

De modo a considerar a escala para t em função de $2/(3H_0)$, tomemos $H_0 = 1$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R}. \quad (196)$$

A Eq. (196) após as devidas simplificações se torna

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\sqrt{R}}. \quad (197)$$

Para facilitar a analogia com a teoria desenvolvida para o método de Euler, consideremos a substituição da variável fator de escala R para y .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (198)$$

Analogamente,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (199)$$

A Eq. (199) consiste na função principal do método de Euler descrito pela Eq. (87) na seção 4.2.1.

$$\sqrt{y} \frac{dy}{dt} = 1. \quad (200)$$

Integrando ambos os membros da Eq. (199) em relação a t , obtém-se

$$\int \sqrt{y} dy = \int 1 dt. \quad (201)$$

A solução da Eq. (201) está representada pela Eq. (202)

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}t\right)^{2/3}. \quad (202)$$

De acordo com o PVI, $R(t_0) = 1$, tomemos então $t_0 = 0,1$, assim, $R(t_0) = y(t_0) = y(0,1)$

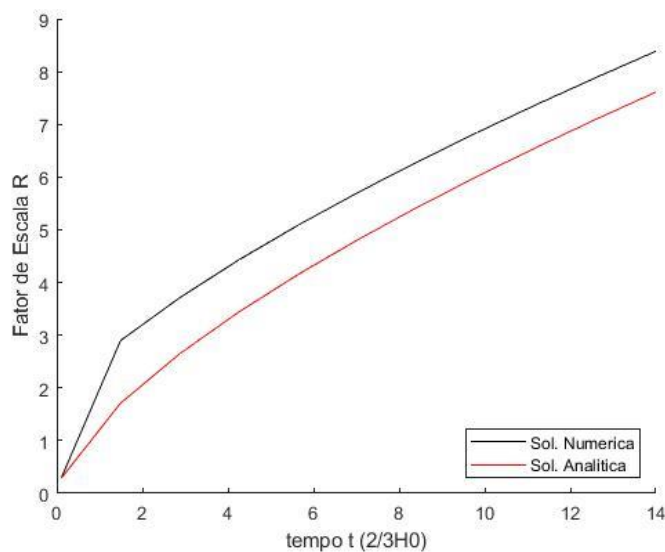
$$y(0,1) = \left(\frac{3}{2} * 0,1\right)^{2/3} = 0,2823108086643. \quad (203)$$

A Eq. (203) fornece o valor de y_0 do método de Euler, que será de extrema importância para o desenvolvimento dos métodos numéricos apresentados nas seções seguintes.

5.2.1. MÉTODO DE EULER

A partir da implementação computacional, vamos realizar a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 14$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 10$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção das soluções dos Exemplos 5 e 6 e está descrito e comentado no Apêndice A. Assim, o erro máximo cometido pelo método de Euler de 1,188959537994234. O Gráfico 21 informa as soluções numérica e analítica, no qual podemos observar que para (t_0, y_0) as curvas das soluções analítica e numérica coincidem, entretanto para os demais pontos podemos observar o erro cometido.

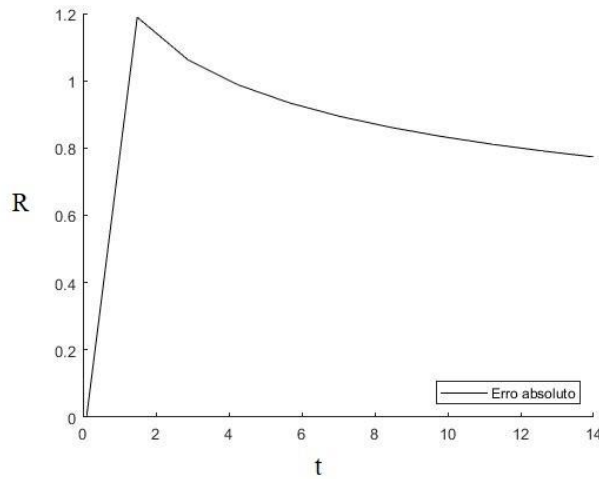
Gráfico 21 – Curvas da solução analítica e numérica para Friedmann Plano com $h = 1,39$.



Fonte: Autor

No Gráfico 22 tem-se a dispersão de erro do método de Euler ponto a ponto para a Equação de Friedmann Plano.

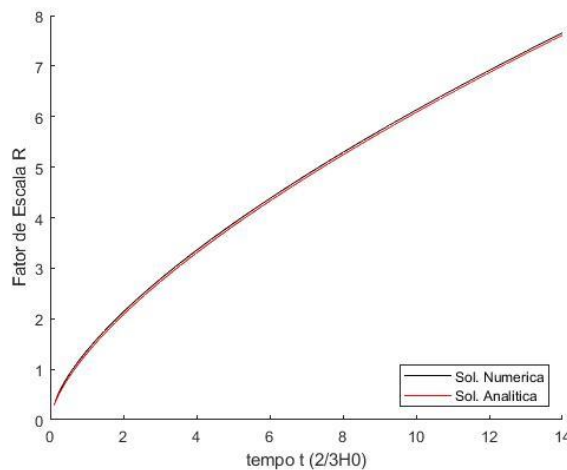
Gráfico 22 – Erro cometido ponto a ponto pelo método de Euler para $h = 1,39$.



Fonte: Autor

Consideremos a implementação computacional para $N = 100$ subintervalos, ou seja, para $h = 0,139$, de modo a se obter uma melhor aproximação pelo método de Euler. O erro máximo é de 0.054449407147333. O Gráfico 23 mostra as curvas das soluções analítica e numérica para $N = 100$ subintervalos.

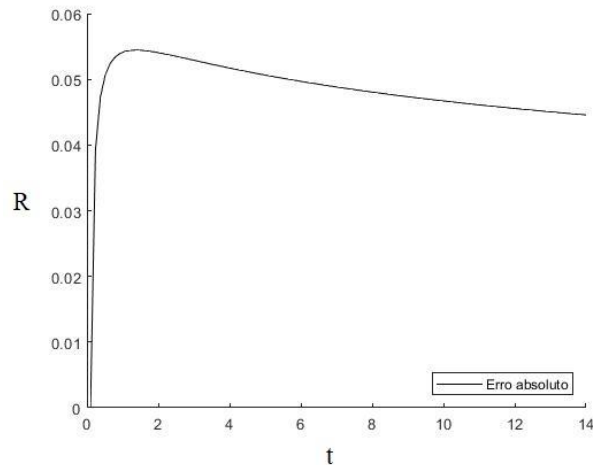
Gráfico 23– Solução analítica e numérica para Friedmann Plano com $h = 0,139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro do método de Euler para o Friedmann Plano com $h = 0,139$ pode ser visualizada no Gráfico 24.

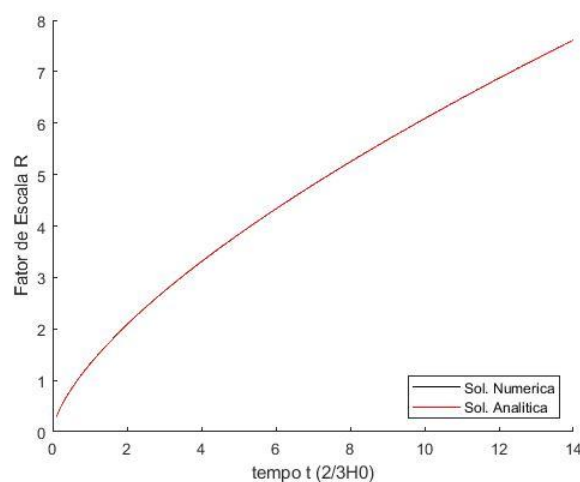
Gráfico 24– Erro cometido pelo método de Euler para $h = 0,139$.



Fonte: Autor

Por fim, consideremos $N = 1000$ subintervalos. O erro máximo cometido pelo método é de 0.004863157297794. No Gráfico 25, podemos observar que as curvas quase não apresentam distinção para $N = 1000$ subintervalos.

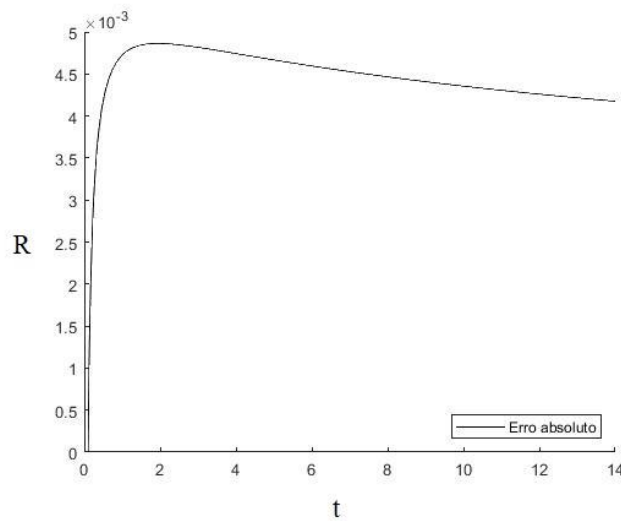
Gráfico 25 – Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro para o método de Euler está de acordo com o Gráfico 26.

Gráfico 26 – Erro do método de Euler para $h = 0,0139$.

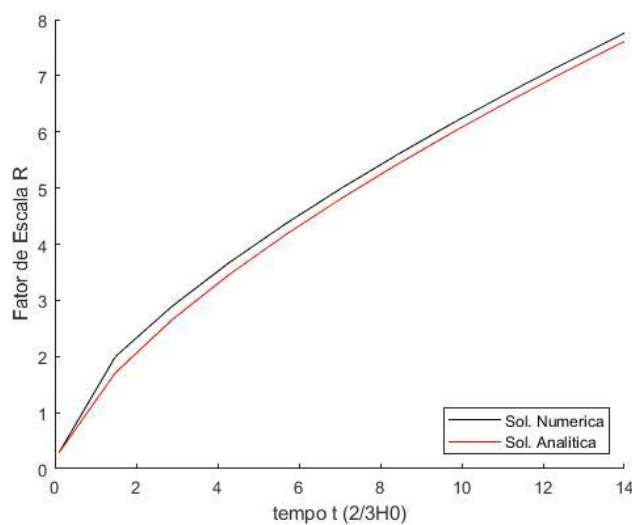


Fonte: Autor

5.2.2. MÉTODO DE HEUN

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0.1$, $t = 14$, $y_0 = 0.2823108086643$ e $N = 10$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção das soluções do Exemplo 7 e está descrito e comentado no Apêndice B. O erro máximo cometido pelo método de Heun é de 0.289150777309674. O Gráfico 27 apresenta as soluções numérica e analítica para Friedmann Plano pelo método de Heun.

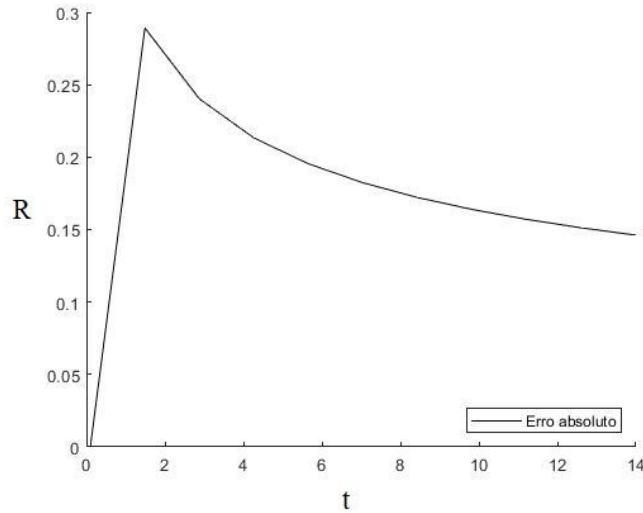
Gráfico 27 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 1,39$.



Fonte: Autor

O Gráfico 28 fornece a dispersão de erro do método de Heun ponto a ponto para a Equação de Friedmann Plano.

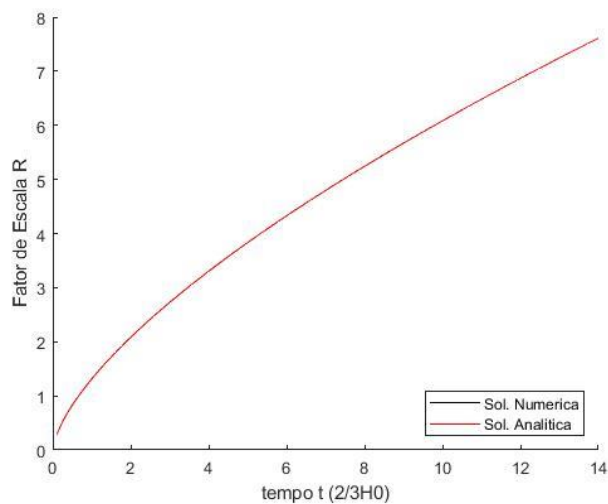
Gráfico 28 - Erro do método de Heun para $h = 1,39$.



Fonte: Autor

Consideremos $N = 100$ subintervalos, ou seja, para $h = 0,139$, de modo a se obter uma melhor aproximação pelo método de Heun. O valor do erro máximo é de 0.002795179001045. O Gráfico 29 mostra as curvas das soluções analítica e numérica para $N = 100$ subintervalos.

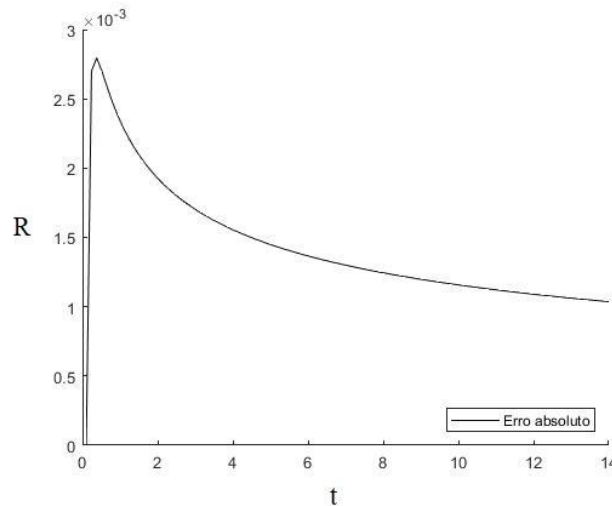
Gráfico 29 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro do método de Heun para o Friedmann Plano com $h = 0,139$ pode ser visualizado no Gráfico 30.

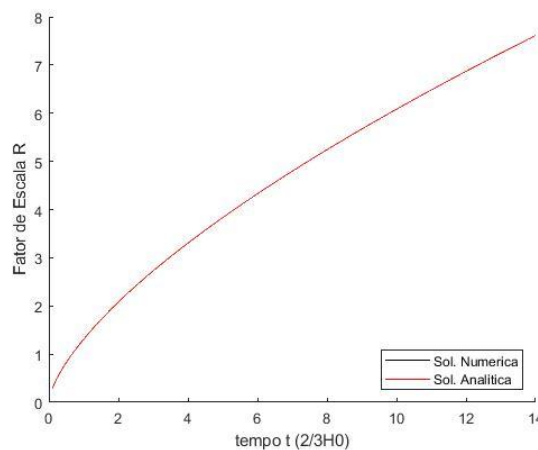
Gráfico30 - Erro do método de Heun para $h = 0,139$.



Fonte: Autor

Por fim, consideremos $N = 1000$ subintervalos. O erro máximo cometido pelo método é de $1,729981414766435 \cdot 10^{-5}$. No Gráfico 31 podemos observar que as curvas não apresentam distinção para $N = 1000$ subintervalos.

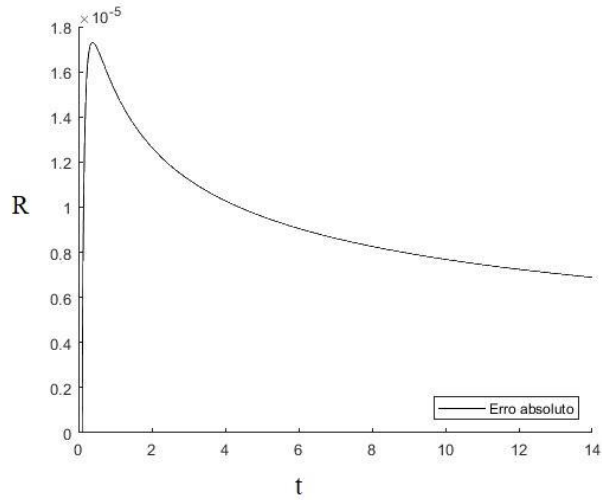
Gráfico 31 – Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro para o método de Heun está de acordo com o Gráfico 32.

Gráfico 32 - Erro do método de Heun para $h = 0,0139$.

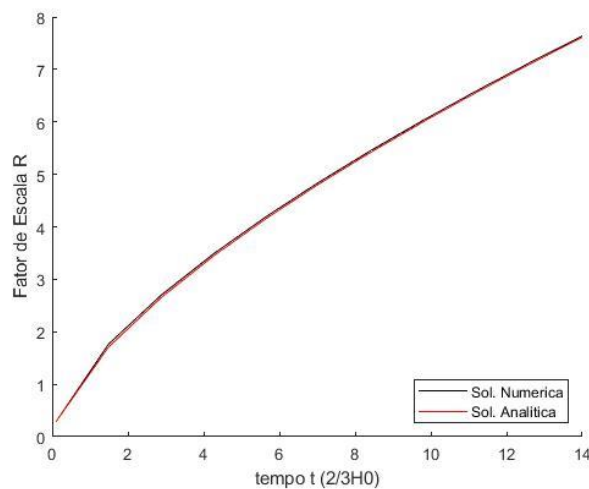


Fonte: Autor

5.2.3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

Efetuamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 14$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 10$. O código responsável pela implementação está descrito e comentado no Apêndice C. Assim, o valor do erro máximo cometido pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem é de $0,056268629159315$. No Gráfico 33 têm-se as soluções numérica e analítica para $h = 1,39$.

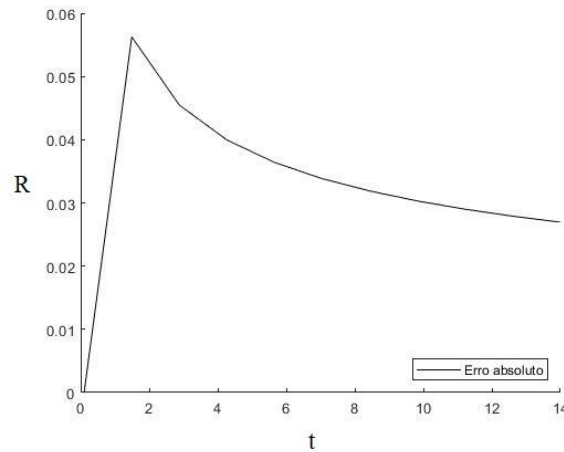
Gráfico 33 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 1,39$.



Fonte: Autor

O Gráfico 34 apresenta a dispersão de erro do método de Runge-Kutta de 4ª ordem ponto a ponto para a Equação de Friedmann Plano.

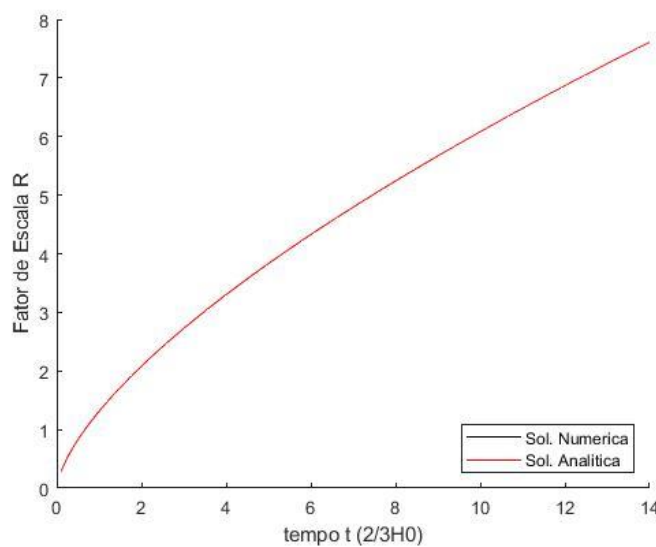
Gráfico 34 - Erro do método de Runge-Kutta para $h = 1,39$.



Fonte: Autor

Consideremos $N = 100$ subintervalos, ou seja, para $h = 0,139$ de modo a se obter uma melhor aproximação pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem. O valor do erro máximo é de 1.04857478424369410^{-4} . O Gráfico 35 mostra as curvas das soluções analítica e numérica.

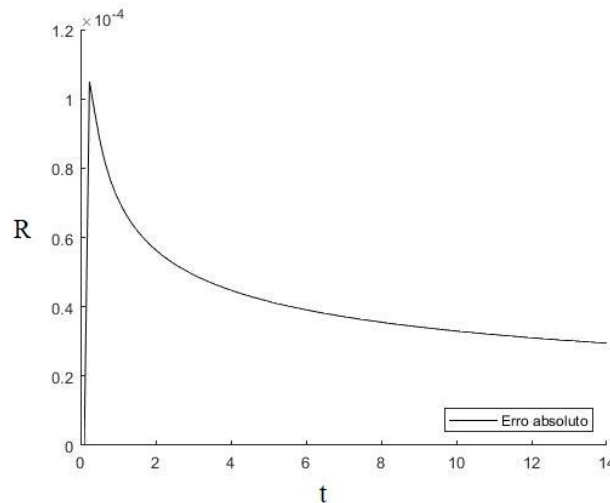
Gráfico 35 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro do método de Runge-Kutta de 4ª ordem para o Friedmann Plano com $h = 0,139$ pode ser visualizada no Gráfico 36.

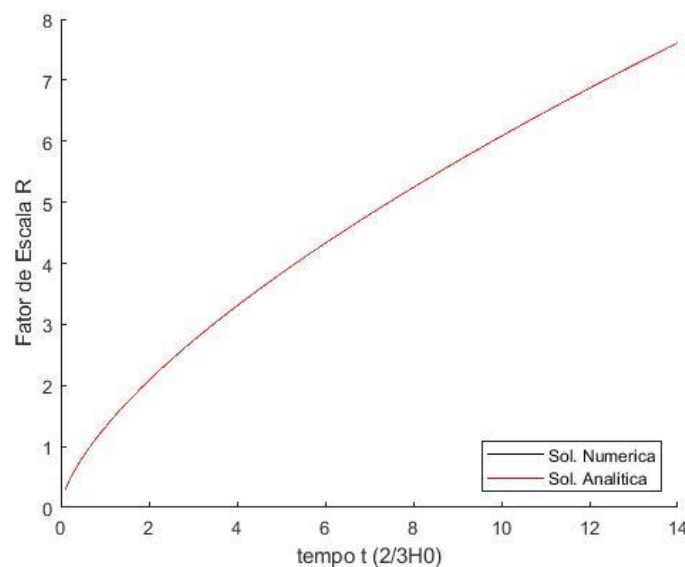
Gráfico 36 - Erro do método para $h = 0,139$.



Fonte: Autor

Por fim, consideremos $N = 1000$ subintervalos. O erro máximo cometido pelo método é de $1.20032964678845 \cdot 10^{-8}$. No Gráfico 37 podemos observar que as curvas não apresentam distinção para $N = 1000$ subintervalos.

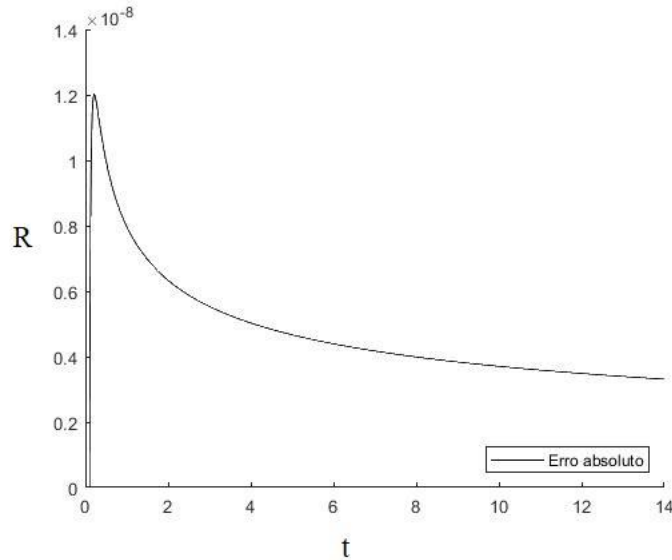
Gráfico 37 - Curvas das soluções analítica e numérica para $h = 0,0139$.



Fonte: Autor

A dispersão do erro para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem está de acordo com o Gráfico 38.

Gráfico 38 - Erro do método de Runge-Kutta para $h = 0,0139$.



Fonte: Autor

A Tabela 1 informa os valores dos erros máximos absolutos cometidos pelos métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem para a solução da Equação de Friedmann Plano com $N = 10, 100$, e 1000 subintervalos, ou seja, para valores de $h = 1,39; 0,139$ e $0,0139$.

Tabela 1 - Erro máximo dos métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem.

Passo h	Erro máximo absoluto para Friedmann Plano		
	Euler	Heun	Runge-Kutta de 4ª ordem
1,39	1,188959537994234	0,289150777309674	0,056268629159315
0,139	0,054449407147333	0,002795179001045	$1,048574784243694 \cdot 10^{-4}$
0,0139	0,004863157297794	$1,729981414766430 \cdot 10^{-5}$	$1,20032964678845 \cdot 10^{-8}$

Fonte: Autor.

A partir da análise dos dados obtidos na Tabela 1 nota-se que à medida que o número de subintervalos N aumenta, ou seja, o comprimento h do intervalo diminui, o erro

cometido por cada método também diminui, de modo que a convergência do método de Heun se apresenta mais rápida do que no método de Euler, que por sua vez é mais lenta do que no método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Isso nos mostra que os resultados obtidos condizem com a teoria desenvolvida e apresentada nas Seções 4.1 e 4.2. Além disso, podemos observar as diferenças entre os erros para $h = 1.39, 0.139, 0.0139$ entre os métodos de Heun e Euler; Runge-Kutta de 4ª ordem e Runge-Kutta de 4ª ordem e Euler conforme a Tabela 2.

Tabela 2 - Diferença entre o erro dos métodos numéricos para Friedmann Plano.

Passo h	Diferença entre o erro máximo dos métodos numéricos		
	Heun e Euler	Runge-Kutta 4ª ordem e Heun	Runge-Kutta de 4ª ordem e Euler
1,39	0,89980876068456	0,232882148150359	1,13269090883491
0,139	0,051654228146288	0,002690321522621	0,0543448196689086
0,0139	$4,8458574836463357 \cdot 10^{-7}$	$1,72878108511967 \cdot 10^{-5}$	$4,8631452944975310^{-3}$

Fonte: Autor

5.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN ABERTO

Para a obtenção da solução da Equação de Friedmann Aberto, consideremos os métodos de Runge-Kutta de primeira, segunda e quarta ordem conforme descritos na Seção 4.2

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2(\Omega_0 - 1). \quad (204)$$

Considerando o valor do parâmetro de densidade $\Omega_0 = 1/2$ e de modo a obter a escala t em função de $2/3H_0$, tomemos $H_0 = 1$. Após as devidas simplificações obtém-se a Eq. (205)

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2}}. \quad (205)$$

Para facilitar a analogia com a teoria desenvolvida para o método de Euler, consideremos a substituição da variável fator de escala R para y .

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}}. \quad (206)$$

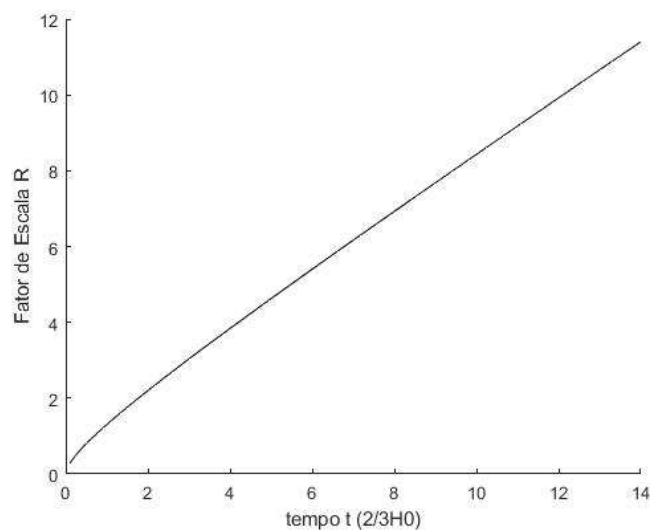
Analogamente

$$y' = \sqrt{\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}}. \quad (207)$$

5.3.1. MÉTODO DE EULER

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 14$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 100$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção das soluções do Exemplo 5, 6 e está descrito e comentado no Apêndice A. O Gráfico 39 informa a curva característica da solução numérica para a Equação de Friedmann Aberto pelo método de Euler para $h = 0,139$.

Gráfico 39 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$.

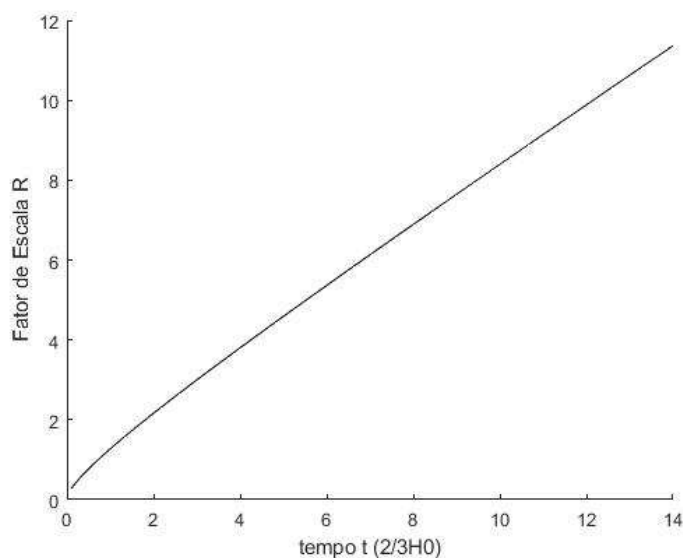


Fonte: Autor

5.3.2. MÉTODO DE HEUN

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 14$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 100$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção das soluções do Exemplo 7 e está descrito e comentado no Apêndice B. Assim, o Gráfico 40 informa a curva característica da solução da Equação de Friedmann Aberto pelo método de Heun para $h = 0,139$.

Gráfico 40 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$.

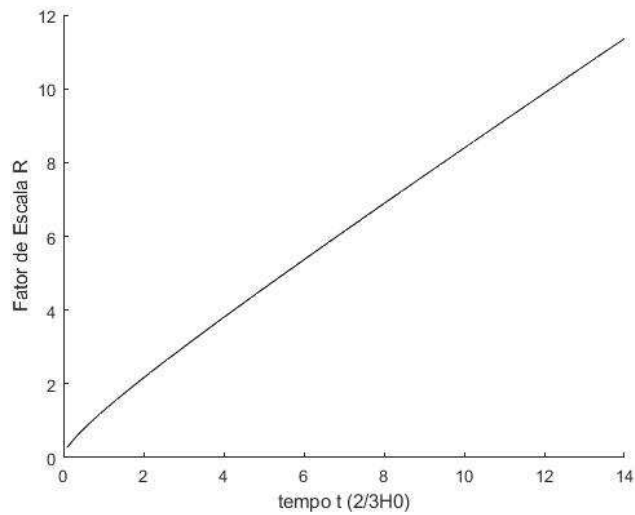


Fonte: Autor

5.3.3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 14$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 100$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção da solução de Friedmann Plano pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem e está descrito e comentado no Apêndice C. O Gráfico 41 informa a curva característica da solução da Equação de Friedmann Aberto pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem para $h = 0.139$.

Gráfico 41 – Solução numérica para Friedmann Aberto com $h = 0,139$.



Fonte: Autor

5.4. SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA FRIEDMANN FECHADO

Para a obtenção da solução da Equação de Friedmann Fechado, consideremos os métodos de Runge-Kutta de primeira, segunda e quarta ordem conforme descritos na seção 4.2. Para isso, seja a Equação de Friedmann descrita pela Eq. (208)

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} = -H_0^2(\Omega_0 - 1). \quad (208)$$

Considerando o valor do parâmetro de densidade $\Omega_0 = 2$ e de modo a obter a escala t em função de $2/(3H_0)$, tomemos $H_0 = 1$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{2}{R} = -1. \quad (209)$$

Realizando as devidas simplificações, obtemos:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2}{R} - 1}. \quad (210)$$

Para facilitar a analogia com a teoria desenvolvida para o método de Euler, realizemos a substituição da variável fator de escala R para y

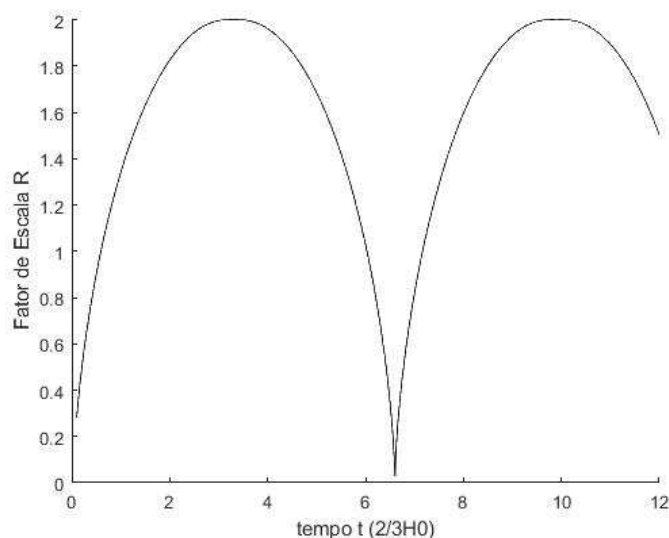
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2}{y} - 1} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}. \quad (211)$$

A Eq. (211) representa a função principal do método de Euler, no qual será de grande utilidade para as implementações desenvolvidas nas subseções seguintes.

5.4.1. MÉTODO DE EULER

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 12$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 2000$. O código responsável pela implementação está descrito e comentado no Apêndice D, uma vez que a função apresenta pontos de indiferenciabilidade, caso não abordado até o momento. Assim, o Gráfico 42 informa a curva característica da solução da Equação de Friedmann Fechado pelo método de Euler para $h = 0.00595$.

Gráfico 42 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$.

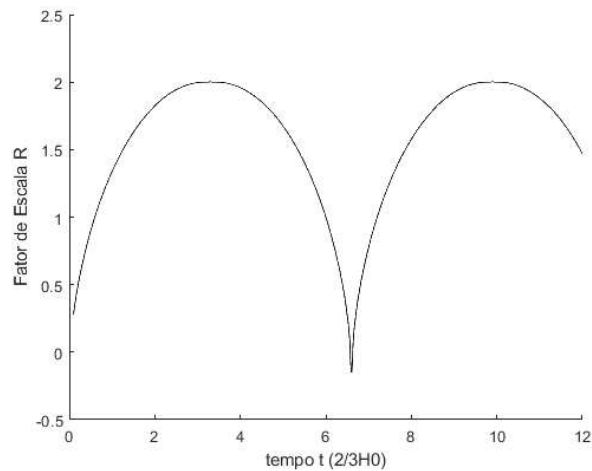


Fonte: Autor

5.4.2. MÉTODO DE HEUN

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 12$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 2000$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção da solução do Exemplo 7 e ao descrito no Apêndice D. O Gráfico 43 informa a curva característica da solução da Equação de Friedmann Fechado pelo método de Heun para $h = 0,00595$.

Gráfico 43 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$.

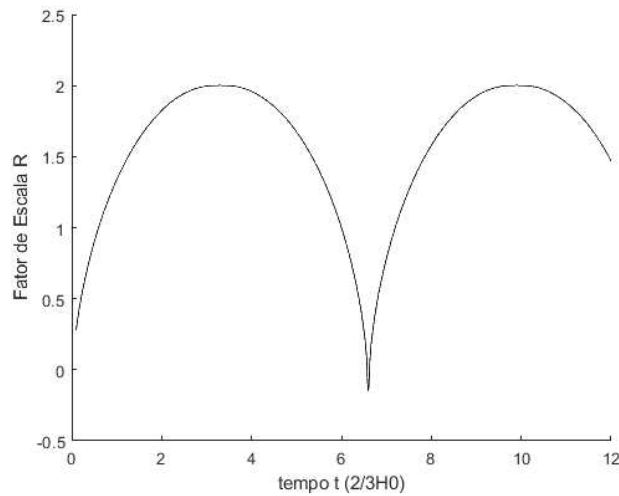


Fonte: Autor

5.4.3. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

Realizamos a simulação com as entradas do PVI, considerando $t_0 = 0,1$, $t = 12$, $y_0 = 0,2823108086643$ e $N = 2000$. O código responsável pela implementação é análogo ao utilizado para a obtenção das soluções para Friedmann Plano e Aberto pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem e ao descrito no Apêndice D. Desta maneira, o Gráfico 44 informa a curva característica da solução da Equação de Friedmann Fechado pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem para $h = 0,00595$.

Gráfico 44 – Solução numérica para Friedmann Fechado com $h = 0,00595$.

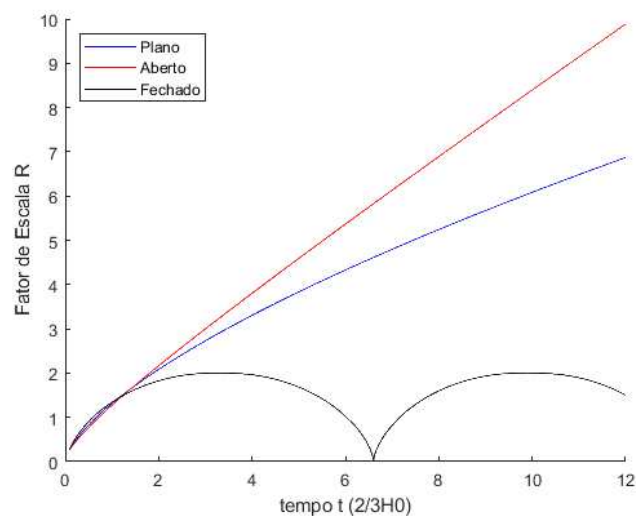


Fonte: Autor

Com o desenvolvimento das soluções numéricas para as Equações de Friedmann Plano, Aberto e Fechado obtidas nas Seções 5.2, 5.3 e 5.4 e de modo a facilitar a comparação entre as soluções vamos realizar a construção das soluções de ambas as equações pelo método de Euler em um único gráfico. Uma vez que pelos métodos de Heun e Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem o procedimento empregado é análogo.

As soluções numéricas pelo método de Euler das equações de Friedmann Plano, Aberto e Fechado estão plotados no Gráfico 45 nas cores azul, vermelho e preto respectivamente.

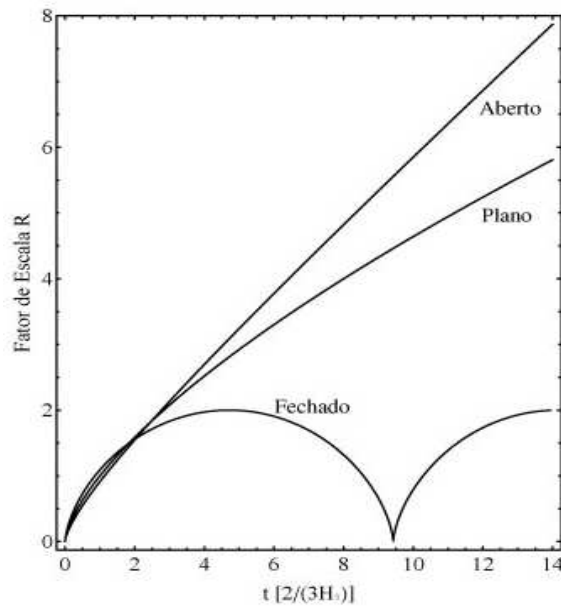
Gráfico 45 – Solução numérica pelo método de Heun para Friedmann Plano, Aberto e Fechado.



Fonte: Autor

Neste sentido, o Gráfico 46 apresentado por Viglioni e Soares (2011), representa as curvas das soluções de Friedmann Plano, Aberto e Fechado e podemos observar que as curvas condizem com as do Gráfico 45 obtido pelo método de Euler. As diferenças de dão pelo fato de não haver menção sobre o valor de H_0 utilizado para a construção do Gráfico 46 na referência adotada, bem como o método matemático e a escala considerada.

Gráfico 46– Gráficos das soluções das Equações de Friedmann.



Fonte: Viglioni e Soares (2011)

No que diz respeito aos estudos de âmbito matemático deste trabalho, podemos concluir que se deram muito proveitosos uma vez que os resultados obtidos pelos métodos analíticos e numéricos corroboraram com a teoria desenvolvida na Seção 4. A Solução analítica para a Equação de Friedmann Plano foi obtida por dois métodos distintos; o método das Equações separáveis por se apresentar um método mais simples, cuja solução é dada essencialmente pela integração direta. E pelo método da Equação de Bernoulli, pois contempla os casos de equações diferenciais não lineares, geralmente não abordados no tratamento das Equações Diferenciais. O método de Bernoulli recai em muitos casos em equações diferenciais de primeira ordem mais simples, e por este motivo foi realizado o desenvolvimento do método do Fator Integrante, uma vez que contempla um ramo muito mais abrangente de equações do que o método das equações separáveis, apesar deste não ser de fato utilizado para a obtenção das soluções para as equações de Friedmann.

Em relação aos métodos numéricos para soluções de EDO's, os desenvolvimentos dos estudos dos métodos de Runge-Kutta se apresentaram de grande utilidade e aplicabilidade dado que são úteis para a obtenção das soluções para funções simples como as utilizadas nos exemplos de cada seção, até funções complexas como as Equações de Friedmann. Neste contexto, o método de Runge-Kutta de 3ª ordem não foi utilizado para as obtenções das Equações de Friedmann, pois o procedimento empregado seria análogo.

As soluções das Equações de Friedmann Plano, Aberto e Fechado foram obtidas pelos métodos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem. No caso do Friedmann Plano, já havíamos obtido a solução analítica, e desta forma foi possível estabelecer a comparação entre os métodos citados como também determinar o erro máximo cometido. Para os casos de Friedmann Aberto e Fechado, as soluções analíticas não são obtidas tão facilmente e necessitam de estudos mais aprofundados e que fogem ao escopo deste trabalho e por este motivo não foram consideradas.

No que concerne à interpretação física das soluções das Equações de Friedmann, podemos observar que a curvatura do universo pode ocorrer de três maneiras distintas. Para Friedmann Plano e Aberto, o fator de escala R assume valores crescentes, corroborando com a teoria de que a curvatura do espaço aumenta em função do tempo, no qual pressupõe um universo infinito e em expansão. No caso do Friedmann Fechado, apresenta um modelo de universo em sucessivas expansões e contrações, nesse sentido, os pontos de indiferenciabilidade de Friedmann Fechado representam tempos de término de um ciclo e início de outro, também conhecidos como singularidades intermediárias de dois ciclos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito deste TCC foi estudar a utilização da modelagem matemática através de métodos analíticos e numéricos para obtenção das soluções para os modelos de Friedmann Plano, Aberto e Fechado do problema cosmológico famoso conhecido como Equações de Friedmann. Neste sentido, referente às seis etapas para elaboração de um modelo matemático para representação de um fenômeno físico descritos por Bassanezi (2012, p. 7), foi possível realizar somente as etapas de validação e aplicação uma vez que para a abordagem das etapas de experimentação, abstração e resolução seriam necessários estudos mais aprofundados que demandariam de muito tempo e recursos que fogem aos objetivos traçados para esse TCC. Em relação à etapa de modificação, esta se torna inviável uma vez que os resultados obtidos pela solução das Equações de Friedmann não podem ser confrontados com o problema real, pois ainda há muitas variáveis e questões em aberto acerca da expansão do universo.

Para este estudo foi utilizado os métodos analíticos das equações separáveis e Equação de Bernoulli, bem como os métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta de 4ª ordem. Destinou-se durante todo o estudo para a elaboração deste trabalho promover a correlação entre os conteúdos essencialmente matemáticos estudados no decorrer da graduação com a teoria física, reforçando a importância e necessidade de teorias bem consolidadas para a abordagem de determinado fenômeno.

O desenvolvimento deste TCC se apresentou bastante longo e demandou muito tempo para ser finalizado por diversos motivos, uma vez que as teorias cosmológicas estudadas se mostraram mais complexas e extensas do que o esperado bem como pelo fato da vasta gama de assuntos estudados sendo estes de mérito matemático, físico e computacional.

É possível afirmar que os objetivos traçados no começo deste trabalho foram cumpridos, pois foi possível estudar o processo de modelagem matemática, bem como as principais teorias cosmológicas desenvolvidas no século XX, para que se aplicassem os conhecimentos adquiridos na resolução da Equação de Friedmann por métodos matemáticos analíticos e numéricos.

No que concerne ao âmbito físico podemos destacar que após a proposta de Einstein, sobre a Relatividade Geral, dois eventos praticamente simultâneos mudaram completamente a forma como observamos e compreendemos o universo por volta da década de 1920. O primeiro sendo a descoberta da sistemática apresentada pelos desvios

espectrais de radiação emitida pelas galáxias, realizadas por Edwin Hubble e a segunda como sendo a descoberta das soluções das equações de campo estabelecidas por Einstein, por Alexander Friedmann em que nos fornecem modelos dinâmicos sobre o universo. Este poderia estar em expansão ou em sucessivas expansões e contrações. Esta era a primeira vez que se supunha tal modelo, entretanto, o fato do universo estar em expansão era consistente com as observações de Hubble. Por estes motivos, não havia mais a necessidade de modelos de universos estáticos assim como propostos por Newton.

A Cosmologia vem se desenvolvendo ao longo da história da humanidade a partir das observações do universo e dos astros, e nesse sentido, para que possamos prosseguir com descobertas nessa área de estudo para uma melhor compreensão do universo em que vivemos é necessário explicar onde, e em que forma, o universo escondeu cerca 95% de sua energia. As respostas para essas perguntas podem transformar, mais uma vez, o modo como enxergamos o universo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMO; L.R.W. *Geografia do Universo*. Instituto de Física. Universidade de São Paulo. Disponível em: <<http://fma.if.usp.br/abramo/RevUsp.htm>>. Acesso em: 11 de novembro de 2019.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24. 2001, Caxambu. Anais. Rio Janeiro: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2010.

BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias: um curso introdutório**. [S.l.: s.n.]. Textos didáticos. v.1. 163 p. (Coleção BC&T – UFABC).

BASSANEZI, R. C. **Temas e Modelos**. Santo André: UFABC, 2012.

BOYCE, W. E. DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, 2010.

FLEMING, H. Rumo à cosmologia. **Revista USP**, n. 62, 30-37. Junho/agosto 2004.

HENRIQUE, A. B. SILVA, C. C. Controvérsias na cosmologia. Disponível em: <http://paje.fe.usp.br/~mef-pietro/mef2/app.upload/222/00_Texto%20Auxiliar%20-%20Controversias%20na%20cosmologia.pdf>. Acesso em 18 de novembro de 2019.

GOTO, M. Introdução à cosmologia. Introdução à relatividade. Disponível em: <<http://www.uel.br/pessoal/mariogoto/pages/introducao-a-teoria-da-relatividade.php>>. Acesso em 21/11/2019.

RUGGIERO, M. A. G. LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico. Aspectos Teóricos e Computacionais**. Makron Books, São Paulo, 1996.

SAVI L. L. Relatividade restrita de Sitter: uma abordagem cinemática. 2010. 44 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, 2010.

SEARS, Francis Weston; ZEMANSKY, Mark Waldo; YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Freedman. *Termodinâmica e Ondas*. Ed. 12. São Paulo, SP: Pearson Addison Wesley, c2008-2009 vol. 2.

SOARES, D. S. L. A idade do universo, a constante de Hubble e expansão acelerada. Departamento de Física, ICEx, UFMG – C.P. 702 30123-970, Belo Horizonte. 25 de junho de 2009.

SOARES, D.A tradução de Big Bang (2012). Disponível em: <www.fisica.ufmg.br/~dsoares/aap/bgbg.htm>. Acesso em 28 de agosto de 2019.

SOARES, D. O Universo Estático de Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 1, 1302. 2012

STEWART, J. **Cálculo: Volume I**, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TOLMAN, R. C. **Relativity, Thermodynamics and Cosmology**, Dover Publications, Inc. New York, 1987.

VIGLIONI, A. SOARES, D. Observações sobre as soluções Clássicas da equação de Friedmann. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 4, p. 4702 – 4704, 2011.

WAGA I. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século XXI. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 157-173, 2005.

APÊNDICE A

```
Function exemplo_padrao_euler

format long

%-----

% DOMINIO E DISCRETIZACAO DO PROBLEMA

% serão usados tanto para obter a solução numérica, quanto à analítica

t0 = 0
t_final = 0.04

N = 2; % quantidade de subintervalos;

h = (t_final - t0)/N

for i=1:N+1

    t(i) = t0 + (i-1)*h;

end

%-----

% CONDIÇÃO INICIAL

y0 = 1
y(1) = y0

%-----

% MÉTODO NUMÉRICO - EULER

for i=2:N+1

    y(i) = y(i-1) + h*phi(t(i-1),y(i-1))

end

%-----

% CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

y_analitico = exp(t);

%-----

% ERRO ABSOLUTO

erro = abs(y - y_analitico);
```

```

erro_max = max(erro)

%-----

% Gráfico da solução analítica com a numérica
% Gráfico do erro (erro absoluto em cada ponto)

figure(1)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
               % aparecerá na figura 1

hold on

plot(t,y,'k')
plot(t,y_analitico,'r')
legend('Sol. Numerica', 'Sol. Analitica', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')

hold off

figure(2)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
               % aparecerá na figura 2

hold on

plot(t,erro,'k')
legend('Erro absoluto', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')

hold off

end

%-----

% DEFININDO A FUNÇÃO PHI

% lembrando que a EDO é  $y' = f(t,y)$ 

function phi = phi(t,y)

    phi = funcao(t,y);

end

function funcao = funcao(t,y)

funcao = y;

end

```

APÊNDICE B

```
Function exemplo_padrao_heun

format long

%-----

% DOMINIO E DISCRETIZACAO DO PROBLEMA

% serão usados tanto para obter a solução numérica, quanto à analítica

t0 = 0
t_final = 1

N = 1; % quantidade de subintervalos;

h = (t_final - t0)/N

for i=1:N+1

    t(i) = t0 + (i-1)*h;

end

%-----

% CONDIÇÃO INICIAL

y0 = 1000
y(1) = y0

%-----

% MÉTODO NUMÉRICO - HEUN

for i=2:N+1

    y(i) = y(i-1) + (h/2)*phi(t(i-1),y(i-1),h)

end

%-----

% CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

y_analitico = 1000*exp(0.04*t);

%-----

% ERRO ABSOLUTO

erro = abs(y - y_analitico);
```

```

erro_max = max(erro)

%-----

% Gráfico da solução analítica com a numérica
% Gráfico do erro (erro absoluto em cada ponto)

figure(1)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
aparecerá na figura 1

hold on

plot(t,y,'k')
plot(t,y_analitico,'r')
legend('Sol. Numerica', 'Sol. Analitica', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')

hold off

figure(2)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
aparecerá na figura 2

hold on

plot(t,erro,'k')
legend('Erro absoluto', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')

hold off

end

%-----

% DEFININDO A FUNÇÃO PHI

% lembrando que a EDO é  $y' = f(t,y)$ 

function phi = phi(t,y,h)

    k_1 = função(t,y);
    k_2 = função((t+h), (y+(k_1)*h));

    phi = (k_1 + k_2);

end

function funcao = funcao(t,y)

funcao = 0.04*y;

end

```

APÊNDICE C

```
Function exemplo_padrao_RungeKutta_quarta_ordem

format long

%-----

% DOMINIO E DISCRETIZACAO DO PROBLEMA

% serão usados tanto para obter a solução numérica, quanto à analítica

t0 = 0.1
t_final = 14

N = 10; % quantidade de subintervalos;

h = (t_final - t0)/N

for i=1:N+1

    t(i) = t0 + (i-1)*h;

end

%-----

% CONDIÇÃO INICIAL

y0 = 0.2823108086643
y(1) = y0

%-----

% MÉTODO NUMÉRICO - RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM

for i=2:N+1

    y(i) = y(i-1) + (1/6)*phi(t(i-1),y(i-1),h)

end

%-----

% CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

y_analitico = ((3/2)*t).^(2/3);

%-----

% ERRO ABSOLUTO

erro = abs(y - y_analitico);
erro_max = max(erro)
```

```

%-----

% Gráfico da solução analítica com a numérica
% Gráfico do erro (erro absoluto em cada ponto)

figure(1)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
aparecerá na figura 1

hold on

plot(t,y,'k')
plot(t,y_analitico,'r')
legend('Sol. Numerica', 'Sol. Analitica', 'Location', 'southeast')
xlabel('tempo t (2/(3H0))')
ylabel('Fator de Escala R')

hold off

figure(2)      % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
aparecerá na figura 2

hold on

plot(t,erro,'k')
legend('Erro absoluto', 'Location', 'southeast')
xlabel('t')
ylabel('y')

hold off

end

%-----

% DEFININDO A FUNÇÃO PHI

% lembrando que a EDO é  $y' = f(t,y)$ 

function phi = phi(t,y,h)

    k_1 = h*função(t,y);
    k_2 = h*função((t+h/2), (y+(k_1)/2));
    k_3 = h*função((t+h/2), (y+(k_2)/2));
    k_4 = h*função((t+h), (y+k_3));

    phi = (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4);

end

function funcao = funcao(t,y)

funcao = 1/(sqrt(y));

end

```

APÊNDICE D

```
Function exemplo_padrao_euler_fechado

format long

%-----

% DOMINIO E DISCRETIZACAO DO PROBLEMA

% serão usados tanto para obter a solução numérica, quanto à analítica

t0 = 0.1
t_final = 12

N = 2000; % quantidade de subintervalos;

h = (t_final - t0)/N

for i=1:N+1

    t(i) = t0 + (i-1)*h;

end

%-----

% CONDIÇÃO INICIAL

y0 = 0.2823108086643
y(1) = y0

%-----

% MÉTODO NUMÉRICO - EULER

for i=2:N+1

    y(i) = y(i-1) + h*phi(t(i-1),y(i-1))

end

%-----

% Gráfico da solução numérica

figure(1) % tudo o que estiver entre "hold on" e "hold off",
aparecerá na figura 1

hold on

plot(t,y,'k')
xlabel('tempo t (2/(3H0))')
ylabel('Fator de Escala R')
```

```

hold off

end

%-----

% DEFININDO A FUNÇÃO PHI

% lembrando que a EDO é  $y' = f(t,y)$ 

function phi = phi(t,y)

    phi = funcao(t,y);

end

function funcao = funcao(t,y)

    if (t < 3.3);
        funcao = sqrt(abs((2/y) - 1));
    elseif (t >= 3.3 & t < 6.6);
        funcao = -sqrt(abs((2/y) - 1));
    elseif (t >= 6.6 & t < 9.9);
        funcao = sqrt(abs((2/y) - 1));
    elseif (t >= 9.9 & t < 13.2);
        funcao = -sqrt(abs((2/y) - 1));
    end

end

end

```