



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE -  
CCTS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA - DFQM  
MATEMÁTICA LICENCIATURA SOROCABA - MALS

LUCIANA DOS SANTOS SIMÕES

CONTEXTO HISTÓRICO DA EQUAÇÃO E FUNÇÃO DE BESSEL

Sorocaba  
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE -  
CCTS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA - DFQM  
MATEMÁTICA LICENCIATURA SOROCABA - MALS

**CONTEXTO HISTÓRICO DA EQUAÇÃO E FUNÇÃO DE BESSEL**

**LUCIANA DOS SANTOS SIMÕES**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela**

**Sorocaba  
2017**

dos Santos Simões, Luciana

Contexto Histórico da Equação e Função de Bessel / Luciana dos Santos Simões. -- 2017.  
69 f. : 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Antonio Luís Venezuela

Banca examinadora: Magda da Silva Peixoto, Paulo Cesar Oliveira

Bibliografia

1. História da Vida de Bessel. 2. Equação e Função de Bessel. 3. Aplicações da Equação Diferencial de Bessel. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

## CONTEXTO HISTÓRICO DA EQUAÇÃO E FUNÇÃO DE BESSEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia para a Sustentabilidade da Universidade Federal de São Carlos, elaborado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática, como exigência parcial para a obtenção do título de graduação de Licenciado em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Antonio Luís Venezuela.

Sorocaba  
2017



Folha de aprovação

Luciana dos Santos Simões

**“CONTEXTO HISTÓRICO DA EQUAÇÃO  
E FUNÇÃO DE BESSEL”**

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 14/12/2017.

Orientador

Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela

Membro 2

Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto

Membro 3

Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Para meu esposo Cláudio, meu filho Augusto e minha família que tanto amo.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus Pai Todo Poderoso que me permitiu chegar até aqui, me dando saúde, ânimo, força de vontade e colocando em meu caminho pessoas que me apoiaram nesta longa jornada.

Ao meu professor orientador, Antonio Luís Venezuela, pela paciência, dedicação e pelos ensinamentos, que me ajudaram nesta conquista.

À todos os professores e professoras que transmitiram os seus conhecimentos, em especial Adilson Brandão e Graciele Paraguaia Silveira que pacientemente me ensinaram quando as coisas me pareciam sem sentido e impossível de se entender.

Aos colegas de curso e particularmente ao colega Kleber Santana, que muito me ajudou nos estudos para as provas.

À professora Sarah Tanus e ao professor Paulo Cesar Oliveira, que apoiaram na escolha pela transferência de universidade, mesmo sabendo que a escolha me custaria muito mais tempo e esforço, porém, muito mais ganho em conhecimento.

À amiga Priscila Daniele Luciano e ao amigo Jackson Costa, que juntos me incentivaram à entrar nesta universidade e fizeram parte desta história, por tantos momentos de estudo, discussões, alegrias e desespero, tudo válido para nosso crescimento.

À amiga de toda vida Cristiane Demétrio Ferreira Francis, que me ajudou a optar pela Matemática, me lembrando do amor que sempre tive pela disciplina.

À amiga Andrea Aparecida de Carvalho, que me incentivou a voltar a estudar após muitos anos longe da escola.

Às minhas irmãs Gisele, Ana Carolina, Milânia e Luana, ao meu irmão Fernando e à minha cunhada Edna Cristina Sevilha, pelo amor, apoio e pela compreensão, pois, durante esta caminhada, em tantos momentos de reunião em família eu pouco estive presente.

Ao meu pai Miguel dos Santos, por simplesmente ser meu pai, que mesmo não sendo meu herói, inconscientemente me mostrou os caminhos que não deveria seguir.

À minha mãe Edna Mara dos Santos, que ainda no ensino fundamental, me obrigou a continuar estudando em um momento em que eu não queria mais ir à escola e por todo amor e confiança que depositou em mim.

E em especial, agradeço ao Anjo que Deus colocou em minha vida, meu esposo Cláudio

Domingos Simões, que assumiu sozinho o sustento de nossa família e por inúmeras vezes, os afazeres da casa, para me apoiar em minha formação, adiando muitos de nossos sonhos e planos de vida e ao meu filho, Augusto dos Santos Simões, que diversas vezes teve de abrir mão de minha companhia e de nossas brincadeiras, para que eu tivesse mais tempo para estudar e ainda, que nas ausências do pai, ele cuidou de mim enquanto eu me preparava para as obrigações da universidade.

Buscai em primeiro lugar o Reino de Deus e a sua justiça e todas estas coisas vos serão  
dadas em acréscimo.

**Mateus 6, 33**

# Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso aborda a história da vida de Bessel, um dos grandes matemáticos e precursor da precisão e do rigor matemáticos nas pesquisas astronômicas e geodésicas, bem como de seu trabalho, que trata de uma classe especial de funções que são as soluções da Equação Diferencial de Bessel. As funções de Bessel se tornaram uma ferramenta indispensável em Matemática Aplicada, Física e Engenharia. Aplicações da Equação de Bessel e as soluções da mesma foram encontradas em livros, artigos acadêmicos e científicos. Entre as aplicações encontradas, a equação de Bessel foi utilizada nos trabalhos de “Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais”, com interesse na propagação de ondas de corrente de tensão em cabos, que é um problema relacionado com transmissão de informações; “Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais”, abrangendo o problema de força central, que em mecânica clássica se apresenta como uma força cuja magnitude depende somente da distância  $r$  do objeto à origem e é dirigida ao longo da linha que os une e ainda na “Utilização das Transformadas de Laplace e Fourier-Bessel na Modelagem de Meios Elásticos Delgados”, para solução de problemas sísmicos dinâmicos.

**Palavras-chaves:** A Vida de Bessel. Equação de Bessel. Aplicações da Equação de Bessel.

# Abstract

This Course Conclusion approach Bessel's life history, one of the great mathematicians and precursor of the precision and rigor of mathematical in the astronomical and geodetic research, as well as his work, which treat of special class of functions which are the solutions of the Bessel's Differential Equation. The Bessel functions have become an indispensable tool in Applied Mathematics, Physics and Engineering. Applications of the Bessel Equation and its solutions have been found in books, articles academics and scientific. Among the applications found, the Bessel equation was used in the "Vibrant Cord and Telegraph works: Analytical Study of Problems Modeled by Differential Equations" with interest in the propagation of voltage waves in cables, which is a problem related to transmission of information; "Differential Equations, Separation of Variables and the Problem of Central Forces", covering the problem of central force, which in classical mechanics presents itself as a force whose magnitude depends only on the distance  $r$  of the object to the origin and is directed along the line that and also in the "Use of the Laplace and Fourier-Bessel Transforms in the Modeling of Slender Elastic Mid" for the solution of dynamic seismic problems.

**Key-words:** Bessel's life. Bessel Equation. Applications of Bessel Equation.

# Lista de Figuras

1	Bessel . . . . .	18
2	Temperatura $T_\infty$ . . . . .	33
3	Elemento de Anel Diferencial da Aleta . . . . .	33
4	Sextante 1 e 2 . . . . .	43
5	Precessão . . . . .	44
6	Quadrante Mural 1 e 2 . . . . .	45
7	Círculo Meridiano 1 e 2 . . . . .	45
8	Heliômetro . . . . .	46
9	Gráfico das Funções de Bessel de Primeira Espécie para Ordens 0 a 6 . . . . .	48
10	Gráfico da Funções de Bessel - $J_n$ de Primeira Espécie no Plano $x, n$ . . . . .	50
11	Gráfico 3D das Funções de Bessel de Primeira Espécie no Plano $x, n$ . . . . .	50
12	Função de Bessel de Primeira Espécie em $0 \ll mf \ll 20$ . . . . .	55
13	Função de Bessel de Primeira Espécie em $0 \ll mf \ll 60$ . . . . .	56
14	As Funções de Bessel de ordens $\nu = 0$ à $\nu = 5$ . . . . .	59
15	As Funções de Neumann (preto) e as Funções de Bessel Modificadas (azul) para ordens inteiras de $\nu = 0$ à $\nu = 5$ . . . . .	61
16	Funções de Bessel Modificadas de segunda espécie para ordens inteiras de $\nu = 0$ à $\nu = 5$ . . . . .	62
17	Cavidade Ressonante Cilíndrica . . . . .	66

# Lista de Tabelas

1	Zeros da Funções de Bessel e suas Derivadas de primeira ordem . . . . .	68
---	---	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Um Pouco de História</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Solução da Equação de Bessel de Ordem Zero</b>	<b>25</b>
3.1	Solução da Equação de Bessel por Série de Potências próximo à um Ponto Singular Regular . . . . .	25
3.2	Método de Fröbenius: Construção da Primeira Solução da Equação de Bessel	27
<b>4</b>	<b>Aplicações da Equação de Bessel</b>	<b>32</b>
4.1	Aplicação da Equação de Bessel em Transferência de Calor em uma Aleta Circular. . . . .	32
4.2	Utilização das Transformadas de Laplace e Fourier-Bessel na Modelagem de Meios Elásticos Delgados. . . . .	34
4.3	Efeito Casimir na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica. . . . .	35
4.4	Sistema Visual Humano: Curvas de Sensibilidade e Filtragem de Frequências Angulares, Radiais e Radiais/Angulares Acopladas. . . . .	35
4.5	Modelagem Experimental de um link FSO com Inserção de Feixes não Difrativos. . . . .	36
4.6	Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais. . . . .	36
4.7	Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais. . . . .	37
	<b>Considerações Finais</b>	<b>38</b>
	<b>Referências</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Apêndices</b>	<b>43</b>
5.1	Apêndice A . . . . .	43

5.1.1	Sextante . . . . .	43
5.1.2	Precessão . . . . .	44
5.1.3	Instrumentos Meridianos . . . . .	45
5.1.4	Heliômetro . . . . .	46
5.2	Apêndice B - Outras Aplicações . . . . .	48
5.2.1	Funções de Bessel e Sua Aplicação aos Autovalores do Operador de Laplace . . . . .	48
5.2.2	Aplicação da Função Bessel de Primeira Espécie em Transmissão de Frequência Modulada (FM) . . . . .	51
5.2.3	Funções de Bessel e algumas Aplicações . . . . .	57
5.2.4	Cavidade Ressonante Cilíndrica . . . . .	65

# 1 | Introdução

O interesse dos cientistas e matemáticos pelas soluções da Equação Diferencial de Bessel surgiu no tratamento do problema da perturbação no sistema planetário Perturbação Sistema Planetário. As funções de Bessel, que são essas soluções, aparecem como coeficientes na expansão de série da perturbação indireta de um planeta, que é o movimento causado pelo movimento do Sol ou por outro corpo perturbador. Essas funções foram desenvolvidas por Friedrich Wilhelm Bessel em 1824. Não era a primeira vez que os casos especiais das funções tinham aparecido, os suíços: matemáticos e físicos Jacob Bernoulli (1654 – 1705), Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Leonhard Euler (1707 – 1783) e o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) já tinham estudado os casos especiais das funções anteriormente. Investigando as oscilações de correntes, Daniel Bernoulli encontrou as funções que mais tarde seriam chamadas Coeficientes de Bessel de ordem zero e as vibrações de membranas conduziram Euler a certos coeficientes mais gerais. No entanto, foi provavelmente Lagrange, em seus trabalhos de órbitas elípticas quem primeiro sugeriu trabalhar com as funções de Bessel, (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

Bessel, sentindo necessidade de tais funções no estudo da astronomia, examinou suas propriedades mais características. Depois disso, os coeficientes de Bessel e suas extensões e as Funções de Bessel, aparecem na física quase tão frequentemente como as funções circulares. Nas questões práticas, são numerosos os casos em que se pede solução de uma equação diferencial que satisfaça, ainda, a certas condições iniciais. Nem sempre se pode saber se as condições são compatíveis, assim, a teoria relativa a tais questões de física matemática abriu novos horizontes para a matemática pura. As funções de Bessel muito cedo ganharam ampla significação, conduzindo enfim, aos problemas de valor de contorno, que formam importante capítulo da matemática atual, (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

Devido à importância do assunto, se questiona como se dão as aplicações da equação de Bessel em problemas de relevância acadêmica e de relevância prática real.

O objetivo geral deste trabalho é expor aplicações da Equação de Bessel e os objetivos específicos são, explicar historicamente a vida de Bessel e sua Equação e apresentar

as funções de Bessel de 1ª e 2ª ordens  $J_0$  e  $Y_0$ , respectivamente.

O estudo da Equação de Bessel e das Funções foi sugerido pelo professor orientador, devido seu trabalho com as mesmas. Enquanto que as aplicações surgiram do interesse de se conhecer onde é aplicada a teoria aprendida, embora esta equação especificamente não tenha feito parte do currículo da graduação, a resolução da mesma perpassa por tema então visto, como série de potências.

Ao passo que, a ideia de apresentar um capítulo com o tema “Um Pouco de História” que expõe a vida de Bessel, surgiu a partir da disciplina cursada “História da Matemática”, que instigou a busca por informações sobre a vida dos matemáticos, pois foram pessoas que também tiveram uma vida como qualquer outra, se situaram no espaço-tempo e acabaram direta e/ou indiretamente interferindo na vida de toda a humanidade. A escolha pelo matemático e astrônomo Friedrich Wilhelm Bessel, se deu pelo fato de se propor estudar as suas Equações e Funções.

A pesquisa foi feita baseada em livros e arquivos da internet, como trabalhos acadêmicos e artigos científicos.

A divisão do trabalho se faz em capítulos, sendo o 1º a introdução, na qual se encontra até aqui; no 2º se apresenta a história da vida de Bessel; no capítulo 3, tem-se a solução da Equação de Bessel de Ordem Zero, que se faz necessário como pré-requisito para a resolução da mesma; as aplicações encontradas em pesquisa estão destacadas no capítulo 4; logo em seguida, estão as considerações finais sobre o trabalho e após, encontram-se as referências bibliográficas. Por fim, apresentam-se os apêndices A e B, com figuras de alguns instrumentos de medição citados na parte histórica e um apanhado de mais algumas aplicações, seguidamente.

## 2 | Um Pouco de História

Este capítulo está baseado nas informações de O'Connor e Robertson (1997) e em alguns pontos, também se encontrarão mais algumas referências.

Figura 1: Bessel



Fonte: O'Connor e Robertson (1997)

Friedrich Wilhelm Bessel considerado o criador da astronomia de precisão, era filho de um oficial judiciário de modesta categoria que tinha seis filhas e três filhos. Nasceu em Minden, na região de Vestfália, Alemanha, em 22 de julho de 1784.

Bessel compareceu ao Ginásio em Minden, durante quatro anos, mas não parecia ser muito talentoso, achando latim difícil. O fato de mais tarde se tornar proficiente em latim e de ensinar a língua, provavelmente sugere que o Ginásio não conseguiu inspirá-lo. Em janeiro de 1799, na idade de 15 anos, a família numerosa e o baixo salário do pai obrigaram-no a interromper seus estudos para se tornar um aprendiz no escritório da empresa mercantil de importação e exportação da família Kulenkamp, em Bremen.

No primeiro mês, Bessel não recebeu salário, mas, com suas habilidades em contabilidade, tornou-se apreciado pela empresa e passou à receber um pequeno salário. Para gerir seus futuros negócios, resolveu aprender espanhol, inglês e geografia.

Enviado em viagens marítimas com fins comerciais, conheceu o sextante<sup>1</sup> e através

---

<sup>1</sup>Sextante: instrumento astronômico que mede a altura de um astro acima do horizonte. Figura 4 - 1

dele, a astronomia, com isso seu interesse se voltou para a navegação. Um pouco mais tarde, se tornou o diretor em um navio cargueiro e foi indagado a determinar a posição de um navio no mar. Ele não só sabia como navegar com a ajuda das estrelas, como começou a estudar seriamente astronomia e matemática, na qual se aprofundou muito mais do que seria exigido pela gerência de um escritório mercantil e começou a fazer observações para determinar longitudes. Os cálculos que fazia baseado na observação do sextante revelaram-se mais precisos do que as indicações contidas nos mapas náuticos e Bessel, esquecido do escritório mercantil, entusiasmou-se pela observação das estrelas.

Aos vinte anos, era um amador da astronomia sem acesso aos observatórios, mas a matemática iria abrir-lhe caminho. Baseado nas observações do matemático e astrônomo inglês Thomas Harriot (1560 – 1621) feitas por volta de 1607, Bessel calculou toda a órbita<sup>2</sup> do cometa Halley em 1804, e enviou seu trabalho à um astrônomo de renome, Heinrich W. M. Olbers (1758 - 1840). Em consequência, o trabalho foi publicado na “*Monatliche Korrespondenz*” – Correspondência Mensal – e Olbers providenciou para que Bessel fosse admitido como assistente do astrônomo alemão Johann Hieronymus Schröter (1745 - 1816) em seu observatório particular em Lilienthal, que deu-lhe uma experiência valiosa ao observar planetas, em particular, Saturno, seus anéis e satélites, também observou cometas e continuou seu estudo da mecânica celeste.

Em 1807 começou a trabalhar na redução das observações do astrônomo inglês real James Bradley (1693 – 1762) sobre as posições de 3232 estrelas, que tinham sido feitas por volta de 1750 em Greenwich e o brilhante trabalho de Bessel foi rapidamente reconhecido.

Bessel introduziu a precisão e o rigor matemáticos nas pesquisas astronômicas e geodésicas<sup>3</sup>, visto que, em sua estreia na astronomia prática, quase fracassou completamente. Pois, a tarefa principal do observador é anotar a posição das estrelas, portanto, deve-se assinalar o instante exato em que o astro cruza uma linha colocada no campo do telescópio. Se o observador se atrasa e marca a passagem da estrela dois ou três décimos de segundo mais tarde, a distorção se torna excessiva, era o que acontecia com Bessel, por causa de seus reflexos muito lentos. Para continuar na carreira, teve a original ideia de medir o atraso de seus próprios reflexos, passando a descontá-lo nas medições que executava.

A persistência nas observações e a correção de seus cálculos valeram à ele uma rápida notoriedade. Em 1810, foi chamado por Frederico Guilherme III (1770 – 1840), rei da Prússia, para instalar e dirigir um novo observatório em Königsberg.

---

e 2 - Apêndice A, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>2</sup>Órbita: trajetória fechada que um astro descreve em torno de outro, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>3</sup>Geodésia: ciência que trata da forma e das dimensões da Terra ou, de pontos determinados de sua superfície, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

Embora o observatório ainda estivesse em construção, Bessel assumiu seu novo cargo em 10 de maio de 1810, mas, não foi possível que Bessel recebesse uma cadeira sem primeiro receber o título de doutor. O doutorado foi premiado pela Universidade de Göttingen, com recomendação do matemático, físico e astrônomo alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que tinha conhecido Bessel em Bremen em 1807 e reconhecido o seu talento. Tornou-se também em 1810, professor de astronomia da Universidade de Königsberg.

Ele continuou a trabalhar nas observações de Bradley, em seguida, seu trabalho tornou-se conhecido internacionalmente e foi homenageado com a atribuição do Prêmio “*Lalande do Institut de France*” para suas tabelas de refração<sup>4</sup>, com base nessas observações.

Casou-se em 1812 e sua vida pessoal não acompanhava o sucesso da vida profissional. Apesar de ter feito um casamento feliz e ter tido dois filhos e três filhas, o casamento foi encoberto pela doença e pela morte precoce de ambos os filhos.

O Observatório de Königsberg foi concluído em 1813, e lá Bessel permaneceu para o resto de sua vida, desenvolvendo a sua investigação e ensinando sem interrupção, embora ele sempre se queixasse sobre as possibilidades limitadas de observações por causa do clima desfavorável. Bessel foi convidado ainda, a ser diretor do Observatório de Berlim, porém, recusou o cargo temendo maiores responsabilidades administrativas e sociais.

Contando com o apoio oficial no observatório de Königsberg, ele comissionou construtores de instrumentos de precisão e contratou astrônomos para organizar um mapa dos céus. Continuou com a reelaboração das observações feitas por Bradley e aproveitou os dados do mesmo, para determinar as posições das estrelas e dos planetas. Como ele mesmo já tinha cometido erros em marcações de observações, deduziu os erros nos instrumentos de Bradley e os erros causados pela refração, eliminou os efeitos do movimento da Terra, da precessão<sup>5</sup> da Terra e outros efeitos.

Bessel foi um dos primeiros astrônomos a compreender que, antes de uma observação de posicionamento, deve-se ter o conhecimento quantitativo de todos os erros possíveis que podem entrar no resultado final. Ele usou as observações de Bradley e do astrônomo britânico Nevil Maskelyne (1732 – 1811) do século XVIII feitos em Greenwich, porque estes foram os primeiros a fornecer análises exaustivas de seus próprios erros instrumentais, juntamente com a temperatura e a pressão da atmosfera por meio do qual as medições foram feitas. Com a eliminação de todas as fontes de erro – ópticas, mecânicas e mete-

---

<sup>4</sup>Refração: modificação da direção de propagação de uma onda que incide sobre uma interface entre dois meios e prossegue através do segundo meio, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>5</sup>Precessão: é um efeito das forças diferenciais do Sol e da Lua sobre a Terra. Figura 5 - Apêndice A, (OLIVEIRA FILHO e SARAIVA, 2016).

orológicas – Bessel foi capaz de obter resultados astronômicos com espantosa delicadeza, dos quais uma grande quantidade de novos dados puderam ser extraídos. Com o trabalho para determinar as constantes da precessão dos equinócios<sup>6</sup>, nutação<sup>7</sup>, aberração<sup>8</sup> e a obliquidade da eclíptica, Bessel ganhou ainda mais honras, como um prêmio da Academia de Berlim em 1815. Assim, apresentou a fórmula de redução das observações meridianas e determinou a posição exata das 3232 estrelas, que começara a estudar em 1807.

Bessel também elaborou um método de análise matemática envolvendo o que hoje é conhecida como a Função de Bessel, que ele exibiu em 1817, em seu estudo de um problema do astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), de determinar o movimento de três corpos que se movimentam sob a gravitação mútua.

Além disso, com o resultado de seu trabalho, foi publicado o livro “*Fundamenta Astronomiae*” (1818), de grande valor à determinação das constantes astronômicas, indispensáveis aos cálculos.

As encomendas dos instrumentos feitas por Bessel haviam encorajado a pesquisa das oficinas alemãs, que conceberam novos instrumentos astronômicos. Estes permitiam estabelecer não só a posição correta das estrelas, mas seu círculo meridiano<sup>9</sup> e de trânsito, possibilitando medir simultaneamente a ascensão e o declínio das estrelas, evitando os erros causados pelo uso dos velhos quadrantes murais<sup>10</sup>.

De posse dos novos instrumentos, durante doze anos, Bessel passou a estudar, através de observações meticulosas, todas as estrelas da 1ª à 9ª grandeza compreendida entre  $-15^\circ$  e  $+45^\circ$  de declinação, conseguiu estabelecer assim, a posição exata de mais de 50 mil novas estrelas, as quais foram posteriormente catalogadas pelo astrônomo austríaco Maximilien Weisse (1798 – 1863), seu trabalho foi realizado sob os auspícios<sup>11</sup> da Academia de Ciências de São Petersburgo e complementou assim, o catálogo de magnitude 9 com 75 000 estrelas.

Ao mesmo tempo, ciente de suas deficiências quanto aos reflexos e com o uso das análises dos erros instrumentais de Bradley e Maskelyne, ele havia levantado duas questões fundamentais: até que ponto falhas humanas ou instrumentais prejudicam a observação? Seria possível calcular tais distorções e corrigi-las matematicamente?

<sup>6</sup>Equinócio: Ponto da órbita da Terra onde se registra igual duração do dia e da noite, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>7</sup>Nutação: O movimento de nutação faz o eixo de rotação terrestre oscilar em torno de uma circunferência. Sendo causado pela interação gravitacional existente entre a Terra e a Lua, e esse movimento se completa a cada 19 anos, aproximadamente. (DARROZ, 2010).

<sup>8</sup>Aberração: defeito, distorção, neste caso, da luz, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>9</sup>Círculo Meridiano: é um instrumento de grande porte instalado em pilares de pedra firmemente ancorados no solo, Figura 7 - 1 e 2 - Apêndice A, (ALVES e ROMERO, 2003)

<sup>10</sup>Quadrante mural: um tipo de instrumento meridiano destinado a medir as coordenadas dos astros na passagem destes pelo meridiano do lugar, Figura 6 - 1 e 2 - Apêndice A, (ALVES e ROMERO, 2003)

<sup>11</sup>Auspícios: presságios, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

Em 1825 ele foi homenageado por eleição como membro estrangeiro da *Royal Astronomical Society* - (Londres). Além das contribuições deixadas para astronomia e matemática, Bessel deixou também contribuições para a geodésia, que incluem: a precisão e originalidade dos critérios que adotou para determinar o grau e assim, o comprimento do pêndulo de segundos em 1826.

No ano de 1830, respondeu aos questionamentos sobre falhas humanas ou instrumentais no livro “Tábuas de Regiomontano” e insistia na inexistência de um instrumento perfeito, correspondente a um ideal matemático, mas demonstrava com calcular os defeitos e introduzir as correções. Isso resultou num critério de precisão nas observações astronômicas. A partir daí, a literatura científica passou a registrar como sendo de muita importância, todos os trabalhos destinados a estabelecer erros e correções no uso do instrumental utilizado nas experiências astronômicas.

Durante os anos de 1831 e 1832 dirigiu medições geodésicas de arcos meridianos na Prússia Oriental.

Por volta de 1835, Bessel especulou que as caudas dos cometas poderiam ser devido a uma força repulsiva, (MOURÃO, 1998).

Foi em Königsberg que Bessel, assumiu a sua monumental tarefa de determinar as posições e movimentos próprios de mais de 50 000 estrelas e em dezembro de 1838, recorrendo ao heliômetro<sup>12</sup> – instrumento inventado pelo oculista alemão Joseph von Fraunhofer (1787 – 1826) em 1829 – mediou a primeira paralaxe<sup>13</sup> de uma estrela fixa e conseguiu determinar a distância da estrela 61 de Cisne e anunciou o seu valor de 0,314", que dado o diâmetro da órbita da Terra, deu uma distância de aproximadamente 10 anos-luz, sendo que o valor correto da paralaxe de 61 de Cisne é 0,292", (OLIVEIRA FILHO e SARAIVA, 2004 e MOURÃO, 1998).

É evidente que para o sucesso era importante à escolha de uma estrela que estivesse próxima ao sol e seu método de seleção foi baseado em seus próprios dados. De todas as estrelas que ele tinha estudado, escolheu a que tinha o maior movimento próprio, corretamente deduziu que isto significaria que a estrela estava nas proximidades. A 61 de Cisne é uma estrela relativamente fraca, portanto, foi uma opção ousada, baseada em seu entendimento correto da causa dos movimentos próprios. E pela primeira vez, o homem pode tomar conhecimento das dimensões do universo.

Bessel publicou as posições médias e aparentes de 38 estrelas sobre o período de 100 anos, entre 1750 – 1850. As 38 estrelas, eram as 36 estrelas ‘fundamentais’ de Maskelyne,

---

<sup>12</sup>Heliômetro: instrumento destinado a medir o diâmetro aparente do Sol e para determinar a posição relativa entre dois astros ou acidentes muito próximos. Figura 8 - 1 e 2 - Apêndice A, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

<sup>13</sup>Paralaxe: ângulo sob o qual um observador, situado em uma determinada estrela, veria o raio de órbita terrestre, (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

juntamente com mais duas estrelas polares.

Quando o matemático e astrônomo inglês John Herschel (1792 - 1871) soube da realização de Bessel, escreveu: “ ... o triunfo maior e mais glorioso que a astronomia prática já testemunhou”.

Enquanto que Olbers, em seu aniversário de 80 anos, falou sobre a realização de Bessel, dizendo: “... é um presente colocar nossas ideias sobre o universo, pela primeira vez em uma base sólida”.

E para marcar essa conquista, “*The Royal Astronomical Society*” concedeu à Bessel uma medalha de ouro.

Dois anos depois (1840), a partir das perturbações na órbita de Urano, chegou a reconhecer que a luz não é uma propriedade necessária da matéria e que, a existência de inumeráveis estrelas visíveis é compatível com a de inumeráveis estrelas invisíveis. Assim, não só Urano, mas as estrelas que manifestavam alterações em sua órbita deveriam sofrer a influência do campo gravitacional de astros próximos dotados de grande massa, ou seja, Bessel pressentiu a existência de outro planeta, até então desconhecido. A descoberta de Netuno pelo astrônomo e matemático francês Urbain Le Verrier (1811 – 1877) em 1846, que ocorreu pouco depois da morte de Bessel, veio confirmar sua previsão, (OLIVEIRA FILHO e SARAIVA, 2004 e MOURÃO, 1998).

Em 1841, Bessel deduziu o diâmetro e o peso da Terra e um valor de  $1/299$  para sua elipticidade, que é a quantidade de distorção elíptica pela qual a Terra se afasta da forma de uma esfera perfeita e definiu o ano-luz como unidade de comprimento.

O caso da estrela Sírius, se compara ao de Urano, que ao estudá-la em 1844, Bessel verificou que o seu movimento próprio não se processava na linha reta esperada, mas numa linha ondulada e tinha variações periódicas. Essa trajetória poderia ser atribuída a um movimento elíptico de Sírius em torno de uma estrela acompanhante, sobrepondo-se ao movimento próprio retilíneo, entretanto, não havia nenhuma companheira visível de Sírius. Em outra hipótese brilhante, Bessel aventou a existência de uma estrela gêmea, não visível, mas, ainda exercendo influências gravitacionais. Mais tarde, novos instrumentos iriam dar-lhe razão, permitindo o cálculo da órbita da estrela acompanhante e a observação das gêmeas de Sírius (1862) e de Procyon (1896), que faziam parte das 38 estrelas que estudara em 1830 e com isso, ele foi o primeiro a prever a existência de “estrelas negras”, abrindo um novo campo à pesquisa astronômica, porém, essa vitória Bessel também não chegou a ver, (MOURÃO, 1998).

Bessel ainda impactou significadamente o ensino universitário, apesar do fato de ele nunca ter tido uma educação universitária. O nome de Bessel é descrito juntamente com os nomes do matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851) e do mineralogista, físico e matemático Franz Ernest Neumann (1798 – 1895), como intimamente ligado à

reforma do ensino universitário, em primeiro lugar na Alemanha e depois em todo o mundo.

A partir de 1840, a saúde de Bessel se tornou frágil e após dois anos de sofrimento, ele morreu de câncer em 17 de março de 1846 em Königsberg.

### 3 | Solução da Equação de Bessel de Ordem Zero

Para se resolver a Equação de Bessel de ordem zero, via Série de Potências, serão utilizados os seguintes pré-requisitos: Série de Potências, Solução por Série de Potências próximo a um Ponto Singular Regular e Equação Indicial, que podem ser encontrados no trabalho de Boyce e DiPrima (2006), e serão considerados casos em que as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação indicial, sejam iguais ou difiram-se por meio de um inteiro. Assim, se obterá as Funções de Bessel de ordem zero de primeira espécie  $J_0$  e segunda espécie  $Y_0$ .

#### 3.1 Solução da Equação de Bessel por Série de Potências próximo à um Ponto Singular Regular

Seja a Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Homogênea (Boyce e DiPrima, 2006):

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{3.1}$$

A equação indicial é dada por:

$$F(r) = r^2 - (\bar{P} - 1)r - \bar{q}_0 \tag{3.2}$$

com

$$\bar{P}_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{P}(x), \quad \bar{q}_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{Q}(x), \quad \bar{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n (x - x_0)^n = (x - x_0)P(x)$$

e

$$\bar{Q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{q}_n (x - x_0)^n = (x - x_0)Q(x)$$

A *Equação de Bessel de classe*  $\nu^1$  é uma equação diferencial de  $2^a$  ordem homogênea da forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.3)$$

No desenvolvimento deste trabalho será utilizado a Equação de Bessel de ordem zero ( $\nu = 0$ ).

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (3.4)$$

**O Teorema (3.1)** abaixo, diz que, próximo a um ponto singular regular da Equação de Bessel de ordem zero, sempre se tem um conjunto solução  $\{y_1, y_2\}$  linearmente independente. A demonstração pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001).

**Teorema 3.1** *Se  $x_0$  é o ponto singular regular da EDO dada pela Equação (3.1), então, esta equação sempre possui uma solução  $y = y_1(x)$  dada por:*

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 \neq 0$$

e uma segunda solução  $y = y_2(x)$ , sendo o conjunto  $\{y_1, y_2\}$  linearmente independente, de acordo com a seguinte possibilidade:

1. Se  $r_1 - r_2$  não for um inteiro positivo, então:

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad b_0 \neq 0$$

2. Se  $r_1 = r_2 = 0$ , então:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad b_1 \neq 0$$

3. Se  $r_1 - r_2 = N$ , com  $N = 1, 2, \dots$ , então:

$$y_2(x) = c y_1(x) \ln |x - x_0| + (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad b_0 \neq 0 \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

com as soluções acima válidas no intervalo  $0 < x - x_0 < R$ ,  $R = \min\{r_1, r_2\}$ ,  $r_1$  e  $r_2$  raízes de convergência das expansões em série das funções  $\overline{P}(x)$  e  $\overline{Q}(x)$  em torno de  $x_0$ .

---

<sup>1</sup>Também é conhecida por Equação de Bessel de Ordem  $\nu$ .

## 3.2 Método de Fröbenius: Construção da Primeira Solução da Equação de Bessel

O conjunto solução  $y_1, y_2$  da Equação de Bessel de ordem zero é obtida utilizando o **Teorema 3.1**. Assim, a primeira solução  $y_1$  é da forma:

$$y_1(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

a qual é denominada série de Fröbenius e o número  $r$  sendo o *expoente indicial*. Fazendo a transformação de coordenadas e fazendo  $x_0 = 0$ , pode-se obter a solução:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad \text{com } a_0 \neq 0 \text{ e } x > 0$$

Pelo método de Fröbenius, uma solução alternativa dada por:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{3.5}$$

A derivada de primeira e segunda ordem da Equação (3.5) dada, respectivamente, por:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \tag{3.6}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} \tag{3.7}$$

Substituindo-se as Equações (3.5), (3.6) e (3.7) na Equação (3.4) tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0 \\ \Rightarrow & [(r-1)r+r] a_0 x^r + [r(r+1)+(r+1)] a_1 x^{r+1} + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) a_n + (n+r) a_n + a_{n-2}] x^{n+r} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na Equação (3.8), utiliza-se a igualdade de polinômios, daí:

$$[(r-1)r+r] \underbrace{a_0}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0$$

$$[r(r+1) + (r+1)] a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

e

$$[(n+r-1)(n+r) + (n+r)] a_n + a_{n-2} = 0 \quad (3.9)$$

Pela Equação (3.9), tem-se:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2} \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

Na Equação (3.10), considera-se:

- $n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{-a_0}{(2+r)^2}$
- $n = 3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{-a_1}{(3+r)^2}$

Ainda na Equação (3.10), considera-se  $r = 0$  e  $a_1 = 0$  e obtem-se a generalização:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{\prod_{n=1}^{2n} (2n)^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad a_0 \neq 0$$

Pela Equação (3.5) tem-se que:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Tomando-se  $n = 2m$ , tem-se:

$$y_1(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} a_0 x^{2m}$$

Assim:

$$y_1(x) = a_0 \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right]$$

Chamando-se,

$$J_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m},$$

a qual é denotada **função de Bessel de primeira espécie de ordem zero**.

Logo, a primeira solução será da seguinte forma:

$$y_1(x) = a_0 J_0(x) \tag{3.11}$$

A seguir determinar-se-á a segunda solução  $y_2(x)$ , da Equação de Bessel. A partir da Equação (3.2) e a (3.4), obtêm-se a equação indicial:

$$F(r) = (r - 1) r + r = 0$$

que possui as seguintes raízes:  $r_1 = r_2 = 0$ .

Pelo **Teorema 3.1**, tem-se que a segunda solução será da forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad \text{com } b_1 \neq 0$$

Analisando-se os coeficientes da Equação (3.7):

$$\begin{cases} [(r + 1) r + r] a_0 = 0 \\ [r (r - 1) (r + 1)] a_1 = 0 \Rightarrow (r - 1) (r - 1) a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases}$$

Tem-se a seguinte relação de recorrência como a Equação (3.7):

$$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n + r)^2}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{3.12}$$

Na Equação (3.11), considera-se:

- $n = 2 \Rightarrow a_2(r) = \frac{-a_0(r)}{(2 + r)^2}$
- $n = 3 \Rightarrow a_3(r) = \frac{-a_1(r)}{(3 + r)^2}$

Tomando-se  $a_1 = 0$ ,  $n = 2m$  e generalizando-se a expressão acima, tem-se:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2 + r)^2 (4 + r)^2 (6 + r)^2 \dots (2m - 2 + r)^2 (2m + r)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{3.13}$$

Na Equação (3.12), seja  $a_{2m} = a_{2m}(r)$  uma equação diferenciável, com  $a_n \neq 0, \forall r \in \mathbb{R}$ , daí calcula-se:

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2 \left[ \frac{1}{2+r} + \frac{1}{4+r} + \dots + \frac{1}{2m-2+r} + \frac{1}{2m+r} \right]$$

Sendo-se  $r = 0$ :

$$\frac{a'_{2m}(0)}{a_{2m}(0)} = -2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-2} + \frac{1}{2m} \right]$$

Logo,

$$a'_{2m}(0) = - \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right] a_{2m}(0) = -H_m a_{2m}(0) \quad (3.14)$$

onde

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad (3.15)$$

Sendo-se  $r = 0$  e substituindo-se a Equação (3.11) em (3.14),

$$a'_{2m}(0) = H_m \frac{(-1)^{m+1} a_0}{2^{2m} (m!)^2}$$

Logo, a segunda solução da Equação de Bessel é dada por:

$$y_2(x) = a_0 J_0(x) \ln|x| + \sum_{m=1}^{\infty} H_m \frac{(-1)^{m+1} a_0}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \quad (3.16)$$

A segunda solução particular da Equação de Bessel é geralmente representada como uma combinação linear de  $J_0$  e  $y_2$  no lugar de  $y_2$  (Copson (Cap.12) *apud* Boyce e DiPrima, 2006), escrita na forma:

$$Y_0 = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)] \quad (3.17)$$

sendo  $Y_0$  a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero, de acordo com Copson (1935) e  $\gamma$  conhecida como **constante de Euler-Máscheroni** dada por:

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} (H_m - \ln n) \cong 0,5772$$

Substituindo-se  $y_2(x)$  na Equação (3.16):

$$Y_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \gamma - \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n (-1)^{n+1}}{(n!)^2} x^{2n} \right] \quad x > 0$$

A solução geral da Equação de Bessel (3.2) de ordem zero para  $x > 0$  é dada da seguinte forma:

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) \tag{3.18}$$

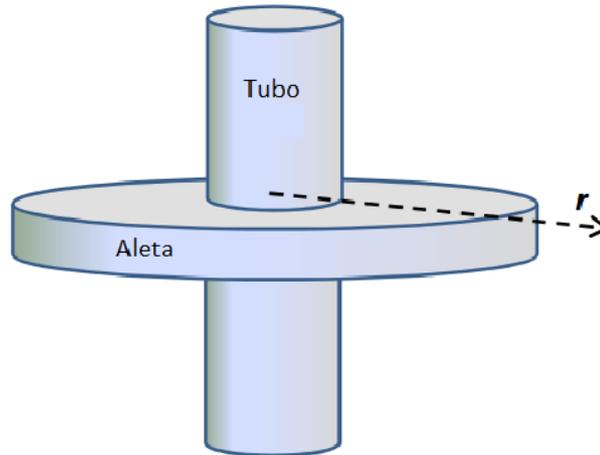
## 4 | Aplicações da Equação de Bessel

Neste capítulo, serão apresentadas algumas aplicações da Equação de Bessel, a saber: Aplicação da Equação de Bessel em Transferência de Calor em uma Aleta Circular; Solução da Equação de Bessel via Cálculo Fracionário; Utilização das Transformadas de Laplace e Fourier-Bessel na Modelagem de Meios Elásticos Delgados; Cálculo do Efeito Casimir na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica; Sistema Visual Humano: Curvas de Sensibilidade e Filtragem de Frequências Angulares, Radiais e Radiais/Angulares Acopladas; Modelagem Experimental de um link FSO com Inserção de Feixes não Difrativos; Sobre Cálculo Fracionário e Soluções da Equação de Bessel; Potência Fracionária do Operador Laplaciano com Condição de Fronteira de Dirichlet; Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais, Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais.

### 4.1 Aplicação da Equação de Bessel em Transferência de Calor em uma Aleta Circular.

De acordo com University Of Rhode Island (2017), as equações diferenciais do tipo Bessel aparecem em muitas aplicações de engenharia como transferência de calor, vibrações, análise de tensões e mecânica de fluidos. Considere-se agora um exemplo particular na transferência de calor que envolve a análise de aletas circulares que são comumente usadas para arrefecer os cilindros de motores de combustão interna e sistemas de tubulação. Um esquema típico de uma única aleta circular em um tubo é mostrado na figura abaixo. A aleta é projetada para adicionar área de superfície adicional, a fim de ajudar a resfriar o tubo.

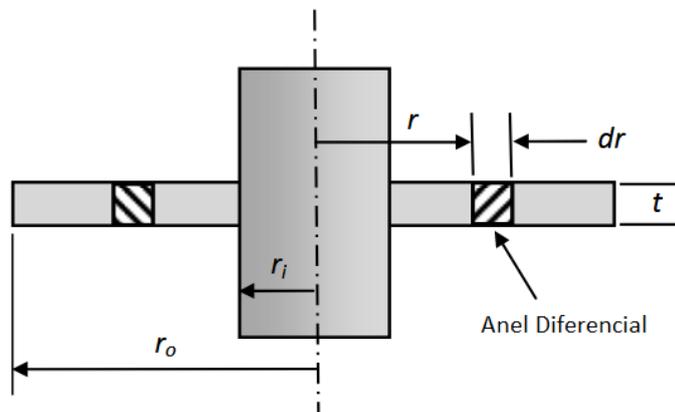
Figura 2: Temperatura  $T_\infty$



Fonte: Elaborado por University Of Rhode Island (2017)

A aleta fornece calor para transferir do tubo para uma temperatura de ar ambiente constante  $T_\infty$ . Deseja-se agora estabelecer a equação diferencial que relaciona a temperatura na aleta em função da coordenada radial  $r$ . A equação governante vem de um balanço de energia em um elemento de anel diferencial da aleta como mostrado na figura abaixo.

Figura 3: Elemento de Anel Diferencial da Aleta



Fonte: Elaborado por University Of Rhode Island (2017)

O elemento anelar tem volume  $V = 2\pi r dr t$ . O balanço energético deste volume diferencial pode ser declarado como “energia térmica conduzida em  $V =$  energia térmica gerada a partir da energia  $V +$  energia perdida para o ambiente por convecção <sup>1</sup>”. Isto

<sup>1</sup>Convecção: Movimento dos fluídos (líquidos e gases) que se dá por causa da diferença de densidade entre os fluídos, pois, a densidade muda quando a temperatura varia.

pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
 &\text{Condução para dentro: } -kA \frac{dT}{dr} \Big|_r \\
 &\text{Condução para fora : } -kA \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} \\
 &\text{Perda de convecção: } hA_c(T - T_\infty) \\
 &\text{Condução em (ou para dentro) = Condução para fora + Perda por convecção} \Rightarrow \\
 \\
 &-kA \frac{dT}{dr} \Big|_r = -kA \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} + hA_c(T - T_\infty) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

onde os termos de condução são expressos pela lei de Fourier e a perda por convecção é dada pela lei de Newton de resfriamento. Novamente, omitiu-se alguns detalhes da transferência de calor. Os outros parâmetros são definidos por  $A = 2\pi r t$  e  $A_c = 2(2\pi r dr)$ ,  $k = \text{condutividade térmica}$  e  $h = \text{coeficiente de transferência de calor por convecção}$ .

## **4.2 Utilização das Transformadas de Laplace e Fourier-Bessel na Modelagem de Meios Elásticos Delgados.**

Segundo Mitrofanov *et al* (2009) existem diferentes aspectos que devem ser considerados na modelagem numérica dos campos de onda conectados com reservatórios delgados em subsuperfície. Este trabalho descreveu os processos de propagação das ondas sísmicas a partir do sistema das equações de Lamé. Os resultados obtidos foram as componentes horizontal e vertical do deslocamento, importantes para a análise do levantamento sísmico multicomponente. A fim de proporcionar resultados mais próximos do experimento real, na formulação matemática do problema usaram uma fonte enterrada, do tipo centro de expansão. A solução do problema, construído no domínio espectral a partir das transformadas de Laplace temporal e de Fourier-Bessel espacial, foi estudada em detalhes para provar sua aplicabilidade na solução de problemas dinâmicos diretos e inversos da sísmica. Neste caso uma atenção especial foi dada à análise da influência da parte real do parâmetro de Laplace na solução do problema direto, utilizada para a construção de sismogramas multicomponentes sintéticos. Neste artigo, também, discutiram os aspectos computacionais do esquema proposto e realizaram várias análises dos campos das ondas registradas. Os resultados alcançados demonstraram o potencial do método para auxiliar no processo de caracterização de reservatórios delgados em comparação com os métodos potenciais, de raio e de diferenças finitas.

### **4.3 Efeito Casimir na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica.**

No trabalho “Uma Abordagem Global, Utilizando dois Parâmetros de Corte na Função Exponencial Regularizadora no Cálculo do Efeito Casimir, na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica.”, Miltão e Farias (2007) estudaram o caso da configuração de duas cascas esféricas e o caso da configuração cilíndrica, ambas as configurações perfeitamente condutoras. A configuração de duas cascas esféricas é um problema de importância fundamental para possibilitar o desenvolvimento de aparatos experimentais que permitam mensurar o efeito Casimir esférico, um tema ainda em aberto na literatura. Para o desenvolvimento do trabalho, aplicaram o método da soma de modos com uma regularização via uma função exponencial de corte com dois parâmetros independentes: um parâmetro tem o objetivo de regularizar a soma das infinitas ordens das funções de Bessel; e o outro parâmetro, tem o objetivo de regularizar a integral que se relaciona, devido ao teorema do argumento, com os infinitos zeros das funções de Bessel. Por resultado principal, obtiveram uma expressão geral da energia de Casimir como uma soma de quadraturas. Na sequência, discutiram dois casos limites importantes e imediatos para teste de consistência da expressão obtida: o relevante caso de uma casca esférica e o histórico caso de duas placas planas paralelas. Na aproximação de região anular pequena, obtiveram uma expressão que permitiu relacionar o resultado deles com o obtido com a AFP, fornecendo uma correção a esse resultado. O caso da configuração cilíndrica seguiu um procedimento semelhante.

### **4.4 Sistema Visual Humano: Curvas de Sensibilidade e Filtragem de Frequências Angulares, Radiais e Radiais/Angulares Acopladas.**

O objetivo do trabalho de Santos (2017) foi caracterizar a resposta do sistema visual humano para estímulos elementares definidos em um sistema de coordenadas polares. Para isso utilizou a Função de Sensibilidade ao Contraste (CSF) que fornece a descrição mais completa da função visual. Assim, mensurou a curva de sensibilidade ao Contraste para Estímulos de Frequências radiais (1/rCSF) (Função de Bessel,  $J_0$ ), Contraste para Estímulos de Frequências angulares (1/aCSF), Contraste para Estímulos de Frequências radiais/angulares acopladas (1/raCSF) e grade senoidal (CSF), utilizando um método de escolha forçada. Mensurou também as curvas de resposta de filtros de frequências angulares cujas frequências de teste foram 1, 2, 3, 4, 8, 16 e 24 ciclos com um método

de somação de resposta supra-limiar. Os resultados mostraram sensibilidade máxima para a curva de sensibilidade ao contraste de frequências angulares em 24 ciclos. Esta sensibilidade foi da ordem de duas vezes maior que aquela obtida para 3 ciclos por grau de ângulo visual (cpg) na curva de sensibilidade ao contraste para grade senoidal, e sete vezes maior que aquela obtida para 1 cpg na curva de sensibilidade ao contraste para estímulos radiais. O acoplamento de 4 ciclos a frequências radiais com perfil  $J_4$  causou um aumento na sensibilidade de pelo menos 1,6 vezes em relação à curva de sensibilidade ao contraste para estímulos radiais. Para os filtros angulares de banda estreita os resultados mostraram que, para as fases escolhidas arbitrariamente, somação máxima de limiares de contraste ocorreram nas frequências de teste dos filtros de 1, 2, 3, 4 e 8 ciclos. Tanto para o filtro de 16 quanto para 24 ciclos, somação máxima ocorreu nos harmônicos vizinhos inferiores. No caso do filtro 16 ciclos, ocorreu uma somação relativamente forte em 8 ciclos; já no filtro de 24 ciclos, na frequência de teste, a inibição foi quase máxima. Santos (2017) interpretou estes resultados como sendo consistentes com a possibilidade de que o processamento de frequências espaciais pelo sistema visual humano fosse definido a priori em termos de coordenadas polares.

## 4.5 Modelagem Experimental de um link FSO com Inserção de Feixes não Difrativos.

Os objetivos centrais de Aleixo Júnior (2013), foram a montagem de um *link* de comunicação Óptica no Espaço Livre (FSO) e a posterior inserção de um feixe (nãodifrativo) de Bessel no enlace. Após uma breve revisão dos conceitos e limitações envolvidos no funcionamento dos sistemas FSO, construiu-se um enlace óptico chegando a uma distância de 50 metros a um custo muito reduzido. Na tentativa de diminuir o eventual impacto causado pela difração do feixe óptico, propôs-se o uso de feixes não difrativos para realizar o *link*. Assim, após um estudo das características básicas do feixe não difrativo de Bessel, que utiliza função de Bessel na sua resolução e de sua geração experimental, realizou-se sua inserção num enlace óptico de curta distância com o propósito de demonstrar a real possibilidade de uso desses feixes em comunicações ópticas no espaço livre.

## 4.6 Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais.

Nakamura (2011) fez um estudo sistemático envolvendo o caso geral de uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem, com  $n$  variáveis independentes. Particu-

larizou para o caso bidimensional,  $n = 2$ , duas variáveis independentes. Utilizou o método de separação de variáveis para conduzir esta equação diferencial parcial à um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias. Utilizou o método de Fröbenius a partir de uma particular equação diferencial ordinária, ou seja, a equação de Bessel. Como aplicação, apresentou e discutiu o chamado problema de forças centrais, em particular, estudou o problema de Kepler de onde emerge naturalmente o problema de classificação de uma cônica, no qual a elipse merece tratamento destacado.

## **4.7 Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais.**

Coelho (2008) fez um estudo sistemático das equações diferenciais parciais, lineares, de segunda ordem e do tipo hiperbólico, isto é, aquelas equações que estão associadas com o problema envolvendo a propagação de ondas. Como uma aplicação, discutiu o problema de ondas de corrente e ondas de tensão, através da chamada equação do telégrafo, também conhecida como equação dos telegrafistas. Casos particulares foram discutidos tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista físico. Apresentou o método de Riemann como ferramenta para discutir a solução geral, bem como Equações Diferenciais, Equação de Onda, Funções Especiais e Funções de Bessel.

# Considerações Finais

Um dos objetivos deste trabalho foi expor a história da vida de Bessel. Para tanto, fez-se revisão bibliográfica, a qual se apresentou com poucas fontes de pesquisa, visto que foram raras as que falavam sobre Bessel.

Para se compreender a resolução da Equação de Bessel e de suas funções de 1ª e 2ª ordens  $J_0$  e  $Y_0$ , respectivamente, que são as soluções da Equação, estudou-se os livros de Boyce e DiPrima (2006) e Zill e Cullen (2001).

Quanto às aplicações, foram mais difíceis de encontrá-las do que se imaginava inicialmente, além disso, ao analisá-las deparou-se com um nível de conhecimento superior ao que se cabia compreender neste momento, impedindo assim o aprofundamento no estudo das equações que se apresentavam, visto que, os trabalhos envolviam áreas específicas e seus desmembramentos particulares. Contudo, este estudo apresentou interessantes assuntos e situações de aprendizagem. Dentre as aplicações, destacou-se “Efeito Casimir na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica”, que utilizou a equação de Bessel para mensurar o efeito Casimir em cascas esféricas, sendo esse efeito causado pela força do vácuo existente entre dois objetos, que em situação favorável atrai um ao outro.

O intuito do apêndice A, foi ilustrar situações e objetos que dificilmente se encontram em textos cotidianos ou mesmo em situações atuais.

Enquanto no apêndice B, foram colocadas algumas aplicações que traziam desenvolvimento mais completo, porém, ficam a título de curiosidade e até como apoio para melhor compreensão do capítulo 3 e 4, pois, como apresentam contas mais complexas, não cabe desenvolvê-las neste trabalho.

Para finalizar, apesar do não aprofundamento nas resoluções como se pretendia, o estudo agregou um pouco de conhecimento de outras áreas e principalmente, mostrou a grande importância do estudo matemático para diversas áreas de conhecimento e pesquisa, mostrou também que uma das implicações do trabalho de Bessel na matemática é atuar como ferramenta fundamental na solução de Equações Diferenciais Parciais Lineares em coordenadas cilíndricas.

# Referências

O'CONNOR, J J; ROBERTSON, e F.REWS,(UK)**Friedrich Wilhelm Bessel**. 1997. School Of Mathematics And Statistics - University St Andrews, Scotland Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Bessel.html>>. Acesso em: 19 dez. 2017.

AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA (Brasil). **Dicionário Aurélio Eletrônico**. 1999. Versão 3.0 Eletrônica Lexikon Informática Ltda. Acesso em: 14 jan. 2016.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Precessão do Eixo da Terra**. 2016. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/fordif/node8.htm>>. Acesso em: 14 jan. 2016.

DARROZ, Luiz Marcelo. **Movimento de Precessão e Nutação da Terra**. 2010. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Física. Disponível em: <[https://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/n20\\_Darroz/texto\\_terra.html](https://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/n20_Darroz/texto_terra.html)>. Acesso em: 19 dez. 2017.

ALVES, A S; ROMEIRO, Claudino. **Instrumentos Meridianos da Coleção Astronômica**. 2003. Coleção do Observatório Astronômico da Universidade de Coimbra. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/H21merid.htm>>. Acesso em: 14 jan. 2016.

MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. **Da Terra às Galáxias: Uma introdução à astrofísica**. 7<sup>a</sup>. ed. Petrópolis: Vozes, 1998. 403p. Apresentação de Antônio Houais.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica**. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. 557p.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. 8<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 434p. Tradu-

ção de Valéria de Magalhães Iorio.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.. **Equações Diferenciais**. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Macron Books, 2001. 473p, v.1. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica Antonio Pertence Jr.

UNIVERSITY OF RHODE ISLAND (USA). **Application of Bessel Equation Heat Transfer in a Circular Fin**. s.d.. Disponível em: <<https://www.uri.edu/search/?cx=016863979916529535900:17qai8akniu&cof=FORID:11&q=Application+of+Bessel+Equation+Heat+Transfer+in+a+Circular+Fin&submit=Submit>>. Acesso em: 06 abr. 2017.

MITROFANOV, Georgy et al. **Utilização das Transformadas de Laplace e Fourier-Bessel na Modelagem de Meios Elásticos Delgados**. 2009. Rev. Bras. Geof. vol.27 no.2 São Paulo Apr./June 2009. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-261X2009000200005&script=sci\\_arttext&tlng=es](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-261X2009000200005&script=sci_arttext&tlng=es)> . Acesso em: 19 abr. 2016.

MILTÃO, Milton Souza Ribeiro; FARIAS, Franz Peter Alves. **Uma Abordagem Global, Utilizando dois Parâmetros de Corte na Função Exponencial Regularizadora, no Cálculo do Efeito Casimir na Configuração de duas Cascas Esféricas Concêntricas e na Configuração Cilíndrica**. 2007. XXIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos / ID: 272-1. Disponível em: <[http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/40/054/40054769.pdf?r=1](http://www.iaea.org/inis/collection/NCLCollectionStore/_Public/40/054/40054769.pdf?r=1)> . Acesso em: 19 abr. 2016.

SANTOS, Natanael Antonio dos. **Sistema Visual Humano: Curvas de Sensibilidade e Filtragem de Frequências Angulares, Radiais e Radiais/Angulares Acopladas**. 1999. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/35685278\\_Sistema\\_visual\\_humano\\_curvas\\_de\\_sensibilidade\\_e\\_filtragem\\_de\\_frequencias\\_angulares\\_radiais\\_e\\_radiaisangulares\\_acopladas](https://www.researchgate.net/publication/35685278_Sistema_visual_humano_curvas_de_sensibilidade_e_filtragem_de_frequencias_angulares_radiais_e_radiaisangulares_acopladas)>. Acesso em: 01 nov. 2017.

ALEIXO JÚNIOR, José Francisco Meireles. **Modelagem Experimental de um link FSO com Inserção de Feixes não Difrativos**. 2013. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013. Disponível em: <[http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/259686/1/AleixoJunior\\_JoseFranciscoMeireles\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/259686/1/AleixoJunior_JoseFranciscoMeireles_M.pdf)>. Acesso em: 19 abr. 2016.

NAKAMURA, Márcia Mayumi. **Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais**. 2011. 67 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011. Disponível em: <[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306999/1/Nakamura\\_MarciaMayumi\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306999/1/Nakamura_MarciaMayumi_M.pdf)>. Acesso em: 04 maio 2016.

COELHO, João Bosco. **Corda Vibrante e Telégrafo: Estudo Analítico de Problemas Modelados por Equações Diferenciais**. 2008. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em: <[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307008/1/Coelho\\_JoaoBosco\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307008/1/Coelho_JoaoBosco_M.pdf)>. Acesso em: 01 set. 2016.

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA (Portugal). **Sextante**. 2011. Museu do Observatório Astronômico. Disponível em: <[http://193.137.102.29/ObservatorioAstronomicoMuseu/article\\_list.aspx?title=sextante](http://193.137.102.29/ObservatorioAstronomicoMuseu/article_list.aspx?title=sextante)>. Acesso em: 14 jan. 2016.

Pesquisa FAPESP. **Aparelho mede o Sol**. 2009. Disponível em: <<http://revistapesquisa.fapesp.br/2009/09/01/aparelho-mede-o-sol/>>. Acesso em: 06 nov. 2017.

GOVERNO DO BRASIL (Brasil). **Heliômetro**. 2013. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/assuntos/geral/2010/06/uma-nova-visao-do-sol/heliometro1.jpg/view>>. Acesso em: 14 jan. 2016.

JIN, Matthew. **Bessel Functions and Their Application to the Eigenvalues of the Laplace Operator**. 2014. Disponível em: <<http://www.dartmouth.edu/~d40327t/projectreport.pdf>>. Acesso em: 12 mar. 2017.

BULINDA, Vincent M. et al. **Application of Bessel Function of the First Kind in Frequency Modulated Transmission**. 2013. Disponível em: <<http://www.thesij.com/papers/CNCE/2013/September-October/CNCE-0104530101.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2017.

NIEDZIELA, Jennifer. **Bessel Functions and Their Applications**. 2008. University of Tennessee - Knoxville. Disponível em: <<http://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/niedzilla.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2017.

---

ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 900 p. Tradução da 6<sup>a</sup> edição.

SANTOS, Gildenir Carolino. **Percurso Científico: guia prático para Elaboração da normalização científica e orientação metodológica**. Campinas: Arte Escrita, 2012. 154 p. Colaboradores: Rosemary Passos, Rogério Gualberto de Souza.

# 5 | Apêndices

## 5.1 Apêndice A

Nesta parte do apêndice, serão apresentadas figuras referentes aos objetos e situações citados no Capítulo 2 - Um Pouco de História.

### 5.1.1 Sextante

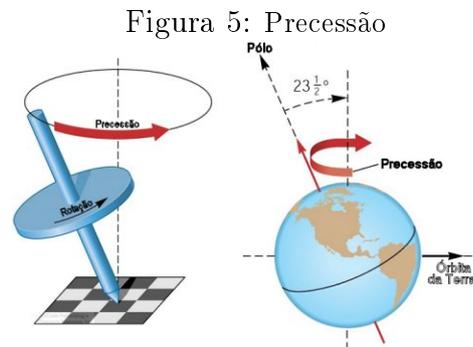
Figura 4: Sextante 1 e 2



Fonte: Observatório Astronômico da Universidade de Coimbra (2011).

Sextante: a sexta parte de uma circunferência ou arco de  $60^\circ$ . Usado na náutica é um instrumento óptico constituído de dois espelhos e uma luneta astronômica, presos a um setor circular de  $60^\circ$  (1/6 do círculo) destinado a medir a altura de um astro acima do horizonte, (quadrante, quintante e oitante), (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999).

## 5.1.2 Precessão



Fonte: Oliveira Filho e Saraiva (2016)

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2016), o movimento de precessão da Terra é um efeito das forças diferenciais do Sol e da Lua sobre a Terra, tal como as marés.

O que causa a precessão?

A Terra não é perfeitamente esférica, mas sim achatada nos pólos e bojuda no equador. Seu diâmetro equatorial é cerca de 40 km maior do que o diâmetro polar. Jean Richer (1630-1696) foi o primeiro a estabelecer esta diferença, notando que um pêndulo tinha período diferente em Cayenne ( $5^\circ$  N) na Guiana Francesa do que em Paris, em 1672. Além disso, o plano do equador terrestre e, portanto, o plano do bojo equatorial, está inclinado  $23^\circ 26' 21,418''$  em relação ao plano da eclíptica, que por sua vez está inclinado  $5^\circ 8'$  em relação ao plano da órbita da Lua. Por causa disso, as forças diferenciais (que ficam mais importantes nos dois bojos da Terra) tendem não apenas a achatá-la ainda mais, mas também tendem a “endireitar” o seu eixo, alinhando-o com a eclíptica.

Como a Terra está girando, o eixo da Terra não se alinha com o eixo da eclíptica, mas precessiona em torno dele, da mesma forma que um pião posto a girar precessiona em torno do eixo vertical ao solo. No caso da Terra, as forças diferenciais gravitacionais da Lua e do Sol produzem um torque que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação.

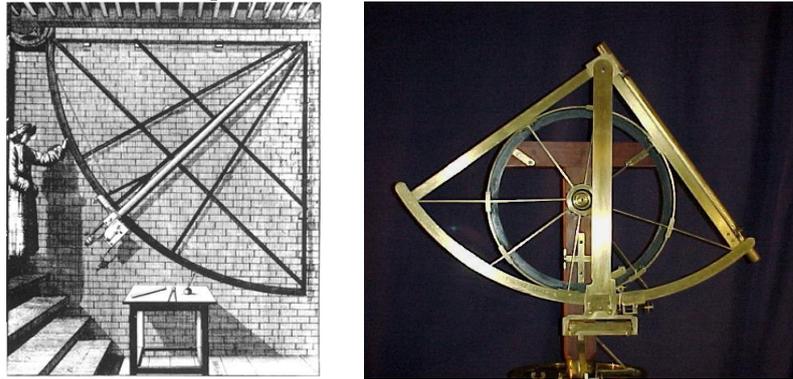
Portanto os pólos celestes não ocupam uma posição fixa no céu: cada pólo celeste se move lentamente em torno do respectivo pólo da eclíptica, descrevendo uma circunferência em torno dele com raio de  $23,5^\circ$ . O tempo necessário para descrever uma volta completa é 25770 anos. Atualmente o Pólo Celeste Norte está nas proximidades da estrela Polar, na constelação da Ursa Menor, mas isso não será sempre assim. Daqui a cerca de 13000 anos ele estará nas proximidades da estrela Vega, na constelação de Lira.

O movimento de precessão da Terra é conhecido como precessão dos equinócios,

porque, devido a ele, os equinócios (ponto vernal e ponto outonal) se deslocam ao longo da eclíptica no sentido de ir ao encontro do Sol (retrógrado em relação ao movimento da Terra em torno do Sol)  $50,29''$ /ano.

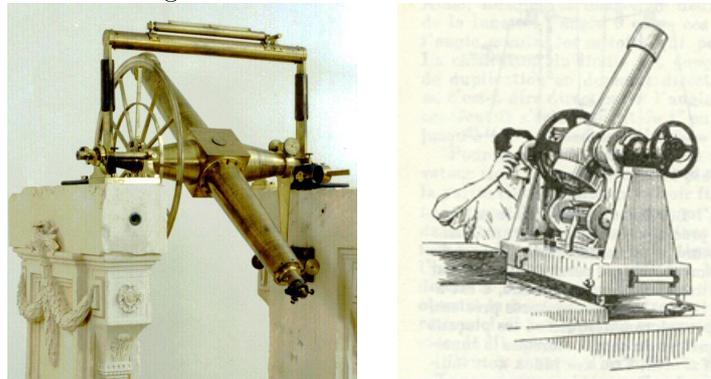
### 5.1.3 Instrumentos Meridianos

Figura 6: Quadrante Mural 1 e 2



Fonte: Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (2011).

Figura 7: Círculo Meridiano 1 e 2



Fonte: Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (2011).

De acordo com Alves e Romeiro (2003), os instrumentos meridianos destinam-se a medir as coordenadas dos astros na passagem destes pelo meridiano do lugar. Esta observação é da maior importância para determinar as coordenadas do lugar - por exemplo, um observatório - pelo método astronômico, assim como tempo local referido ao movimento de rotação da Terra. Os progressos modernos em termos de medição de coordenadas tornaram este método obsoleto, exceto no tocante a alguns observatórios especializados na Astronomia de posição.

Possivelmente, o primeiro destes instrumentos foi o quadrante mural (Figura 6) formado por um quarto de círculo ancorado numa parede sólida de pedra orientada rigorosamente segundo o meridiano do lugar, ou seja, na direção Norte - Sul.

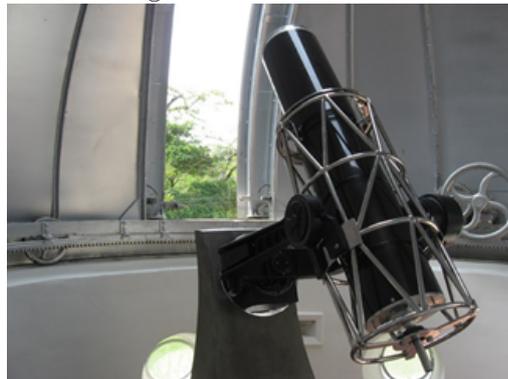
Ao quadrante mural seguiu-se o instrumento de passagens ou de trânsito, o círculo meridiano (Figura 7) que é um instrumento de grande porte instalado em pilares de pedra firmemente ancorados no solo, que pode rodar para cima e para baixo.

Um círculo meridiano movimenta a luneta e processa rigorosamente segundo o meridiano do lugar.

Para trabalhos de campo foram criados instrumentos de passagens portáteis, (Figura 7 - 2).

#### 5.1.4 Heliômetro

Figura 8: Heliômetro



Fonte: FAPESP (2009)

Conforme a revista FAPESP (2009), O heliômetro é destinado ao monitoramento contínuo das variações da forma e do diâmetro solar, informações que podem ser empregadas no estudo de mudanças climáticas em grande escala.

O modelo da Figura 8, foi desenvolvido por pesquisadores do Observatório Nacional (ON), no Rio de Janeiro, utilizando uma antiga técnica astronômica. “Resgatei o princípio óptico do heliômetro e utilizei tecnologias atuais, como espelhos feitos com material cerâmico, câmeras digitais e tubos de fibra de carbono para manter o instrumento geometricamente estável”, explica o pesquisador Victor D’Ávila, integrante do Grupo de Instrumentação e Referência em Astronomia Solar (Girasol) e projetista do heliômetro. “Há muito tempo nos interessamos pelas variações do diâmetro do Sol e do achatamento dos polos solares”, relata. Esses estudos vinham sendo conduzidos há pelo menos três décadas pelo grupo com outro aparelho, que consegue registrar 1.800 imagens por dia do

diâmetro solar. Com o heliômetro, que teve apoio da Financiadora de Estudos e Projetos (Finep), é possível captar 8 mil imagens por hora, o que significa maior precisão nas medidas da forma e do diâmetro solar.

O heliômetro brasileiro é diferente dos antigos, que, na verdade eram lunetas, ou seja, usavam apenas lentes, o projetado pelo brasileiro é um telescópio. A diferença é que usa um espelho em vez de lente.

## 5.2 Apêndice B - Outras Aplicações

Nesta parte do apêndice serão inseridas mais algumas aplicações da Equação de Bessel, todas retiradas de trabalhos providos da literatura. Estas, apresentam desenvolvimento mais completo, servindo para dar visão mais ampla dos processos de utilização da Equação e das Funções de Bessel, porém, fica como curiosidade.

### 5.2.1 Funções de Bessel e Sua Aplicação aos Autovalores do Operador de Laplace

Jin (2014), discute como calcular as funções de Bessel usando o algoritmo de Miller, e como essas funções podem ser aplicadas para encontrar as frequências de vibração de uma fina membrana circular.

Funções de Bessel de primeira espécie,  $J_n$  são soluções da equação diferencial de Bessel:

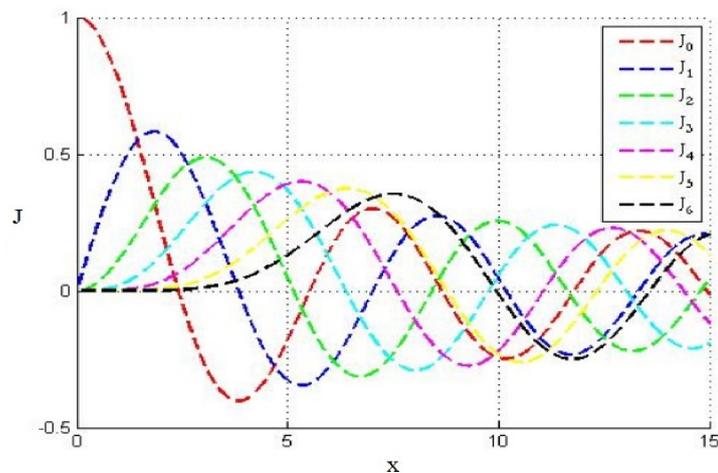
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0,$$

que não tem singularidade na origem. Pode-se definir matematicamente  $J_n(x)$  por expansão em Série de Taylor em torno de  $x = 0$ :

$$J_n(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

As soluções aparecem da seguinte forma:

Figura 9: Gráfico das Funções de Bessel de Primeira Espécie para Ordens 0 a 6



Fonte: Elaborado por Jin (2014)

### Calculando Funções de Bessel

Relação de recorrência e sua estabilidade.

Segundo Jin (2014), calculou-se as funções de Bessel, usando o algoritmo de recorrência descendente de Miller. O algoritmo aplica a relação de recorrência:

$$J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x),$$

no qual  $n$  é a ordem da função de Bessel  $J_{it}$ . Calcula-se as funções de Bessel em ordem decrescente a partir de um grau mais alto que ordem  $n_0$ .

Para entender por que este método é eficaz no cálculo das funções de Bessel, deve-se compreender a estabilidade da relação de recorrência. Em geral, tem-se duas soluções linearmente independentes, uma das quais corresponde à sequência de termos que se deseja calcular. A outra solução pode diminuir ou crescer exponencialmente na direção em que um está em andamento, ou nenhum deles. Em qualquer caso, é impossível calcular a solução desejada a partir da relação de recorrência na direção em que a solução indesejada está crescendo exponencialmente.

Ao calcular funções de Bessel, a solução indesejada cresce exponencialmente para  $n > x$  na direção direta da relação de recorrência.

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

Pode-se heurísticamente ver isto assumindo que  $\frac{2n}{x}$  é constante e aplicando a fórmula quadrática para encontrar as soluções de

$$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x}J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0.$$

$$r^{n+1} - 2 \frac{n}{x} r^n + r^{n-1} = 0$$

$$r^2 - 2 \frac{n}{x} r + 1 = 0$$

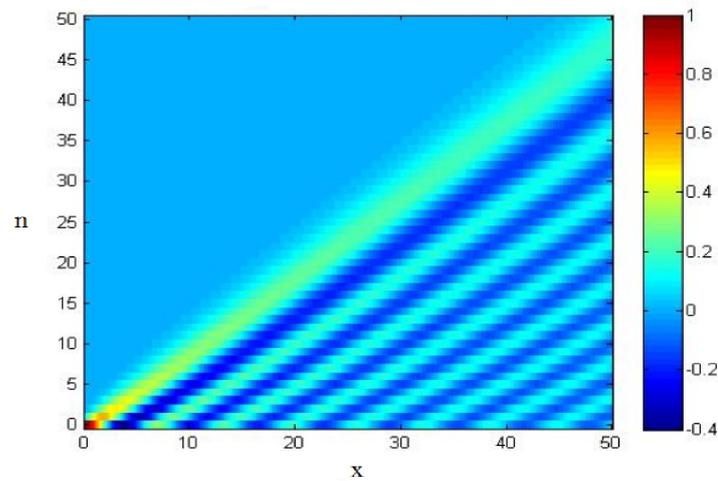
encontra-se

$$r = \frac{n}{x} \pm \sqrt{\frac{n^2}{x^2} - 1}$$

Observa-se que a relação de recorrência direta é estável quando  $|r| \leq 1$  o que ocorre quando  $n \leq x$  e é instável de outra maneira. Em outras palavras, para  $n \geq x$  a solução não desejada aumenta catastroficamente e se torna impossível calcular a solução mínima desejada, que entretanto decai. Isto pode ser visto a partir dos seguintes gráficos de  $J_n$

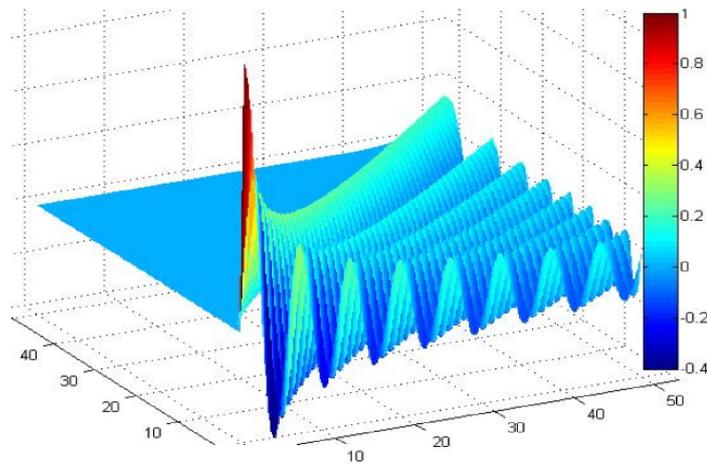
no plano  $x, n$ .

Figura 10: Gráfico das Funções de Bessel -  $J_n$  de Primeira Espécie no Plano  $x, n$



Fonte: Elaborado por Jin (2014)

Figura 11: Gráfico 3D das Funções de Bessel de Primeira Espécie no Plano  $x, n$



Fonte: Elaborado por Jin (2014)

Pode-se ver que para  $n > x$ , a solução mínima desejada  $J_n$  decai rapidamente enquanto que para  $n < x$  oscila com amplitude decadente.

### Zeros da Função de Bessel como os Autovalores do Operador de Laplace num Disco de Unidade

Considera-se um disco unitário  $D$  com uma membrana esticada através dele. As vibrações através do disco satisfazem a equação de onda bidimensional Equação diferencial parcial com as condições de contorno de Dirichlet. Deseja-se encontrar a solução para o

seguinte problema, sendo  $u = u(r, \theta)$  em coordenadas polares.

$$\begin{cases} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \lambda u & (1) \\ u(1, \theta) = 0 \quad \forall \theta & (2) \end{cases}$$

Observa-se que aqui resolve-se uma versão do problema sem dependência de tempo.

Aplica-se a separação de variáveis para  $u$ :  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  e obtém-se

$$\begin{cases} r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda r^2 - n^2 = 0 \\ \text{sendo } -n^2 = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta} \end{cases}$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

Esta é a equação diferencial de Bessel de ordem “ $n$ ” cuja solução é:

$$R(\sqrt{\lambda}r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

Desta forma, para resolver o problema da vibração de uma membrana num disco D, usou-se a função de Bessel de ordem  $n$ , assim:

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) = J_n(\sqrt{\lambda}r) \Theta(\theta)$$

e  $\Theta(\theta)$  deve ser determinado.

### 5.2.2 Aplicação da Função Bessel de Primeira Espécie em Transmissão de Frequência Modulada (FM)

Segundo Bulinda *et al* (2013), a natureza oscilatória das Funções de Bessel de primeira espécie, é usada para determinar o espectro de um sinal Frequência Modulada (FM) na transmissão de música e fala. É discutido um novo método proposto na síntese de FM para desenvolver as características espectrais da equação de FM. A transmissão em frequência modulada é matematicamente representada por uma distribuição harmônica de uma portadora de onda senoidal modulada por um sinal de onda senoidal, que será mostrada graficamente utilizando um software de cálculo numérico, num intervalo especificado pelo utilizador para confirmar a natureza oscilatória destas funções. O gráfico obtido foi comparado com o da expressão final que descreve o movimento do som quando atuado por uma função de forçamento sinusoidal. Este tipo de análise é altamente crucial

e significativo para os transmissores de FM, comumente utilizados pela banda de negócios para comunicação móvel e serviços de rádio FM para transmissão de voz.

Sabe-se que ondas são muitos dos fenômenos encontrados na vida diária. A música é transmitida de estações de rádio na forma de ondas eletromagnéticas, que são decodificadas e feitas para fazerem a membrana do auto-falante vibrar. Esta vibração provoca pressão em uma onda no ar que representa um movimento harmônico simples. De acordo com Chowning (1986) *apud* Bulinda *et al* (2013), a natureza do som e da audição humana estão ligadas à investigação matemática, através da qual os ouvidos humanos são capazes de detectar o som e a matemática dá uma poderosa maneira de entender o som e depois criá-lo e manipulá-lo. A síntese de frequência modulada é uma técnica elegante para criar sons complexos, que foi usada nos primeiros sintetizadores de música comercialmente bem sucedidos, produzidos na década de 1980. Essas aplicações têm soluções baseadas nas funções de Bessel, (Jennifer, 2008 *apud* Bulinda *et al*, 2013). Um exemplo é o de uma cadeia de densidade uniforme fixada numa extremidade sofrendo pequenas oscilações; portanto, essas funções estão associadas com uma vasta gama de problemas em áreas importantes da Física Matemática. Uma única onda de frequência em movimento, vai assumir a forma de uma onda senoidal, (Sebastian, 2011 *apud* Bulinda *et al*, 2013). Há duas características principais da vibração senoidal, nomeadamente Frequência e Amplitude. Esta é uma relação de onda geral que se aplica à ondas transversais, cujos exemplos são som e ondas de luz, (Erwin, 2006 *apud* Bulinda *et al*, 2013), outros exemplos são ondas eletromagnéticas e ondas em meios mecânicos. Música e matemática são linguagens expressivas, cujas relações são reveladas através de padrão ou ao acaso, (Frederick, 1947 *apud* Bulinda *et al*, 2013). Chowning (1986) *apud* Bulinda *et al* (2013) descobriu que trazendo a modulação na faixa de audição humana e usando um computador para controlar rigorosamente a relação entre a frequência portadora, a frequência modulada e a quantidade de modulação, o resultado seriam os timbres musicais. A modulação dessas frequências estava muito acima do alcance da audição humana. A síntese de modulação de frequência também se mostrou um processo muito menos intenso computacionalmente que a síntese aditiva simples, onde os tons senoidais são empilhados para criar tons musicais artificiais. O problema em estudo é a análise de funções de Bessel de primeira espécie para determinar as amplitudes da componente de frequência modulada, que envolve o estudo do movimento do som, o qual é uma onda submetida a uma função de forçamento senoidal. A intenção é obter uma expressão que descreve o movimento da massa em uma dimensão quando atuada por uma função de forçamento senoidal. A Função de Bessel de primeira espécie, foi usada para obter a equação de movimento em forma de série e para determinar as amplitudes de uma onda oscilante. Neste trabalho de Aplicação da Função Bessel de Primeira Espécie em Transmissão de Frequência Modulada (FM), isso

foi conseguido através:

- Da derivada da equação geral de um movimento harmônico simples e periódico, que foi feita usando o conhecimento obtido das equações diferenciais como um todo, para simplificar as equações resultantes da equação geral da onda usando a segunda lei de Newton do movimento e a lei de Hooks .
- Gráficos traçados para mostrar a natureza e o comportamento das ondas sonoras. Os gráficos desenhados mostram que a função  $f(x)$  está oscilando com uma amplitude decrescente e período variável. As raízes destas funções não são completamente espaçadas regularmente e a amplitude da onda diminui com o aumento da frequência modulada que se assemelha a uma função senoidal.

Pesquisas semelhantes sobre as funções de Bessel foram feitas por Jihao (2009) *apud* Bulinda *et al* (2013), ele apresentou um modelo de dados lineares para sinais senoidais de frequência modulada (FM) de múltiplos componentes, baseado no fato de que um sinal senoidal de FM pode ser decomposto em um conjunto de frequências harmônicas, com amplitudes harmônicas dadas pelas funções de Bessel de primeira espécie e através de várias propriedades derivadas do presente modelo de dados, foi proposto um novo método para estimar os parâmetros dos sinais senoidais FM de múltiplos componentes. A viabilidade do método proposto foi demonstrada por resultados de simulação.

### Formulação Matemática

Na Aplicação da Função Bessel de Primeira Espécie em Transmissão de Frequência Modulada (FM), assumiu-se que;

- As frequências no espectro estão na série harmônica,
- Ambos os harmônicos ímpares e pares estão em algumas vezes presentes,
- Os harmônicos aumentam em significância com intensidade,
- O tempo de subida da amplitude é rápido.

### Soluções das Equações

De acordo com Riley *et al* (1998) *apud* Bulinda *et al* (2013), uma onda que tem o seu perfil senoidal, é dito harmônico se

$$\varphi(x, t) = A \text{sen}(kx \pm \nu t) \tag{5.1}$$

A Equação (5.1) é a equação de uma onda harmônica, (Jain, 1984 *apud* Bulinda *et al*, 2013), resultando na equação básica para FM que é dada por:

$$x(t) = A \text{ sen } [\omega_c t + l \text{ seno}(\omega_m)t] \quad (5.2)$$

Considere-se uma partícula à distância  $x$  de uma partícula a sua direita, (Straus, 1992, Kythe *et al.*, 1997 e Smith & Roland, 2002 *apud* Bulinda *et al*, 2013), deixe a onda viajar da esquerda para a direita com velocidade  $\nu$ . Então o deslocamento no ponto  $A$  é dado por:

$$y = a \text{ sen}(\omega t - \alpha x) \quad (5.3)$$

em que  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$  e  $\alpha = 2\pi$ . Substituindo-os na Equação (5.3) e em seguida, diferenciando-na duas vezes com relação a  $x$  e  $t$  e substituindo, encontrou-se a equação de movimento de onda,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

que é aplicável a todos os tipos de ondas transversais, (Kreyszig 1993 *apud* Bulinda *et al*, 2013)

Equações diferenciais de Bessel dadas por:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (5.5)$$

em que  $n$  é a ordem da equação diferencial e é um número dado, real ou complexo. O ponto  $x = 0$  é uma singularidade regular, e é a função de Bessel é uma solução da equação (5.5) que tem uma solução da forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k} \quad (5.6)$$

Usando soluções de séries de potência e substituindo na equação (5.5), obtém-se a solução:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \quad (5.7)$$

As funções de Bessel  $J_n(x)$  possuem séries de potência que são convergentes, com melhor convergência do que as séries familiares para as funções exponenciais ou trigonométricas, que também podem ser expressas como a soma para valores integrais de  $n$ ,

(Basmdjian, 2002 *apud* Bulinda *et al*, 2013), onde  $n$  é um positivo inteiro e diferente de zero. Pode também ser escrito como um polinômio infinito com termos derivados da função gama,  $\Gamma$ , (Watson, 1995 *apud* Bulinda *et al*, 2013):

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (5.8)$$

Aqui  $J_n(mf)$  é a Função de Bessel de Primeira Espécie, com argumento ( $mf$ ) e ordem  $n$ .

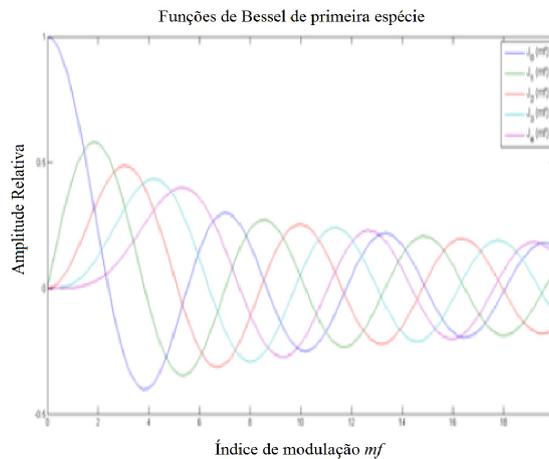
A relação entre os sinais de  $n$  é dada por:

$$J_n(mf) = (-1)^n J_n(mf) \quad (5.9)$$

### Resultados e Discussões

Este sinal modulado consiste em três ou mais componentes de frequência adicionados em conjunto para dar a aparência de uma onda senoidal. Pode-se facilmente ver que a frequência está variando com o tempo quando exibido no domínio do tempo. A partir dos dois gráficos das Funções de Bessel abaixo, os valores do termo  $J_n(mf)$  que dá a amplitude da  $n$ -ésima banda lateral com o índice de modulação  $mf$  são determinados. Usando a solução em série como mencionado na Equação (5.7), os valores dos termos  $J_n(mf)$  foram calculados. Matematicamente, os resultados da computação numérica dos valores de  $J_0(mf)$ ,  $J_1(mf)$ ,  $J_2(mf)$ ,  $J_3(mf)$ ,  $J_4(mf)$  e assim por diante, foram representados graficamente como ilustrado nas Figuras 12 e 13.

Figura 12: Função de Bessel de Primeira Espécie em  $0 \ll mf \ll 20$

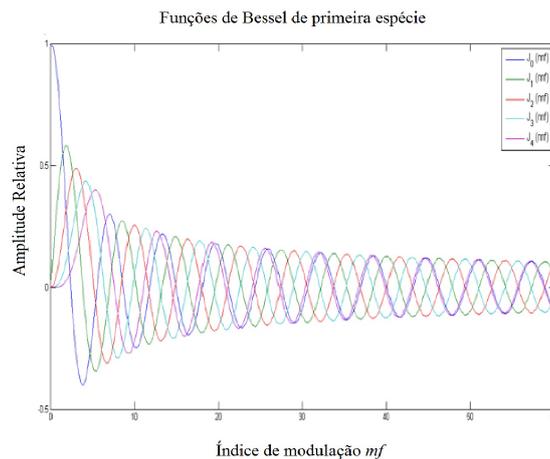


Fonte: Elaborado Bulinda *et al* (2013)

A partir de gráficos elaborados em *software* de manipulação numérica, usados para plotar a amplitude de bandas laterais em função do índice de modulação das Funções de Bessel de primeira espécie, pode ser observado que para valores pequenos de  $mf$ , as únicas funções de Bessel com qualquer amplitude significativa são  $J_0(mf)$  e  $J_1(mf)$ , enquanto a amplitude dos pares da faixa lateral de ordem superior ( $n > 1$ ) é muito pequena, (Saxena et al., 2009 *apud* Bulinda et al, 2013). À medida que  $mf$  aumenta, a amplitude da frequência de descanso diminui e a amplitude das bandas laterais de ordem superior aumenta, aumentando assim a largura de banda do sinal. Por conseguinte, observa-se que, à medida que  $mf$  continua a aumentar, os pares de banda lateral são essencialmente de amplitude zero, até cerca de  $mf = n$ , altura em que aumentam em amplitude para um máximo e depois diminuem novamente. Em todos os casos, como  $mf$  continua aumentando, cada função de Bessel parece se comportar como uma onda senoidal exponencialmente decrescente. Portanto, as amplitudes dos pares de banda lateral de ordem superior eventualmente aproximam-se de zero, (Abramowitz & Stegun, 1965 *apud* Bulinda et al, 2013).

Para valores particulares de  $mf$ , a amplitude de pares de frequência lateral particular, torna-se zero. A amplitude do suporte e cada par de bandas laterais foi dada por funções de Bessel de primeira espécie e a amplitude das frequências laterais de ordem superior diminui rapidamente com o aumento do tempo. Isto apresenta a aplicação das funções de Bessel da primeira espécie na análise de bandas laterais no processo de frequência modulação.

Figura 13: Função de Bessel de Primeira Espécie em  $0 \ll mf \ll 60$



Fonte: Elaborado Bulinda et al (2013)

A aplicação da função de Bessel na análise da frequência da banda lateral foi discutida de forma analítica. Em todos os casos, incluindo a frequência de repouso  $J_0(mf)$ ,

a amplitude da função de Bessel foi para zero para vários valores de  $mf$ , o que significa que a componente de frequência de repouso da onda FM pode desaparecer. À medida que  $mf$  aumenta, a largura de banda também aumenta e as linhas espectrais individuais não aumentam de amplitude monotonicamente, (Saxena et al., 2009 *apud* Bulinda et al, 2013). Suas amplitudes foram determinadas por  $J_n(mf)$ , que aparecem nas Figuras 12 e 13.

Desta análise, tem-se, portanto, afirmado que as ondas senoidais descrevem muitos fenômenos oscilantes, quando a onda é amortecida, cada pico sucessivo diminui com o passar do tempo.

Uma verdadeira onda senoidal começando em  $t = 0$  começa na origem (amplitude é zero), uma onda de cosseno começa no seu valor máximo devido à sua diferença de fase da onda senoidal. Na prática, uma dada forma de onda pode ser de fase intermédia, possuindo componentes seno e cosseno. O termo “onda senoidal amortecida” descreve todas essas formas de onda amortecidas, qualquer que seja o seu valor de fase inicial, os resultados da simulação comprovam que é correta a teoria proposta.

Em resumo, a partir dos resultados, pode-se ver que o som é causado por variações na pressão do ar e é percebido pela capacidade do ouvido humano em detectar essas variações. Estas vibrações na pressão do ar se propagam através do mesmo, como uma onda longitudinal que se move a uma dada velocidade. Por exemplo, se alguém estiver parado em um só lugar, ele pode perceber a pressão do ar mudando periodicamente como mostrado pelas duas figuras.

### 5.2.3 Funções de Bessel e algumas Aplicações

De acordo com Niedziela (2008), as funções de Bessel são uma série de soluções para uma equação diferencial de segunda ordem que surgem em diversas situações. Neste artigo deriva-se as funções de Bessel através do uso de uma solução em série para uma equação diferencial, desenvolve-se os diferentes tipos de funções de Bessel e explora-se o tópico de zeros. Finalmente, as funções de Bessel foram encontradas como a solução para a equação de Schrodinger em uma situação com simetria cilíndrica.

#### A Equação de Bessel

A equação de Bessel é uma equação diferencial de segunda ordem da forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (5.10)$$

Reescrevendo a equação como:

$$x(xy')' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (5.11)$$

E empregando o uso de uma série de potência generalizado, reescreve-se os termos de (5.11) em termos da série:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1} \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s} \\ (xy')' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s-1} \\ (xy')' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s} \end{aligned}$$

Quando os coeficientes das potências de  $x$  são organizados, descobre-se que estes fornecem a equação indicial  $s^2 - \nu^2 = 0 \implies \pm \nu$  e se desenvolveu a fórmula geral para o coeficiente no termo  $x^{s+n}$ :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - \nu^2} \quad (5.12)$$

No caso  $s = \nu$ :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad (5.13)$$

e desde  $a_1 = 0$ ,  $a_n = 0$  para todos os  $n =$  inteiros ímpares. Coeficientes para potências pares de  $n$  são encontrados:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)} \quad (5.14)$$

Sendo que para a função gama:

$$\Gamma(\nu+2) = (\nu+1)\Gamma(\nu+1),$$

$$\Gamma(\nu+3) = (\nu+2)\Gamma(\nu+2) = (\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

Pode-se escrever os coeficientes:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)} = -\frac{\Gamma(1+\nu)}{2^2\Gamma(2+\nu)}$$

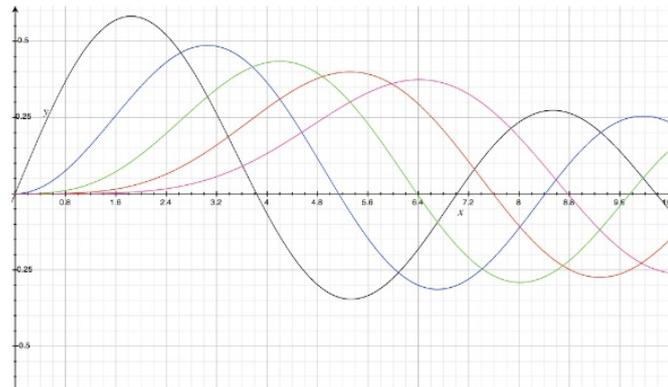
$$a_{2n} = -\frac{a_0\Gamma(1+\nu)}{n!2^{2n}\Gamma(n+1+\nu)}$$

O que permite escrever os termos da série:

$$y = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad (5.15)$$

onde  $J_\nu(x)$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $\nu$ . As primeiras funções de Bessel deste tipo são mostradas na Figura 14.

Figura 14: As Funções de Bessel de ordens  $\nu = 0$  à  $\nu = 5$



Fonte: Elaborado por Niedziela (2008)

### Diferentes Ordens das Funções de Bessel

Na seção anterior, a forma das funções de Bessel obtidas, são conhecidas como funções de Bessel de primeira espécie. Diferentes tipos de funções de Bessel são obtidos com valores negativos de  $\nu$ , ou com argumentos complexos. Esta seção explora brevemente estes diferentes tipos de funções.

### Funções de Neumann

As funções de Bessel de segunda espécie são conhecidas como Funções de Neumann e são desenvolvidas como uma combinação linear de Funções de Bessel da primeira ordem descrita:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sen \nu \pi} \quad (5.16)$$

Para valores integrais de  $\nu$ , a expressão de  $N_\nu(x)$  tem uma forma indeterminada e  $N_\nu(x)|_{x=0} = \pm\infty$ . No entanto, o limite desta função para  $x \neq 0$ , a expressão para  $N_\nu$  é válida para qualquer valor de  $\nu$ , permitindo que a solução geral para a equação de Bessel seja escrita:

$$y = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \quad (5.17)$$

com  $A$  e  $B$  constantes arbitrárias determinadas a partir de condições de fronteira.

As funções de Bessel de primeira e segunda espécie, são as formas mais comuns da função de Bessel em aplicações. Muitas aplicações em hidrodinâmica, elasticidade e sistemas oscilatórios têm soluções baseadas nas funções de Bessel. Um exemplo é o de uma cadeia de densidade uniforme fixada numa extremidade sofrendo pequenas oscilações. A equação diferencial desta situação é:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \frac{k^2u}{z} = 0 \quad (5.18)$$

onde  $z$  se refere à um ponto na cadeia,  $k^2 = \frac{p^2}{g}$ , com  $p$  como a frequência de pequenas oscilações nesse ponto e  $g$  a constante gravitacional da aceleração. Equação (5.18) é uma forma de Equação (5.10) e a solução é:

$$u = AJ_0(2kz^{\frac{1}{2}}) + BY_0(2kz^{\frac{1}{2}}) \quad (5.19)$$

em que  $A$  e  $B$  são determinados pelas condições de contorno.

### Funções de Bessel Modificadas

Funções modificadas de Bessel são encontradas como soluções para a equação modificada de Bessel

$$x^2y'' + xy' - (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (5.20)$$

que se transforma na Equação (5.10) quando  $x$  é substituído por  $ix$ . Contudo, isto deixa a solução geral da Equação (5.10) uma função complexa de  $x$ . Para evitar lidar com soluções complexas em aplicações práticas, as soluções para Equação (5.20) são expressas na forma:

$$I_\nu(x) = e^{\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(xe^{\frac{\pi i}{2}}) \quad (5.21)$$

Os  $I_\nu(x)$  são um conjunto de funções conhecidas como as funções modificadas de

Bessel de primeira espécie. A solução geral da função de Bessel modificada é expressa como uma combinação de  $I_\nu(x)$  e uma função  $I_{-\nu}(x)$ :

$$y = AI_{-\nu}(x) - BI_\nu(x) \quad (5.22)$$

onde novamente  $A$  e  $B$  são determinados a partir das condições de contorno.

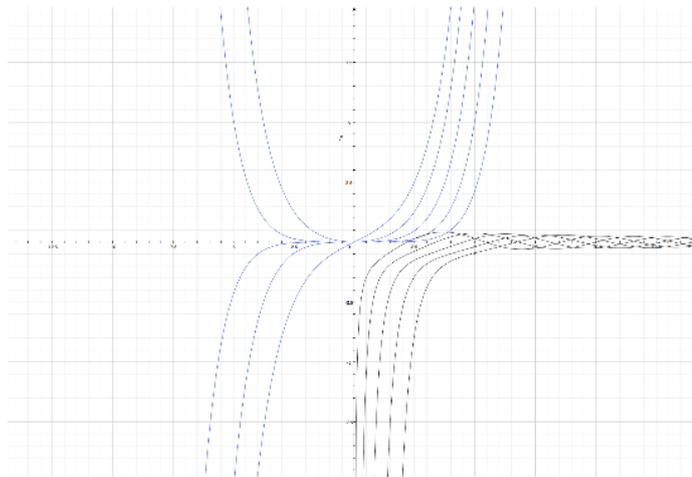
Uma solução para ordens não inteiras de  $\nu$  é encontrada por:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \operatorname{sen} \nu \pi} \quad (5.23)$$

As funções  $K_\nu(x)$  são conhecidas como funções de Bessel modificadas de segunda espécie. Um gráfico das funções de Neumann ( $N_\nu(x)$ ) e funções de Bessel modificadas ( $I_\nu(x)$ ) é mostrado na Figura 15. Um gráfico das funções de segunda espécie modificadas ( $K_n(x)$ ) é mostrado na Figura 16.

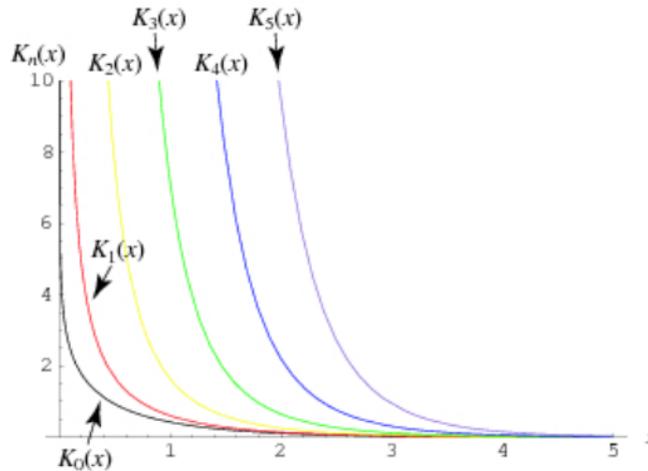
As funções de Bessel modificadas aparecem com menor frequência em aplicações, mas podem ser encontradas em estudos de linhas de transmissão, feixes não uniformes e o tratamento estatístico de um gás relativístico em mecânica estatística.

Figura 15: As Funções de Neumann (preto) e as Funções de Bessel Modificadas (azul) para ordens inteiros de  $\nu = 0$  à  $\nu = 5$



Fonte: Elaborado por Niedziela (2008)

Figura 16: Funções de Bessel Modificadas de segunda espécie para ordens inteiros de  $\nu = 0$  à  $\nu = 5$



Fonte: Elaborado por Niedziela (2008)

### Zeros das Funções de Bessel.

Os zeros das funções de Bessel são de grande importância em aplicações. Os zeros ou raízes das funções de Bessel são os valores de  $x$  onde o valor da função de Bessel vai para zero ( $J_\nu(x) = 0$ ). Repetidamente, os zeros são encontrados em formatos tabulados, pois devem ser numericamente avaliados. As funções de Bessel de primeira e segunda espécie, têm um número infinito de zeros enquanto o valor de  $x$  vai para  $\infty$ . Os zeros das funções podem ser vistos nos pontos de cruzamento dos gráficos nas Figuras 15 e 16. As funções modificadas de Bessel de primeira espécie ( $I_\nu(x)$ ) têm apenas um zero no ponto  $x = 0$  e as funções modificadas de Bessel de segunda espécie ( $K_\nu(x)$ ) não tem zeros.

Os zeros da função de Bessel são explorados na transmissão de rádio frequência modulada (FM). A transmissão FM é matematicamente representada por uma distribuição harmônica de uma portadora de onda senoidal modulada, ou seja, por um sinal de onda senoidal que pode ser representada com Funções de Bessel. As frequências portadoras ou de banda lateral, desaparecem quando o índice de modulação (o desvio de frequência de pico dividido pela frequência de modulação) é igual ao cruzamento zero da função para a  $n$ -ésima banda lateral.

### Aplicação - Solução para a Equação de Schrödinger em Reservatório Cilindrico

Considere uma partícula de massa  $m$  colocada em um reservatório de potencial bidimensional, onde o potencial é zero dentro do raio do disco, infinito fora do raio do disco. Em coordenadas polares usando  $r$ ,  $\phi$  como representantes do sistema, o Laplaciano

é escrito:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \quad (5.24)$$

O que na equação de Schrödinger apresenta:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \right] = E\Psi \quad (5.25)$$

Utilizando o método de separação de variáveis com uma solução proposta  $\Psi = R(r) T(\phi)$  na Equação (5.25) produz:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ T(\phi) \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} R(r) \frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} \right] = ER(r)T(\phi) \quad (5.26)$$

e depois dividindo por  $\Psi$ :

$$\left[ \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} \right] = \frac{-2mE}{\hbar^2} \quad (5.27)$$

estabelecendo  $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$  e multiplicando por  $r^2$  obtém-se:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\phi^2} = 0 \quad (5.28)$$

que está totalmente separado em  $r$  e  $\phi$ . Para resolver a parte dependente de  $\phi$  é ajustada para  $-m^2$ , resultando na equação do oscilador harmônico em  $T(\phi)$ , que apresenta a solução:

$$T(\phi) = Ae^{im\phi} \quad (5.29)$$

na qual  $A$  é uma constante determinada através de normalização  $\phi$ :

$$\int_0^{2\pi} A^2 T(\phi) T(\phi) d(\phi) = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \quad (5.30)$$

deixando a parte  $\phi$  dependente  $T(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\phi}$ .

Trabalhando agora com a parte  $r$  dependente da equação separada, multiplicando

a parte  $r$  dependente da Equação (5.28) por  $r^2$  e ajuste igual para  $m^2$ , obtém-se:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 = m^2 \quad (5.31)$$

que, quando rearranjado:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - m^2) = 0 \quad (5.32)$$

que é da mesma forma que a Equação (5.10), a equação diferencial de Bessel. A solução geral da Equação (5.32) é da forma da Equação (5.17) e escreve-se essa solução geral como:

$$R(r) = AJ_m(kr) + BN_m(kr), \quad (5.33)$$

onde  $J_m(kr)$  e  $N_m(kr)$  são respectivamente, as funções de Bessel e Neumann de ordem  $m$ , com  $A$  e  $B$  sendo constantes a determinar através da aplicação das condições de contorno. Como a solução deve ser finita em  $x = 0$  e como  $N_m(kr) \rightarrow \infty$ , isto significa que o coeficiente de  $N_m(kr) = B = 0$ , deixando  $R(r)$  a ser expresso como:

$$R(r) = AJ_m(kr) \quad (5.34)$$

Usando a condição de contorno que  $\Psi = 0$  no raio do disco, temos a condição de que  $J_m(kr_b) = 0$ , que implicitamente requer que o argumento de  $J_m$  seja um zero da Função Bessel. Como mencionado anteriormente, esses zeros devem ser calculados individualmente de forma numérica. Exigindo que  $kr_b = \alpha_{m,n}$ , que é o  $n$ -ésimo zero da função Bessel de ordem  $m$ , a energia do sistema é resolvida expressando  $k$  em termos de  $\alpha_{m,n}$  na Equação  $\left(k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right)$  chegando em:

$$E_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}^2 \hbar^2}{2mr_b^2} \quad (5.35)$$

a solução completa para  $\Psi$  é:

$$\Psi_m(r, \phi) = AJ_m\left(\frac{\alpha_{m,n} r}{r_b}\right) e^{im\phi} \quad (5.36)$$

Como os zeros da função de Bessel não podem ser determinados a priori, é difícil encontrar uma solução fechada para expressar a constante de normalização  $A$ . Selecionou-se uma ordem para  $m$ , para continuar com a determinação da constante de normalização

e arbitrariamente escolheu-se  $m = 2$ , que tem um zero em  $r = 5,13562$ , que definiu-se como o raio do círculo. Dado o precedente, a normalização pode ser para o  $m = 2; n = 1$  caso pode ser encontrado:

$$\int_0^{r_{contorno}} A^2 J_2 \left( \frac{\alpha_{2,1} r}{r_b} \right) J_2 \left( \frac{\alpha_{2,1} r}{r_b} \right) dr = 1 \quad (5.37)$$

que para  $r_{contorno} = 5,13562 = \sqrt{\frac{1}{0,510377}}$ , (valores numéricos obtidos por integração numérica). Assim, podemos expressar a solução completa para o cenário  $m = 2$ :

$$\Psi(r, \phi) = \sqrt{\frac{1}{0,510377}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} J_2 \left( \frac{\alpha_{2,1} r}{r_b} \right) e^{im\phi} \quad (5.38)$$

E tem-se efetivamente set  $\alpha_{m,n} = r_b$ ,

$$\Psi(r, \phi) = \sqrt{\frac{1}{0,510377}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} J_2(r) e^{im\phi} \quad (5.39)$$

É certo que esta solução é algo planejada, mas mostra a importância de trabalhar com os zeros da função Bessel para gerar a solução particular usando as condições de contorno.

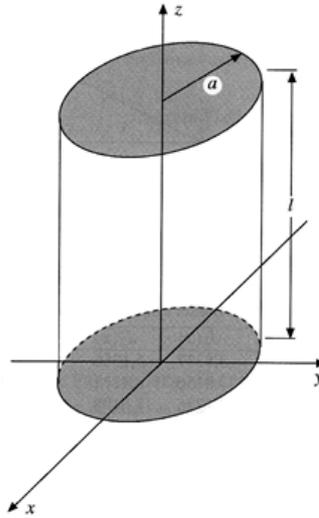
As funções de Bessel aparecem em diversos cenários, particularmente em situações envolvendo simetria cilíndrica. O aspecto mais difícil de se trabalhar com a função de Bessel, é primeiro determinar que elas podem ser aplicadas através da redução do sistema de equação para a equação diferencial ou equação modificada de Bessel e em seguida, manipular condições de contorno com aplicação adequada de zeros e os valores de coeficiente no argumento de Função Bessel.

#### 5.2.4 Cavidade Ressonante Cilíndrica

Conforme Arfken e Weber (2007, p.516), a propagação de ondas magnéticas em cilindros metálicos ocos é importante em muitos dispositivos práticos. Se as extremidades do cilindro forem superfícies, ele é denominado **cavidade**. Cavidades ressonantes desempenham um papel crucial em muitos aceleradores de partículas.

Considerando-se o eixo  $z$  ao longo do centro da cavidade cujas extremidades são superfícies em  $z = 0$  e  $z = 1$ , usa-se coordenadas cilíndricas que são sugeridas pela geometria. Suas paredes são condutores perfeitos, portanto o campo elétrico tangencial desaparece nelas, como na Figura 17:

Figura 17: Cavidade Ressonante Cilíndrica



Fonte: Elaborado por Arfken e Weber (2007)

$$E_z = 0 = E_\varphi, \text{ para } \rho = a, \quad E_\rho = 0 = E_\varphi, \text{ para } z = 0, l.$$

Dentro da cavidade temos um vácuo, portanto  $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ . Ondas magnéticas no interior de uma cavidade ressonante oscilam com dependência harmônica do tempo  $e^{-i\omega t}$ , o que resulta de separar o tempo das variáveis especiais em equações de Maxwell, portanto

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \alpha^2 E, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}$$

Com  $\nabla \cdot E = 0$  (vácuo, nenhuma carga) e a equação  $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla \nabla \cdot V - \nabla \cdot \nabla V$ . Obtem-se, para a parte espacial do campo elétrico,

$$\nabla^2 E + \alpha^2 E = 0,$$

que é denominada **Equação Diferencial Parcial (EDP) vetorial de Helmholtz**. A componente  $z$  ( $E_z$ , somente parte espacial) satisfaz a equação escalar de Helmholtz,

$$\nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0, \tag{5.40}$$

As componentes do campo elétrico transversal  $E_\perp = (E_\rho, E_\varphi)$  obedecem a mesma EDP, mas em condições de contorno diferentes, dadas anteriormente. Uma vez que  $E_z$  é conhecida, as equações de Maxwell determinam  $E_\varphi$  totalmente.

Separa-se a variável  $z$  de  $\rho$  e  $\varphi$ , porque não há nenhuma derivada mista  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho}$  etc. A solução de produto,  $E_z = v(\rho, \varphi)w(z)$ , é substituída na EDP de Helmholtz por

$E_z$  usando a equação  $\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$  para  $\nabla^2$  em coordenadas cilíndricas e então dividimos por  $v\omega$ , resultando

$$\frac{1}{w(z)} \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial^2v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2} + \alpha^2 \right) v(\rho, \varphi) = 0$$

Isso implica

$$-\frac{1}{w(z)} \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{v(\rho, \varphi)} \left( \frac{\partial^2v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2} + \alpha^2 v \right) = k^2.$$

Aqui,  $k^2$  é uma constante de separação porque os lados direito e esquerdo dependem de variáveis diferentes. Para  $w(z)$  encontra-se a Equação Diferencial Ordinária (EDO) do oscilador harmônico com solução de onda estacionária (não-transitória) que se procura,

$$w(z) = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz,$$

com  $A, B$  constantes. Para  $v(\rho, \varphi)$  obtemos

$$\frac{\partial^2v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2} + \gamma^2 v = 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - k^2.$$

Nessa EDO podemos separar as variáveis  $\rho$  e  $\varphi$  porque não há nenhum termo misto  $\frac{\partial^2v}{\partial\rho\partial\varphi}$ . A forma de produto  $v = u(\rho)\Phi(\varphi)$  em

$$\frac{\rho^2}{u(\rho)} \left( \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \gamma^2 \right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m^2,$$

em que a **constante de separação  $m^2$  deve ser um inteiro**, porque a solução angular  $\Phi = e^{im\varphi}$  da EDO

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$$

essa EDO deve ser periódica no ângulo azimutal<sup>1</sup>

Isso nos deixa com a EDO radial

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) u = 0.$$

---

<sup>1</sup>Azimutal: Relativo ao azimute. Azimute: Astr. Distância angular, medida sobre o horizonte, a partir de um ponto origem, geralmente o sul, no sentido dos ponteiros do relógio ou no sentido inverso, até o círculo vertical que passa por um dado astro. 2. Ópt. Ângulo entre a perpendicular ao plano de incidência e o plano de vibração de uma radiação eletromagnética planopolarizada. Tomar o azimute. Náut. 1. Determiná-lo, medi-lo. (AURÉLIO BUARQUE DE HOLANDA FERREIRA, 1999)

Argumentos dimensionais sugerem elevar  $\rho \rightarrow r = \gamma\rho$  e dividir por  $\gamma^2$ , o que resulta em

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{m^2}{r^2}\right) u = 0.$$

Essa é a EDO de Bessel de ordem  $\nu = m$ . Usamos a solução regular  $J_m(\gamma\rho)$  porque a segunda solução independente (irregular) é singular na origem, o que é inaceitável aqui. A solução completa é

$$E_z = J_m(\gamma\rho)e^{im\varphi} (A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz), \quad (5.41)$$

Em que a constante  $\gamma$  é determinada pela **condição de contorno**  $E_z = 0$  sobre a superfície da cavidade  $\rho = a$ , isto é, que  $\gamma a$  seja uma raiz da função de Bessel  $J_m$  (ver Tabela 1). Isso dá um conjunto discreto de valores  $\gamma = \gamma_{mn}$ , em que  $n$  designa a  $n$ ésima raiz de  $J_m$  (ver Tabela 1).

Tabela 1: Zeros das Funções de Bessel e suas Derivadas de primeira ordem

Números de Zeros	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6237	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178
	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$		
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012		
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152		
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459		

$$J'_0(x) = -J'_1(x)$$

Elaborado por Arfken e Weber (2007)

Para o modo de oscilação transversal magnético (TM), com  $H_z = 0$ , as equações de Maxwell estão implícitas.

$$E_{\perp} \sim \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla_{\perp} = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

A forma desse resultado sugere  $E_z \sim \operatorname{cos} kz$ , isto é, estabelecer  $A = 0$ , de modo que  $E_{\perp} \sim \operatorname{sen} kz = 0$  em  $z = 0$ ,  $l$  possa ser satisfeita por

$$k = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

Assim, os campos elétricos **tangenciais**  $E_{\rho}$  e  $E_{\varphi}$  desaparecem em  $z = 0$  e  $l$ . Em

outras palavras,  $A = 0$  corresponde às  $\frac{dE_z}{dz} = 0$  em  $z = 0$  e  $z = l$  para o modo TM. Então, no total temos

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{l^2}, \quad (5.43)$$

com

$$\gamma = \gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}, \quad (5.44)$$

em que  $\alpha_{mn}$  é o  $n$ -ésimo zero da de  $J_m$ . Agora, a solução geral

$$E_z = \sum_{m,n,p} J_m(\gamma_{mn}\rho) e^{\pm im\varphi} B_{mnp} \cos \frac{p\pi z}{l}, \quad (5.45)$$

com constantes  $B_{mnp}$ , resulta do princípio da superposição.

O resultado das duas condições de contorno e da constante de separação  $m^2$ , é que a frequência angular de nossa oscilação depende de três parâmetros discretos:

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, 3, \dots, \\ p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.46)$$

Essas são as frequências ressoantes permissíveis para nosso modo TM.