

Alguns modelos de Equações Diferenciais Ordinárias

Autora: *Letícia Gabriele Ribeiro Rocumba*

Orientadora: *Ana Cristina de Oliveira Mereu*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Prof. Dr. Sadao Massago
Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Sorocaba, 21 de fevereiro de 2023.

Alguns modelos de Equações Diferenciais Ordinárias

Autora: *Letícia Gabriele Ribeiro Rocumba*

Orientadora: *Ana Cristina de Oliveira Mereu*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Prof. Dr. Sadao Massago
Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Sorocaba, 21 de fevereiro de 2023.

Letícia Rocumba

Letícia Gabriele Ribeiro Rocumba

Acomereu

Ana Cristina de Oliveira Mereu



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS
Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298874 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 1/2023/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LETICIA GABRIELE RIBEIRO ROCUMBA

ALGUNS MODELOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 26 de janeiro de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientadora	Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Sadao Massago
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Paulo César Oliveira



Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina de Oliveira Mereu, Docente**, em 26/01/2023, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago, Docente**, em 27/01/2023, às 07:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira, Docente**, em 30/01/2023, às 22:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0927745** e o código CRC **B4D49C44**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.002001/2023-21

SEI nº 0927745

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Agradecimento

Primeiramente, agradeço imensamente a minha família, a minha mãe Vilma por todo apoio e motivação, a minha irmã Ludmila por toda ajuda no desenvolvimento desta monografia e fora dela, amo você, e ao meu pai Odair, por lutar tanto pela minha formação e proporcionar esse privilégio em minha vida.

Agradeço aos meus amigos por estarem comigo em todo este processo e por cada etapa, sem vocês isso jamais seria possível. Em especial ao Gabriel que me incentivou e me consolou em todos os momentos e que sempre esteve ao meu lado.

Agradeço imensamente a todos os professores que fizeram parte desta jornada e aos Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão e Prof. Dr. Paulo César Oliveira por todos conselhos e ensinamentos que foram de muita ajuda para guiar o meu aprendizado.

Agradeço ao Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu por toda paciência, dedicação e por me instruir no decorrer desta monografia.

Aos prezados Prof. Dr. Paulo César Oliveira e o Prof. Dr. Sadao Massago que aceitaram compor a banca de monografia e correções que a enriqueceram.

Por fim, agradeço a secretária do curso de matemática, Rafaela, por ser tão especial e requisitada por todos nós, você é o coração deste curso.

Resumo

O presente trabalho foi desenvolvido tendo como objetivo apresentar alguns modelos de equações diferenciais ordinárias, utilizando o estudo de álgebra linear, sistemas planares e retratos de fases. Sendo realizadas ao longo do trabalho, estudo de crescimento e interação de espécies, análise de sistemas planares, e simulações do Phyton, para suporte e compreensão dos principais conceitos estudados.

Palavra-Chave: Equações diferenciais, Álgebra Linear, Sistemas Planares, Modelos.

Abstract

The present work was developed with the aim of presenting some models of ordinary differential equations, using the study of linear algebra, planar systems and phase portraits. Models are based on the study of growth and interaction of species, analysis of planar systems, and Python simulations are carried out throughout the work, providing support and understanding of the main concepts studied.

Keywords: Differential equations, Linear Algebra, Planar Systems, Models.

Sumário

Introdução	x
1 Equações Diferenciais de 1^o ordem	1
1.1 Equação diferencial de 1 ^o ordem e sua solução	1
1.2 Modelos de crescimento de Verhulst	2
1.3 Aplicação Covid	2
1.3.1 Crescimento Logístico	3
1.3.2 Análise dos Dados	6
2 Sistemas de Equações Diferenciais Planares	7
2.1 Equações Diferenciais de 2 ^o ordem	7
2.2 Sistemas de equações diferenciais planares	8
2.2.1 Álgebra Linear: Uma pequena Consideração	9
2.3 Autovalores e Autovetores	10
2.4 Retratos de Fase e Classificação de Sistemas Planares	12
2.4.1 Primeiro Caso: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	12
2.4.2 Segundo Caso: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	15
2.4.3 Terceiro Caso: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$	16
2.5 Autovalores Complexos	16
2.6 Autovalores Repetidos	19
2.7 Romeu e Julieta	21
2.7.1 Primeiro Caso: Diagonal Principal Nula	22
2.7.2 Um caso de amor intenso	22
2.7.3 Um caso de amor complicado	23
2.7.4 Um caso de amor inconstante	24
2.7.5 Segundo Caso: Diagonal Secundária Nula	25
2.7.6 Um caso de amor a primeira vista	25
2.7.7 Um caso de amor unilateral	26
2.7.8 Um caso de amor apático	26
3 Um pouco de aplicação	28
3.1 Modelo de Competição entre Espécies	28

3.2	Modelo De Lotka-Volterra	29
3.3	O câncer	29
3.3.1	Crescimento Tumoral	30
3.4	Interação entre Células Normais e Células Tumorais	30
3.4.1	Pontos de Equilíbrio	31
3.4.2	Simulações em Phyton	31
3.5	Conclusões	34

Lista de Figuras

1.1	Comparação entre os métodos e os dados coletados	6
2.1	Campo vetorial para o sistema $x' = y, y' = -x$	8
2.2	Retrato de fase de autovalores reais e distintos.	14
2.3	Retrato de fase de autovalores reais e negativos.	16
2.4	Retrato de fase de autovalores reais e positivos.	16
2.5	Retrato de fase de centros com sentido horário.	18
2.6	Retrato de fase de foco estáveis.	19
2.7	Romeu e Julieta.	22
2.8	Caso em que $b > 0$ e $c > 0$	23
2.9	Caso em que $b < 0$ e $c < 0$	23
2.10	Caso em que $b < 0$ e $c > 0$	24
2.11	Caso em que $b > 0$ e $c < 0$	25
2.12	Caso em que $a, d > 0$	26
2.13	Caso em que $a, d < 0$	27
3.1	Dinâmicas dos Sistemas 1	32
3.2	Dinâmicas dos Sistemas 2	33
3.3	Pontos de Equilíbrio Estável	34

Introdução

A matemática é tida como um fantasma assustador das ciências, trabalhada sempre como muito rigor e formalidades é temida pelas pessoas por parecer sempre muito complexa e chata. Assim neste trabalho, apresentaremos uma pequena parte da matemática, que é um estudo sobre três modelos de equações diferenciais ordinárias, que mostram a importância da matemática para as ciências e como o estudo dela pode ser lúdico.

O primeiro modelo aqui proposto trata sobre o crescimento de pessoas infectadas pelo COVID-19 na cidade de Sorocaba - SP, em um período de um ano entre maio de 2020 a maio 2021, quando a pandemia estava em seu pior estágio, e a maior parte da população não havia sido vacinada ainda.

Já o segundo modelo, apresenta uma situação matemática fictícia e fantasiosa do caso de amor mais famoso da literatura, o romance entre Romeu e Julieta, trabalhando os retratos de fases de cada caso que nos mostra um tipo de relação do casal.

No terceiro e último modelo, é apresentada uma simulação da interação de células normais e células tumorais e seus respectivos crescimentos ao longo do tempo, partindo do conceito de competição entre espécies.

Capítulo 1

Equações Diferenciais de 1^o ordem

Neste capítulo apresentaremos as definições de equações diferenciais de primeira ordem, Problema de Valor Inicial de EDOs de primeira ordem, solução de EDO de primeira ordem e exemplo de modelo de crescimento populacional na modelagem do crescimento de casos de infecção por COVID-19 na cidade de Sorocaba-SP.

1.1 Equação diferencial de 1^o ordem e sua solução

As equações diferenciais de primeira ordem são representadas por:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1.1)$$

onde f é uma função de duas variáveis. Uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de solução [4].

Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1.2)$$

onde a é um parâmetro real. Temos que

$$x(t) = ke^{at}$$

é solução desta equação, pois

$$\frac{d(ke^{at})}{dt} = ake^{at} = ax(t).$$

Se tivermos

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

então nossa equação será um problema de valor inicial (PVI) onde a solução é dada por

uma função que seja solução da equação diferencial que satisfaça $x(t_0) = x_0$.

1.2 Modelos de crescimento de Verhulst

O modelo de crescimento de Verhulst (1837) é um exemplo de uma equação diferencial de primeira ordem, onde é suposto que toda população está predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, causados por inúmeros fatores, que leva sempre a uma tendência de um valor constante em seu crescimento. O modelo é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N, \quad (1.3)$$

onde N é o número de indivíduos, k é o fator limitante da população e r é a taxa de crescimento.

Separando as variáveis da equação (1.3) e integrando, temos

$$\int \frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \int r dt \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{N}{K - N}\right| = rt + c \Rightarrow$$

$$N = \frac{Kce^{rt}}{1 + ce^{rt}}.$$

Considerando que $N(0) = N_0$, temos

$$c = \frac{N_0}{N_0 - K}.$$

Logo a solução para o PVI é

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)^{-rt}}.$$

1.3 Aplicação Covid

Surpreendendo a todos, e surgida no final de 2019 em Hubei na China, a Pandemia causada pela COVID-19, se alastrou pelo mundo com uma velocidade e um impacto assolador. Em meados de março de 2020 a pandemia era nova, porém presente em nosso país, e com o passar dos meses tomou proporções gigantescas. Seu alto nível de contágio impactou o mundo todo e devido a isso a comunidade científica do mundo se reuniu para combater uma das maiores pandemias dos últimos 100 anos e a matemática não poderia ficar de fora dessa.

Em busca da compreensão do comportamento de infecção do vírus da COVID-19, diversos modelos matemáticos surgiram com possíveis previsões de comportamento no

número de contágio. Era importante entender quantas pessoas poderiam ser infectadas, qual o pico da pandemia, o quão desolador ela poderia ser e trazer dados otimistas em relação ao fim dela e a um possível controle.

O artigo de Wang, Qiao e Li (2020), utiliza do modelo matemático de crescimento populacional, especificamente o da equação logística de Verhulst, desenvolvido por Pierre François Verhulst, para encontrar uma equação que prevê o número de possíveis casos de infecção por COVID-19 em relação ao tempo. O modelo foi desenvolvido considerando o número de casos ocorridos entre 24 de março de 2020 a 24 de junho de 2020, no Texas, Estados Unidos. E tem como objetivo, estimar o número de casos futuros através da equação logística desenvolvida, dando o valor aproximado de casos conforme o tempo, onde o tempo é o mês em questão analisado. No artigo é apresentado um modelo para os casos de COVID-19 do estado e as possíveis tendências de contaminação do vírus. No entanto, devido a simplificação do modelo, os resultados obtidos não fizeram uma previsão muito precisa.

Até onde sabe-se, não existem trabalhos sobre o estudo de comparação para os casos de COVID-19 através do Crescimento Logístico de Verhulst e do Método dos Quadrados Mínimos, para a cidade de Sorocaba-SP, logo, o objetivo é comparar os dados reais de infectados com as aproximações dos modelos e se é possível perceber qual deles se aproxima mais da realidade, qual é o mais preciso e alcança valores mais satisfatórios em questão de previsão, a fim de alcançarmos uma dimensão dos impactos da pandemia na cidade.

1.3.1 Crescimento Logístico

Em algum momento se faz necessário ou se torna imprescindível questionar até onde uma coisa é capaz de chegar. Bacaer (2008) relata que Verhulst em 1838 fez isso e foi atrás de algo inimaginável; o limite de pessoas que a Bélgica poderia comportar/sustentar. O modelo Logístico de crescimento populacional de Verhulst, ao contrário dos modelos convencionais de crescimento utilizados, como o exponencial, onde se consideram apenas o crescimento em função do tempo, podendo o valor da população ir ao infinito, leva em consideração um certo limite máximo na qual determinada população pode crescer, e que quando atingido esse valor o crescimento tende a estabilizar.

Esse limite estabelecido na equação logística de Verhulst, leva em consideração fatores como os recursos disponíveis no ambiente, a existência de outras populações que vivem ao redor, o próprio tamanho da população, entre outros. O limite estabelecido, denominado de limite de carga, é um controlador para o crescimento populacional, pois impede que os valores alcancem números muito altos que não se enquadrem com a situação condizente. Devido ao seu limite de carga, que considera fatores para além da população em relação ao tempo, o crescimento logístico de Verhulst é muito utilizado nos estudos de crescimento populacional de vírus, habitantes de uma região e crescimento de espécies.

Os dados foram retirados do Repositório do Centro de Ciência e Engenharia de Siste-

mas (CSSE) da Universidade Johns Hopkins, analisando o período correspondente entre os dias 28/03/2020 e 28/05/2021.

Utilizando a equação diferencial do modelo logístico de crescimento populacional abaixo:

$$\dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right) \quad (1.4)$$

, podemos resolver o modelo de crescimento logístico isolando a variável x , tendo então uma equação que mostra a população dado um determinado tempo t . Para isto, primeiro divide-se ambos os lados da equação por $(1 - x/N)$, e em seguida integramos como demonstrado pela equação (1.5) a seguir:

$$\int \frac{N}{x(N-x)} dx = \int a dt. \quad (1.5)$$

Na parte esquerda da igualdade é necessário realizar integração por frações parciais, método indicado por Stewart (2016), de tal forma que $\frac{N}{x(N-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{N-x}$. Quando $x = 0$, temos que: $N = AN \Rightarrow A = 1$. Quando $x = N$, temos que: $N = BN \Rightarrow B = 1$. Dessa forma transformamos a equação (1.5) na (1.6), facilitando muito a integração.

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right) dx = \int a dt. \quad (1.6)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \ln|x| - \ln|N-x| &= at + C \Rightarrow \\ e^{\ln|x| - \ln|N-x|} &= e^{at+C} \end{aligned}$$

Seja $K = e^C$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{N-x} &= Ke^{at} \Rightarrow \\ x + Ke^{at}(x) &= Ke^{at}(N) \Rightarrow \\ x &= \frac{NKe^{at}}{1 + Ke^{at}} \Rightarrow \\ x &= \frac{N}{Ke^{-at} + 1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Considerando o valor inicial $x(0) = x_0$, conseguimos encontrar o valor da constante K :

$$K = \frac{N - x_0}{x_0}.$$

Realizando algumas manipulações algébricas e substituindo o valor de K em (1.7), con-

seguimos encontrar a solução geral da equação.

$$x = \frac{Nx_0}{e^{-at}(N - x_0) + x_0}. \quad (1.8)$$

Basta agora encontrar o valor das constantes N e x_0 . Inicialmente será necessário isolar N .

$$\begin{aligned} x[e^{-at}(N - x_0) + x_0] &= Nx_0 \Rightarrow \\ xe^{-at}N - xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 \Rightarrow \\ -xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 - xe^{-at}N. \end{aligned}$$

Fatorando ambos os lados e dividindo $xe^{-at} - x_0$, conseguimos chegar na seguinte equação:

$$N = \frac{xx_0(e^{-at} - 1)}{xe^{-at} - x_0}. \quad (1.9)$$

Usando a equação acima, pode-se formar um conjunto de equações cuja interseção possibilitará encontrar os valores numéricos de a e N . Dessa forma, as seguintes condições iniciais são selecionadas:

- $t = 0, x_0 = 1$; onde $t = 0$ representa o dia 28/03/2020;
- $t = 200, x_{200} = 16408$; onde $t = 200$ representa o dia 13/10/2020;
- $t = 400, x_{400} = 48344$; onde $t = 400$ representa o dia 01/05/2021.

Uma vez que $N_{200} = N_{400}$, temos:

$$\frac{x_{200}(e^{-200a} - 1)}{x_{200}e^{-200a} - 1} = \frac{x_{400}(e^{-400a} - 1)}{x_{400}e^{-400a} - 1}. \quad (1.10)$$

Considerando $e^{-200a} = \alpha$ e simplificando a equação (1.10) temos:

$$\begin{aligned} 200(\alpha - 1)(x_{400}\alpha^2 - 1) &= x_{400}(\alpha^2 - 1)(x_{200}\alpha - 1) \Rightarrow \\ \alpha^2(x_{400} - x_{400}x_{200}) + \alpha(x_{400}x_{200} - x_{200}) + (x_{200} - x_{400}) &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores indicados e resolvendo a equação de segundo grau encontramos que $\alpha = 0,00004026324375$. Levando em conta que $e^{-200a} = \alpha \Rightarrow a = \frac{\ln \alpha}{-200}$, logo, encontramos que $a = 0,050600357854$. Substituindo o valor encontrado em qualquer um dos lados da equação (1.10) encontramos o valor da constante N :

$$N = \frac{x_{200}(\alpha - 1)}{x_{200}\alpha - 1} = 48347,790.$$

Por fim, basta substituir as constantes encontradas na equação (1.9), chegando assim no

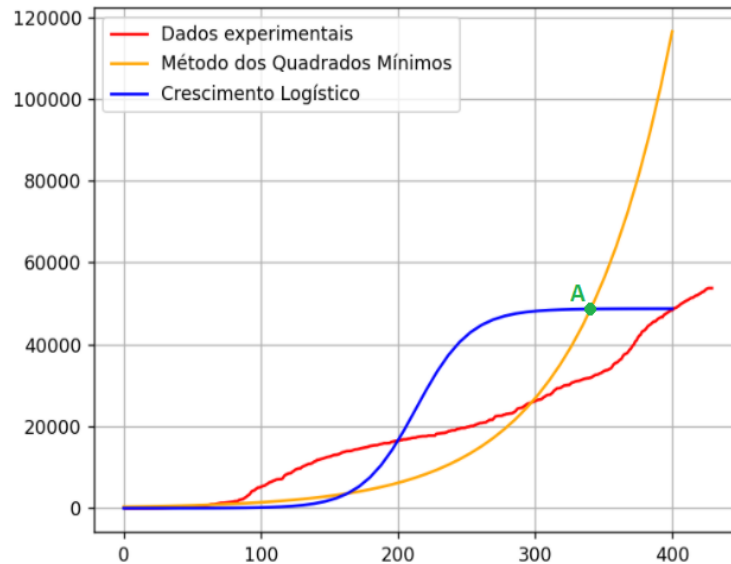
modelo de crescimento logístico de infecções por COVID-19 para a cidade de Sorocaba-SP.

$$x(t) = \frac{48347,790}{e^{-0,050600357854t}(48346,790) + 1}. \quad (1.11)$$

1.3.2 Análise dos Dados

Ao analisar a proximidade da função (1.11) com os dados experimentais percebe-se que ambas modelam a situação de forma satisfatória até certo ponto. Como podemos ver através da Figura 1.1, o método dos quadrados mínimos fica cada vez mais distante da realidade conforme se distancia do ponto *A*, enquanto a aplicação pelo crescimento logístico aparenta ser mais fiel a partir deste ponto, tendo em vista que, mais cedo ou mais tarde, o número de casos irá se estabilizar.

Figura 1.1: Comparação entre os métodos e os dados coletados



Fonte: do próprio autor.

Sendo assim, fica nítido que ambas as funções falham em modelar a tendência do crescimento dos dados reais do número de casos do Covid-19 na medida em que estendemos o tempo para além do ponto *A*.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Diferenciais Planares

Neste capítulo abordaremos as equações diferenciais de 2^o ordem, sistemas planares, autovalores e autovetores, dando a base teórica para que seja apresentada a modelagem da equação diferencial de segunda ordem de Romeu e Julieta.

2.1 Equações Diferenciais de 2^o ordem

Trataremos das equações diferenciais de segunda ordem. As equações de segunda ordem são dadas por:

$$x'' = f(t, x, x'), \quad (2.1)$$

onde f é uma função dada. Em geral denotamos o t como a variável independente da equação, pois geralmente em fenômenos físicos, o tempo é com frequência a variável independente.

Um problema de valor inicial (PVI) de segunda ordem consiste em uma equação diferenciável como dada em (2.1) acrescida de um par de condições iniciais :

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x'(t_0) = x'_0,$$

onde x_0 e x'_0 são números dados que descrevem os valores de x e x' no ponto inicial t_0 . Veja [4].

2.2 Sistemas de equações diferenciais planares

Esta seção irá se concentrar em sistemas autônomos no \mathbb{R}^2 , que podem ser escritos na forma

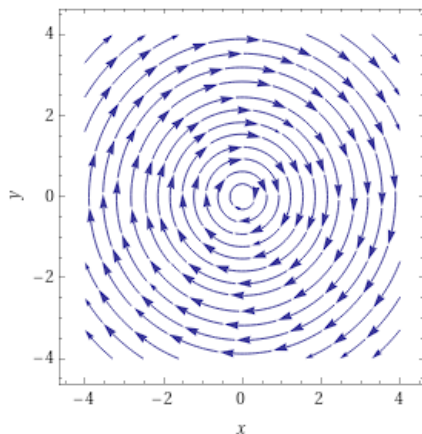
$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

Simplificando esta notação é possível reduzir para a forma $X' = F(X)$ em que $X = (x, y)$ e $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. É possível considerar que o lado direito da igualdade da equação esteja definindo um campo vetorial no \mathbb{R}^2 , ou seja, $F(x, y)$ representa um vetor em que as coordenadas são respectivamente as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$. De forma simplificada dizemos que os vetores do campo vetorial possuem os pontos (x, y) e $(f(x, y), g(x, y))$ respectivamente como origem e extremidade. Por exemplo, o campo vetorial associado ao sistema

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

está representado na Figura 2.1. A solução deste sistema pode ser pensada como uma curva parametrizada no plano cuja forma é $(x(t), y(t))$ e em que, para cada t , o vetor tangente no ponto $(x(t), y(t))$ é $F(x(t), y(t))$.

Figura 2.1: Campo vetorial para o sistema $x' = y, y' = -x$.



Fonte: do próprio autor.

É fácil perceber que a curva

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}(t) \\ a \operatorname{cos}(t) \end{pmatrix},$$

para qualquer $a \in \mathbb{R}$ é uma solução do sistema

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}x'(t) &= a \cos(t) = y(t) \\y'(t) &= -a \sin(t) = -x(t).\end{aligned}$$

Essas curvas definem circunferências de raio $|a|$ que são construídas no sentido horário conforme t cresce. Quando $a = 0$, as soluções se restringem nas funções constantes $x(t) \equiv 0 \equiv y(t)$.

É importante também perceber que este exemplo é equivalente à equação diferencial de segunda ordem $x'' = -x$ pela simples introdução da variável $y = x'$. Isso é um exemplo de uma equação diferencial linear de segunda ordem, na qual, de forma mais geral, pode ser escrita como

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t),$$

onde a , b , c e f são funções reais.

Um caso especial importante é a equação com coeficientes constantes

$$ax'' + bx' + cx = f(t),$$

que pode ser representada pelo seguinte sistema se $a \neq 0$

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + \frac{f(t)}{a}.\end{aligned}$$

2.2.1 Álgebra Linear: Uma pequena Consideração

Antes de prosseguir com os sistemas de equações diferenciais, vamos relembrar alguns conceitos importantes sobre sistemas de equações lineares planares, ou seja,

$$\begin{aligned}ax + by &= \alpha \\cx + dy &= \beta\end{aligned}$$

em que $a, b, c,$ e $d,$ assim como α e β são valores reais dados. Na forma matricial, podemos escrever tal sistema como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz 2×2 formada pelos coeficientes a, b, c e d será denotada por $A,$ ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O sistema terá solução única se e somente se $\det(A) \neq 0.$ Onde determinante é dado por

$$\det(A) = ad - bc.$$

2.3 Autovalores e Autovetores

Partiremos agora para a definição de autovetor e autovalor como apresentada em [6].

Dada uma matriz $A,$ um autovetor será um vetor não nulo V_0 de A que satisfaça a equação $AV_0 = \lambda V_0,$ para qualquer $\lambda.$ Essa constante λ é chamada de autovalor de $A.$

Podemos destacar que existe uma relação extremamente importante entre os autovalores, autovetores, e as soluções de sistemas de equações diferenciais: Seja V_0 e $\lambda,$ respectivamente, o autovetor e o autovalor associado a matriz $A,$ tem-se então que a função $X(t) = e^{\lambda t}V_0$ é uma solução do sistema $X' = AX.$ [6]

Assim o estudo de autovetores e autovalores é de nítida importância para os sistemas de equações diferenciais, então prosseguindo:

Seja $V = (x, y)$ um autovetor, precisamos encontrar uma solução não nula (x, y) para a equação

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Nota-se então que existem três valores desconhecidos no sistema: as duas componentes x e y do autovetor V assim como o autovalor $\lambda.$

Seja I a matriz identidade de ordem 2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então pode rescrever a equação (2.2) na forma

$$(A - \lambda I)V = 0,$$

em que 0 simboliza o vetor $(0, 0)$.

Desta forma, $A - \lambda I$ é a matriz de coeficientes do sistema $X' = AX$, sendo λ um valor relacionado a tais coeficientes.

Um sistema homogêneo terá soluções não nulas, se e somente se, o determinante da matriz de coeficientes for igual a zero, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$, equação essa denominada de equação característica.

Chama-se então de polinômio característico o resultado do determinante, e é justamente a partir dele que encontramos os valores de λ e em seguida associamos aos dos seus autovetores.

Um exemplo em que é simples compreender tal procedimento é o de encontrar os autovalores e autovetores associados a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos então que

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Então a equação característica é

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3.$$

Simplificando, obtemos o polinômio característico

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

resultando então em dois autovalores $\lambda \pm 2$.

Para $\lambda = 2$, resolvemos a equação

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo para a forma de sistema temos

$$\begin{aligned}(1 - 2)x + 3y &= 0 \\ x + (-1 - 2)y &= 0.\end{aligned}$$

Simplificando chegamos em $x = 3y$, ou seja, qualquer vetor com a forma $(3y, y)$ com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$.

Para $\lambda = -2$ o processo é análogo, bastando resolver a equação

$$(A + 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, chegamos em $x = -y$, ou seja, qualquer vetor com a forma $(-y, y)$ com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

Desta forma, identificamos três soluções: a solução de equilíbrio localizada na origem, assim como

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Retratos de Fase e Classificação de Sistemas Planares

Seja $X' = AX$ e os autovalores reais λ_1 e λ_2 de tal forma que $\lambda_1 < \lambda_2$. O foco deste capítulo, embasado tanto por Hirsch, Smale e Devaney (1974) quanto por Strogatz (1994), será compreender de que maneira tais autovalores interferem no comportamento das soluções do sistema. Nota-se três possibilidades:

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

2.4.1 Primeiro Caso: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Considera-se então o caso em que existem autovalores com sinais distintos. Vamos iniciar com um exemplo simples. Seja o sistema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o método já mencionado anteriormente encontramos a equação característica:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0, \quad (2.3)$$

Assim λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz A . É possível encontrar também que $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são, respectivamente, os autovetores de λ_1 e λ_2 . Logo, obtemos a solução geral do sistema:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde α e β são constantes reais.

Uma vez que $\lambda_1 < 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{\lambda_1 t} = 0$, ou seja, todas as soluções na forma

$$\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tendem a se aproximar cada vez mais do eixo das ordenadas, tendendo a $(0, 0)$ na medida em que o tempo avança. Da mesma forma pode-se concluir também que uma vez que $\lambda_2 > 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta e^{\lambda_2 t} = \infty$, ou seja, todas as soluções na forma

$$\beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tendem a se afastar cada vez mais do eixo das abscissas, se afastando de $(0, 0)$ na medida em que o tempo avança. Desta forma, temos que o eixo das abscissas é chamado de linha estável, já o eixo das ordenadas de linha instável.

A Figura 2.2 representa o retrato de fase para este sistema. Nela é possível notar de forma mais assertiva o comportamento do conjunto das soluções do sistema. O ponto de equilíbrio para sistemas com esse comportamento ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) é chamado de *ponto de sela*.

Outro exemplo é considerar o sistema $X' = AX$, em que

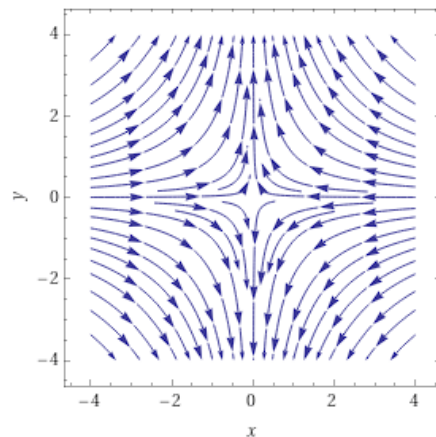
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o que já foi visto, os autovalores de A são 2 e -2 associados, respectivamente, aos autovetores $(3, 1)$ e $(-1, 1)$.

Portanto, existirá uma linha instável que contém as soluções na forma

$$X_1(t) = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Figura 2.2: Retrato de fase de autovalores reais e distintos.



Fonte: do próprio autor.

com tais soluções se afastando da origem conforme o tempo avança. Já a linha estável contém as soluções na forma

$$X_2(t) = \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com tais soluções tendendo para a origem conforme o tempo avança. Assim qualquer outra solução irá assumir a forma

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para algum α e β . É importante destacar que, se $\alpha \neq 0$, a solução geral do sistema poderá ser aproximada para $X_1(t)$ com uma precisão cada vez maior conforme tempo avança ($t \rightarrow \infty$), uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Da mesma forma que, se $\beta \neq 0$, a solução geral do sistema poderá ser aproximada para $X_2(t)$ com uma precisão cada vez maior na medida em que o tempo retrocede ($t \rightarrow -\infty$), uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos então que no caso geral em que A possui autovalores com sinais distintos, sempre teremos linhas estáveis e instáveis cujas soluções tendem a se afastar ou a se

aproximar da origem. Todas as outras soluções se aproximam da linha instável quando $t \rightarrow \infty$, e tendem para a linha estável na medida que $t \rightarrow -\infty$.

2.4.2 Segundo Caso: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Vamos agora considerar o sistema $X' = AX$, em que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

porém $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, ou seja, ambos os autovalores são negativos. De forma análoga ao caso anterior temos que a solução geral para tal sistema é:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diferente do caso anterior, agora todas as soluções tendem para a origem na medida em que o tempo passa, ou seja, $t \rightarrow \infty$. Neste caso o ponto de equilíbrio recebe o nome de *nó estável*. É interessante então buscar compreender de qual forma essas soluções se aproximam da origem. Para tal será calculado a inclinação dy/dx da solução ($\beta \neq 0$).

Temos então que

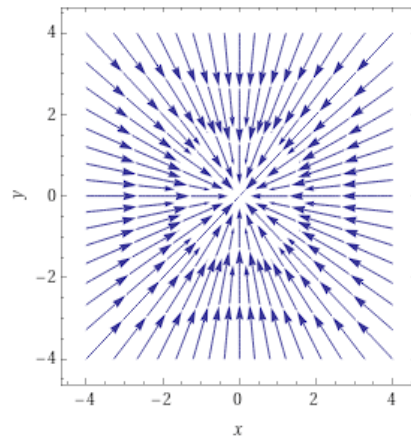
$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= \beta e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, conclui-se que a inclinação se aproxima cada vez mais de $\pm\infty$ conforme o tempo avança, dependendo dos sinais de α e β . Isso faz com que as soluções se aproximem da origem tangenciando o eixo y . Outro ponto importante a ser destacado é o de que como $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, a solução associada ao autovalor λ_1 irá se aproximar muito mais rápido da origem do que a solução associada ao autovalor λ_2 , neste caso em particular observa-se que a coordenada x tendem para 0 muito mais rapidamente que a coordenada y . Portanto, λ_1 será considerado o autovalor mais forte, enquanto λ_2 será o mais fraco. O retrato de fase para este sistema pode ser observado através da Figura 2.3. Neste caso a origem recebe o nome de *nó próprio*.

Figura 2.3: Retrato de fase de autovalores reais e negativos.

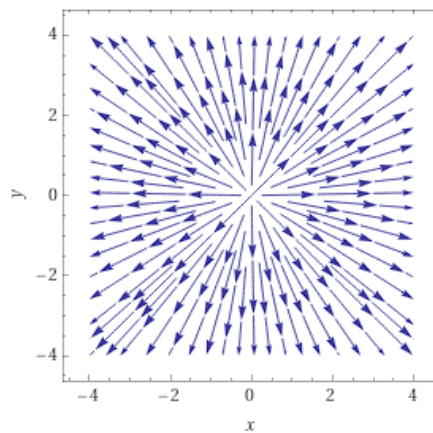


Fonte: do próprio autor.

2.4.3 Terceiro Caso: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Este caso será análogo ao caso anterior, diferenciando apenas na parte em que como agora os autovalores são positivos as soluções irão fluir em sentido contrário, fazendo com que se afastem da origem na medida em que o tempo avança. O retrato de fase para este sistema pode ser observado através da Figura 2.4. Neste caso o ponto de equilíbrio recebe o nome de *nó instável*.

Figura 2.4: Retrato de fase de autovalores reais e positivos.



Fonte: do próprio autor.

2.5 Autovalores Complexos

Existe também a possibilidade de que os autovalores assumam valores complexos. Podemos então dividir em dois casos particulares de acordo com a organização do retrato

de fase.

O primeiro caso consiste no sistema na forma

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} X.$$

Desenvolvendo o polinômio característico encontramos os autovalores $\pm i\beta$. Seguindo com o intuito de descobrir o autovetor associado ao autovalor $\lambda = i\beta$ é necessário resolver

$$\begin{bmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou simplesmente $i\beta x = \beta y$, encontrando o autovetor $(1, i)$, e com isso a função

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

que é uma solução complexa para o sistema.

Como estamos trabalhando com sistemas de equações reais, notamos a necessidade para que a sua solução também seja da mesma natureza. Para tal utilizamos a fórmula de Euler, tendo então

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t).$$

Substituindo na solução encontrada anteriormente obtemos

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t) \\ i(\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) + i\cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Separando $X(t)$ em parte real e imaginária, temos

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix},$$

sendo possível verificar que ambas as partes são de fato soluções do sistema. Logo, a solução geral do sistema fica:

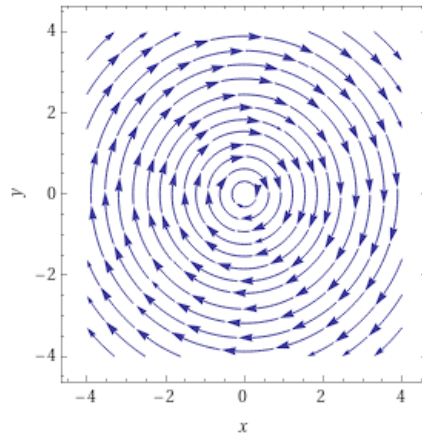
$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 i \begin{bmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix},$$

em que c_1 e c_2 são constantes determinadas através dos problemas de valores iniciais.

É fácil perceber que ambas as soluções são funções periódicas com período $2\pi/\beta$. Neste caso o sistema é chamado de *centro* e as suas soluções podem ser representadas por circunferências centradas na origem. A orientação das soluções será no sentido horário

se $\beta > 0$ e no sentido anti-horário se $\beta < 0$. O retrato de fase deste sistema pode ser visualizado através da Figura 2.5.

Figura 2.5: Retrato de fase de centros com sentido horário.



Fonte: do próprio autor.

Já o segundo caso será para sistemas da forma $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

e $\alpha, \beta \neq 0$. Desenvolvendo o polinômio característico encontramos os autovalores

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

, observando então que $(1, i)$ é novamente um autovetor, agora associado a $\alpha + i\beta$. Logo, teremos uma solução complexa na forma

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo de forma análoga ao caso anterior,

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) + i\cos(\beta t) \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix} + ie^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

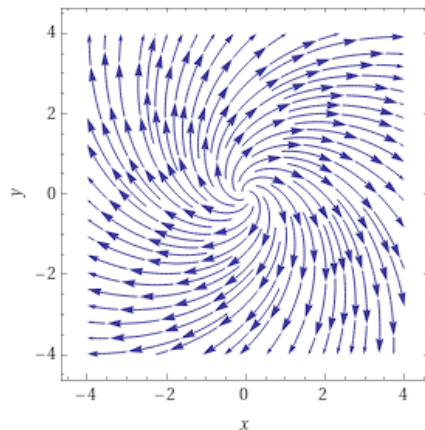
É possível então perceber que a solução possui parte real e parte imaginária, sendo

possível mostrar que ambas as partes são soluções para o sistema. Desta forma, estabelecemos que a solução geral para tal sistema é

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\text{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 i e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \text{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Nota-se que se não fosse o termo $e^{\alpha t}$ a solução seria idêntica ao caso anterior, circunferências centradas na origem. O acréscimo deste termo faz com que a solução se transforme em espirais que se aproximam da origem se $\alpha < 0$ (neste caso o ponto de equilíbrio é chamado de *foco estável*) e se afastam da origem se $\alpha > 0$ (*foco instável*) na medida em que o tempo avança. O retrato de fase deste sistema pode ser visualizado através da Figura 2.6.

Figura 2.6: Retrato de fase de foco estáveis.



Fonte: do próprio autor.

2.6 Autovalores Repetidos

Por fim, o último caso restante é o de quando A possui autovalores reais e repetidos. Considerando novamente o exemplo simples em que A assume a forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

nota-se então que qualquer vetor não nulo será um autovetor de A , uma vez que

$$AV = \lambda V$$

para qualquer $V \in \mathbb{R}^2$. Logo, as soluções terão a forma

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} V.$$

Desta forma, é fácil concluir que as soluções irão tender até a origem quando $\lambda < 0$, e se afastar se $\lambda > 0$. Neste caso, a origem recebe o nome de *nó próprio*. É interessante perceber o que ocorre quando variamos um pouco a matriz A de tal forma que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Novamente ambos os autovalores serão iguais a λ , porém agora só será possível associar com um único autovetor dado por $V = (1, 0)$. Tendo então a solução

$$X_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar outras soluções primeiro é necessário perceber que o sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y. \end{aligned}$$

Desta forma, se $y \neq 0$, então teremos que

$$y(t) = \beta e^{\lambda t}.$$

Logo, x' pode ser escrito como

$$x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}.$$

Utilizando o *método dos coeficientes a determinar*, que pode ser aprofundado com mais detalhes no livro de Hirsch, Smale e Devaney (1974), percebe-se que a solução terá a forma:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É importante destacar que, se $\lambda < 0$ cada termo da solução tende a zero na medida em que o tempo avança, e caso $\lambda > 0$ temos que todas as soluções tendem a se afastar da origem conforme $t \rightarrow \infty$.

2.7 Romeu e Julieta

Strogatz (1988) propõe um interessante modelo a fim de ilustrar as ideias propostas neste capítulo, este modelo também explorado e trabalhado por Dávalos e Hernández (2014). Vamos supor um dos casos amorosos mais conhecidos da literatura, o caso de Romeu e Julieta. Neste contexto Romeu é um homem apaixonado e corresponde sempre aos interesses de Julieta, assim quanto mais ela o ama, maior é o amor dele, já quando ela o odeia, Romeu se torna indiferente e distante. Em contrapartida, Julieta é uma amante caprichosa, desdenhando do amor de Romeu quando este se mostra completamente interessando, e ansiando por seu amor cada vez mais conforme o interesse dele se esvai. Assim, para acompanhar este caso em diferentes circunstância, vamos inicialmente modelar a situação da seguinte forma:

$R(t)$ = amor/ódio de Romeu por Julieta no tempo t

$J(t)$ = amor/ódio de Julieta por Romeu no tempo t .

O sistema fica então:

$$R' = aR + bJ$$

$$J' = cR + dJ.$$

Colocando o sistema na forma matricial temos,

$$\begin{bmatrix} R' \\ J' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix},$$

ou ainda:

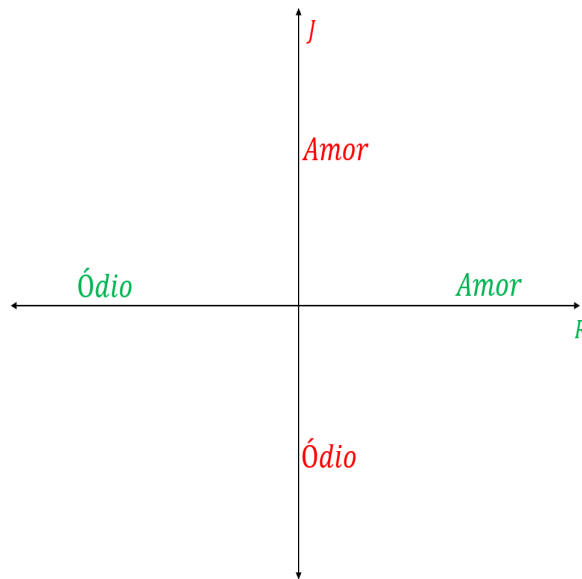
$$S' = AS,$$

em que

$$S = \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O objetivo é buscar compreender qual a relação dos coeficientes da matriz A com o futuro amoroso do casal. Tais relações serão representadas em um plano cartesiano, representado pela Figura 2.7, sendo possível perceber o crescimento do amor/ódio com o passar do tempo.

Figura 2.7: Romeu e Julieta.



Fonte: do próprio autor.

2.7.1 Primeiro Caso: Diagonal Principal Nula

O primeiro caso a ser considerado, é quando a diagonal principal da matriz A for nula. O sistema assume a forma:

$$\begin{aligned} R' &= bJ \\ J' &= cR. \end{aligned}$$

Isso faz com que os sentimentos de Romeu dependam única e exclusivamente dos de Julieta, da mesma forma que os sentimentos de Julieta dependem unicamente dos de Romeu.

Vamos subdividir esse primeiro caso em duas partes, uma em que o determinante da matriz A seja positiva, e outra em que o determinante seja negativa.

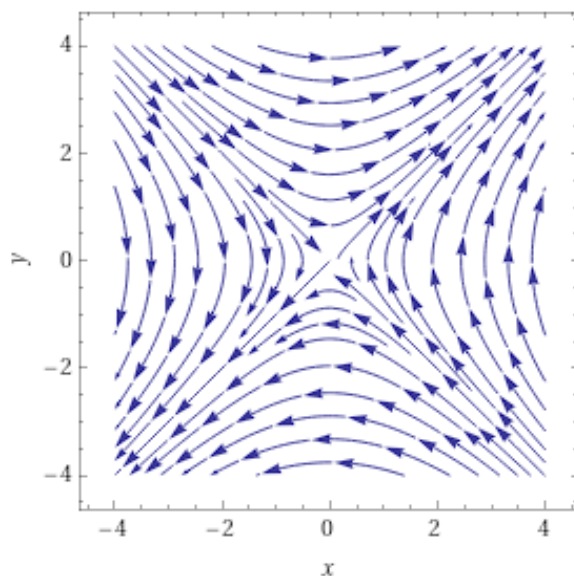
2.7.2 Um caso de amor intenso

Sabe-se que o determinante de A é dada por $ad - bc$, tendo $a = d = 0$, então $\det(A) = -bc$.

Logo, para que o determinante seja menor que zero, temos que $b > 0$ e $c > 0$ ou $b < 0$ e $c < 0$, separemos então esses dois casos.

Quando ambos os coeficientes forem positivos, poderemos ilustrar o retrato de fases através da Figura 2.8.

É possível compreender que com o passar do tempo o casal se odeia com ferocidade ou se ama com fervor. Pode ser classificado como um caso de amor de sentimentos intensos,

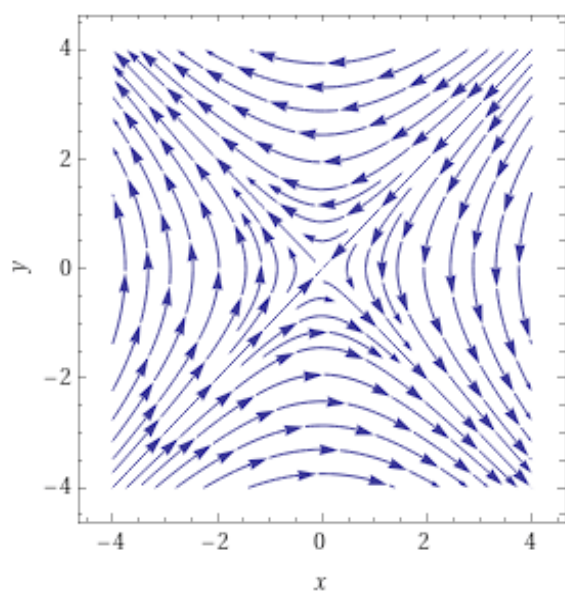
Figura 2.8: Caso em que $b > 0$ e $c > 0$.

Fonte: do próprio autor.

seja para o amor quanto para o ódio.

2.7.3 Um caso de amor complicado

Já quando os coeficientes forem negativos, é possível ilustrar o retrato de fases através da Figura 2.9.

Figura 2.9: Caso em que $b < 0$ e $c < 0$.

Fonte: do próprio autor.

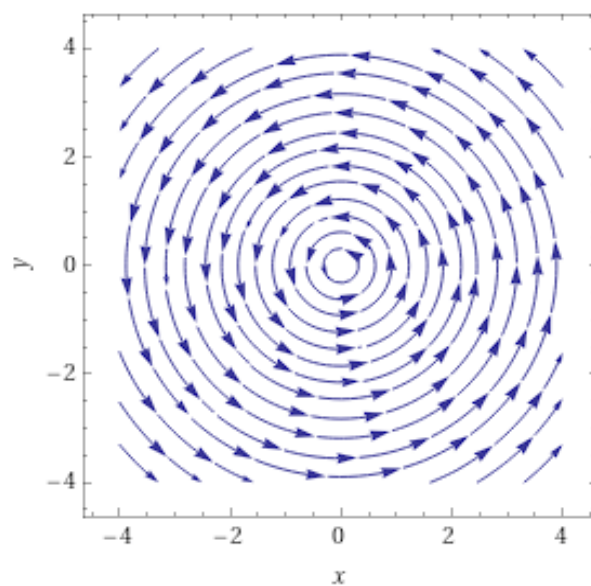
Isso faz com que conforme Romeu intensifica o seu amor por Julieta, ela por sua vez intensifica o ódio por Romeu, da mesma forma que a situação com os papéis trocados também é verdadeira. Podendo ser classificado como casal com sentimentos opostos.

2.7.4 Um caso de amor inconstante

Agora quando o determinante for maior que zero, temos também que separar em dois casos, sendo então $b > 0$ e $c < 0$ ou $b < 0$ e $c > 0$. Separemos então esses dois casos.

Quando $b < 0$ e $c > 0$, o retrato de fases é representado pela Figura 2.10. Isso faz

Figura 2.10: Caso em que $b < 0$ e $c > 0$.

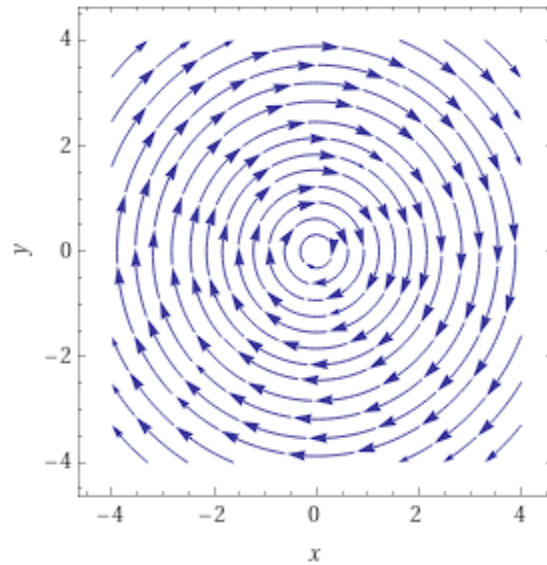


Fonte: do próprio autor.

com que conforme maior for o amor que Romeu sente, maior será o amor de Julieta por Romeu, mas Romeu começará a se afastar cada vez mais a partir do momento que Julieta estiver no ápice do seu amor, fazendo com que o ódio de Julieta comece a aumentar, e quando estiver no ápice do seu ódio, Romeu volta a ama-la. Podendo ser classificado como casal inconstante.

Já quando $b > 0$ e $c < 0$, o retrato de fases poderá ser representado pela Figura 2.11. É possível então perceber que, conforme maior for o amor que Romeu sente, maior será a vontade de Julieta sair de perto de Romeu, por outro lado, na medida que o ódio de Romeu aumenta o amor de Julieta também aumenta. Podendo ser classificado como casal inconstante.

Utilizando os mecanismos estudados, é fácil perceber que b e c estão diretamente relacionados com os autovalores, que por sua vez, estão relacionados com a parametrização da curva. De tal forma que conforme maior for o módulo das constantes, maior será a amplitude das elipses que constituem o retrato de fase.

Figura 2.11: Caso em que $b > 0$ e $c < 0$.

Fonte: do próprio autor.

Relacionando com o contexto amoroso, temos que a influência de maiores ou menores intensidades em determinadas constantes refletem no ponto de pico dos sentimentos (ódio/amor).

2.7.5 Segundo Caso: Diagonal Secundária Nula

O segundo caso a ser considerado, será quando a diagonal secundária da matriz A for nula. O sistema ficaria então:

$$R' = aR$$

$$J' = dJ.$$

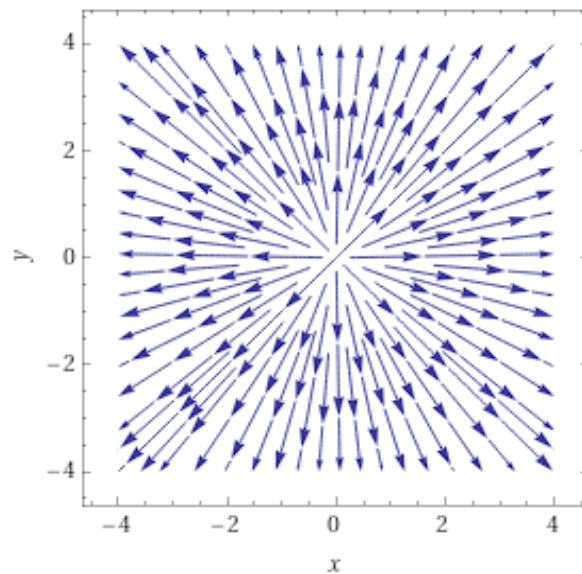
Isso faz com que os sentimentos de Romeu e de Julieta dependam exclusivamente deles mesmos.

Vamos subdividir esse segundo caso em duas partes, uma em que o traço da matriz A seja positiva, e outra em que o traço seja negativa.

2.7.6 Um caso de amor a primeira vista

O primeiro caso, em que o traço é positivo, acontece quando $a, d > 0$ ou $ad < 0$ mas o valor positivo é maior que o negativo em módulo. Para quando $a, d > 0$ teremos nitidamente um caso em que o ponto de equilíbrio é um nó instável, conforme sugere a Figura 2.12.

Nesse caso, percebe-se que o ponto crucial está nos primeiros instantes, o sentimento

Figura 2.12: Caso em que $a, d > 0$.

Fonte: do próprio autor.

que cada um gera pelo outro tende a se intensificar cada vez mais e nunca vai mudar. Amor/Ódio a primeira vista.

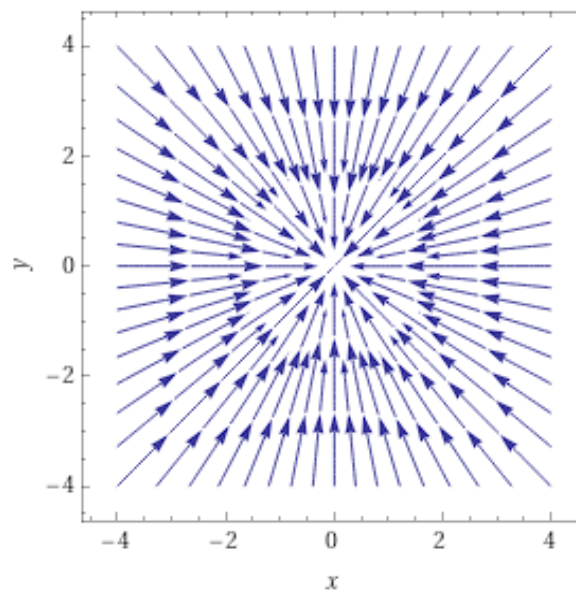
2.7.7 Um caso de amor unilateral

Já para quando $ad < 0$, podemos ter $a > 0$ e $d < 0$ ou $a < 0$ e $d > 0$. Pelos estudos nesta seção é possível estabelecer que ambas as relações fazem do ponto de equilíbrio um ponto de sela. Fazendo com que conforme um intensifique cada vez mais o seu sentimento (ódio ou amor), o outro fica cada vez mais indiferente, podendo classificar como casal unilateral.

2.7.8 Um caso de amor apático

Já para o traço ser negativo teremos também dois casos, quando $a, d < 0$ ou $ad < 0$ mas o valor positivo é menor que o negativo em módulo. O caso em que $ad < 0$ já foi discutido no parágrafo acima e possui a mesma interpretação.

Agora quando $a, d < 0$ teremos nitidamente um caso em que o ponto de equilíbrio é um nó estável, conforme sugere a Figura 2.13. Nesse caso, percebe-se o sentimento que cada um possui pelo outro tende a perder cada vez mais a intensidade, acarretando em uma indiferença mútua. Podendo ser classificado como casal indiferente.

Figura 2.13: Caso em que $a, d < 0$.

Fonte: do próprio autor.

Capítulo 3

Um pouco de aplicação

O entendimento de como acontece o crescimento de tumores continua sendo objeto de estudo para muitos médicos e cientistas, seja na busca da cura, seja na atenuação dos efeitos da doença. Este é um dos principais motivadores do estudo da modelagem matemática para se entender a dinâmica de interação de células normais e células tumorais.

O primeiro e mais famoso modelo matemático que considera a interação entre duas espécies, na qual a primeira (presa) dispõe de alimento em quantidade suficiente, e a segunda espécie (predador) alimenta-se da primeira é conhecido como Lotka-Volterra. Este modelo é dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias e são essas equações que podem representar as taxas de crescimento das células normais e tumorais, as capacidades de suporte da população de células normais e tumorais e os parâmetros relacionados com a taxa de encontro das células tumorais com as células normais, que competem pelo espaço ou nutrientes disponíveis.

O entendimento do plano de fase desse modelo é um dos objetivos deste projeto. Utilizando o Python, os planos de fase serão plotados, favorecendo o estudo do comportamento das células normais e células tumorais com diferentes condições iniciais. Agora veremos um exemplo do modelo de Lotka-Volterra que considera a interação entre duas espécies.

3.1 Modelo de Competição entre Espécies

Em um sistema formado por duas espécies é necessário considerar que cada uma pode afetar negativamente a outra na busca por alimentos, nutrientes e espaço disponível, limitando o crescimento das populações. Ao adicionarmos a competição nesta situação temos que o número de indivíduos de cada espécie sofrerá uma redução por um termo proporcional ao número de indivíduos da outra espécie. Assim, um modelo que descreve a interação entre duas espécies pode ser representado por:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dy^2 - \beta xy,$$

onde a, b, c, d, α e β são constantes reais.

3.2 Modelo De Lotka-Volterra

O sistema Lotka-Volterra considera a interação entre duas espécies, na qual a primeira (presa) dispõe de alimento em quantidade suficiente, e a segunda espécie (predador) alimenta-se da primeira. O modelo é dado a seguir:

$$\frac{dN}{dt} = aN - \alpha NP$$

$$\frac{dP}{dt} = -bP + \beta NP,$$

onde

- N representa o número de presas
- P representa o número de predadores;
- a , taxa de crescimento de presas;
- b , taxa de mortalidade dos predadores e;
- α e β representam as medidas de interação entre as duas espécies.

Os pontos críticos do sistema são obtidos quando:

$$0 = aN - \alpha NP$$

$$0 = -bP + \beta NP.$$

Daí tem-se:

$$(0, 0) \text{ e } \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right).$$

O primeiro ponto é instável (ponto de sela) já o segundo é estável (centro).

3.3 O câncer

Câncer é o nome dado a um conjunto de mais de 100 doenças que têm em comum o crescimento desordenado de células que invadem os tecidos e órgãos e podem espalhar-se para outras regiões do corpo. Sua principal causa é a genética, podendo ser hereditária

ou não. Agentes externos ao organismo, tais quais; a radiação ionizante, as substâncias cancerígenas e agentes virais, podem potencializar seu desenvolvimento.

Em [2], Bassanezi diz que o crescimento de um tumor é a quebra de um dos mecanismos de feedback do organismo, ou seja, com essa quebra, as células cancerígenas dividiriam-se desordenadamente pelo organismo do hospedeiro. Bassanezi também diz que nem todas as células tem a mesma capacidade de se multiplicarem, assim haveria uma limitação no crescimento do tumor.

De modo simplificado, o tumor é constituído por dois tipos de células; as viáveis, que são células replicativas e as células diferenciadas, que não têm a capacidade de se dividir.

3.3.1 Crescimento Tumoral

As células, tanto as cancerosas como as normais, se dividem mais rapidamente quando os volumes teciduais ou tumorais são menores, e mais lentamente quando os volumes são maiores. Isto leva a um crescimento exponencial com curtos períodos de duplicação em tumores de volumes menores. Assim a multiplicação de células cancerígenas decresce a medida que o tumor cresce.

Nos cânceres, os tempos de duplicação das células tumorais e do volume (ou massa) podem variar de forma aleatória e autônoma, servindo de medidas reais de sua agressividade. Cânceres maduros, por exemplo, possuem um comportamento um tanto quanto incontrolável em seu crescimento e perdem a capacidade de resposta a mecanismos reguladores do crescimento intra e extracelulares.

Assim temos que o comportamento inicial do crescimento de um tumor pode ser bem ajustado por uma função exponencial, porém, como dito anteriormente, à medida que o câncer se torna maior em tamanho, sua velocidade de crescimento diminui com o tempo. Esse fenômeno pode ser descrito por uma equação relacionando-se o tamanho do tumor com o tempo, por exemplo, como na curva gompertziana. [10]

3.4 Interação entre Células Normais e Células Tumorais

Para descrever a relação entre as células normais e tumorais considera-se um sistema de duas equações diferenciais em que o crescimento é dado pela lei de crescimento logístico.

$$\frac{dN}{dt} = r_2N(1 - b_2N) - c_4NT \quad (3.1)$$

$$\frac{dT}{dt} = r_1T(1 - b_1T) - c_3TN,$$

onde:

- $N(t)$ representa o número de células normais no tempo t .
- $T(t)$ representa o número de células tumorais no tempo t .
- r_1 é a taxa de crescimento de células normais.
- r_2 é a taxa de crescimento das células tumorais.
- $\frac{1}{b_2}$ e $\frac{1}{b_1}$ são as capacidades de suporte da população de células normais e tumorais (Modelo Logístico).
- c_3 e c_4 são os parâmetros relacionados com a taxa de encontro das células tumorais com as células normais, que competem pelo espaço ou nutrientes disponíveis.

3.4.1 Pontos de Equilíbrio

Para que possamos encontrar os pontos de equilíbrio é necessário fazermos que:

$$\frac{dN}{dt} = r_2N(1 - b_2N) - c_4NT = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = r_1T(1 - b_1T) - c_3TN = 0$$

Temos que:

$$r_2N(1 - b_2N) - c_4NT = 0 \Rightarrow N(r_2 - b_2r_2N - c_4T) = 0$$

$$r_1T(1 - b_1T) - c_3TN = 0 \Rightarrow T(r_1 - b_1r_1T - c_3N) = 0$$

ou seja,

teremos os seguintes pontos de equilíbrio:

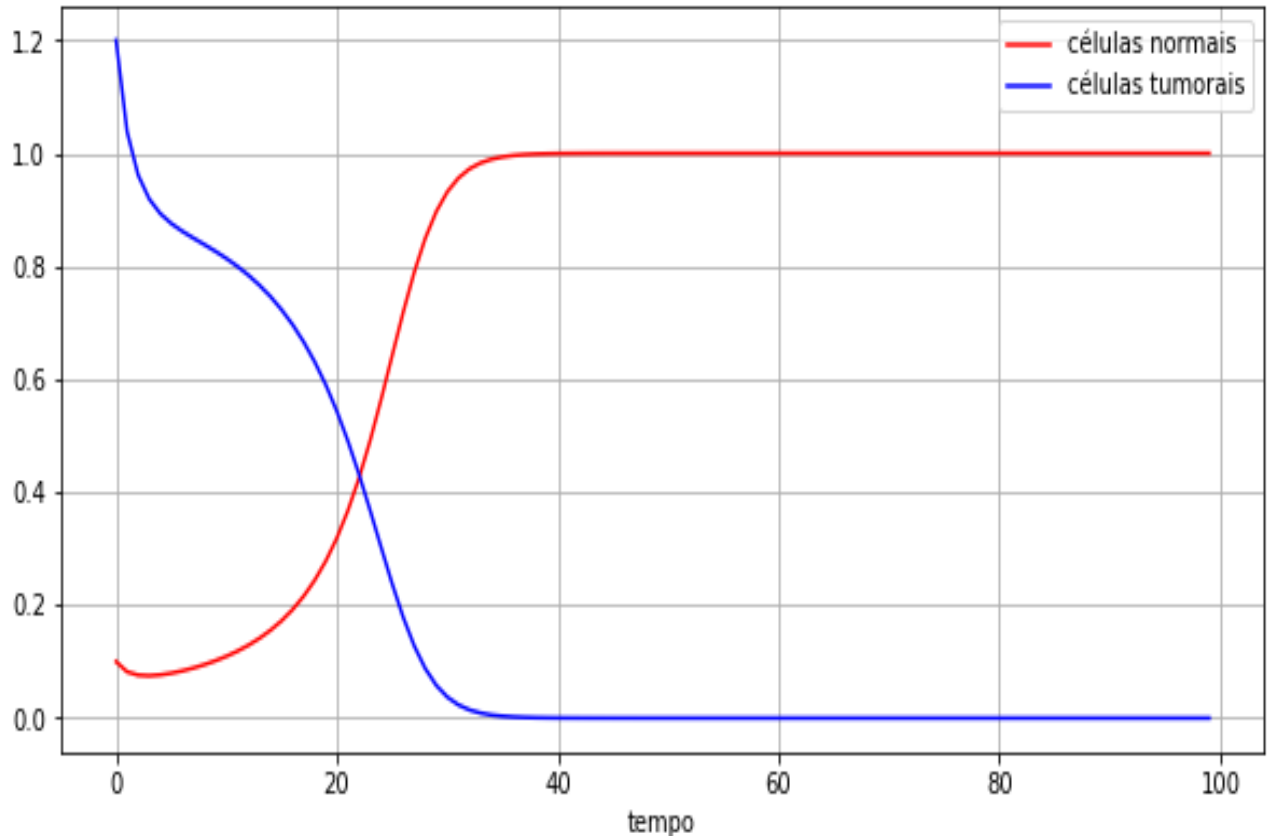
- $N = 0$ e $T = 0$,
- $N = 0$ e $T = \frac{1}{b_1}$,
- $N = \frac{1}{b_2}$ e $T = 0$
- $N = \frac{r_1b_1r_2 - r_1c_4}{r_1b_1r_2b_2 - c_3c_4}$ e $T = \frac{r_2}{c_4} \left(\frac{r_2b_2}{c_4} - \frac{r_1b_1r_2 - r_1c_4}{r_1b_1r_2b_2 - c_3c_4} \right)$,
nesse caso $N \neq 0$ e $T \neq 0$.

3.4.2 Simulações em Phyton

Podemos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrios a partir do parâmetros obtidos em [9], onde: $r_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_4 = 1$, $r_1 = 0,5$, $b_1 = 1$ e $c_3 = 1$. Substituindo esses parâmetros na equação (3.1) e simulando no Python obtemos os pontos críticos que são $(0,0)$; $(0,1)$ e $(1,0)$

Nas figuras 3.1 e 3.2 temos os gráficos da dinâmica dos sistemas obtidos através dos parâmetros da equação (3.1) para valores iniciais diferentes, e para cada caso podemos observar a forma em que as células tumorais e as células normais interagem entre si.

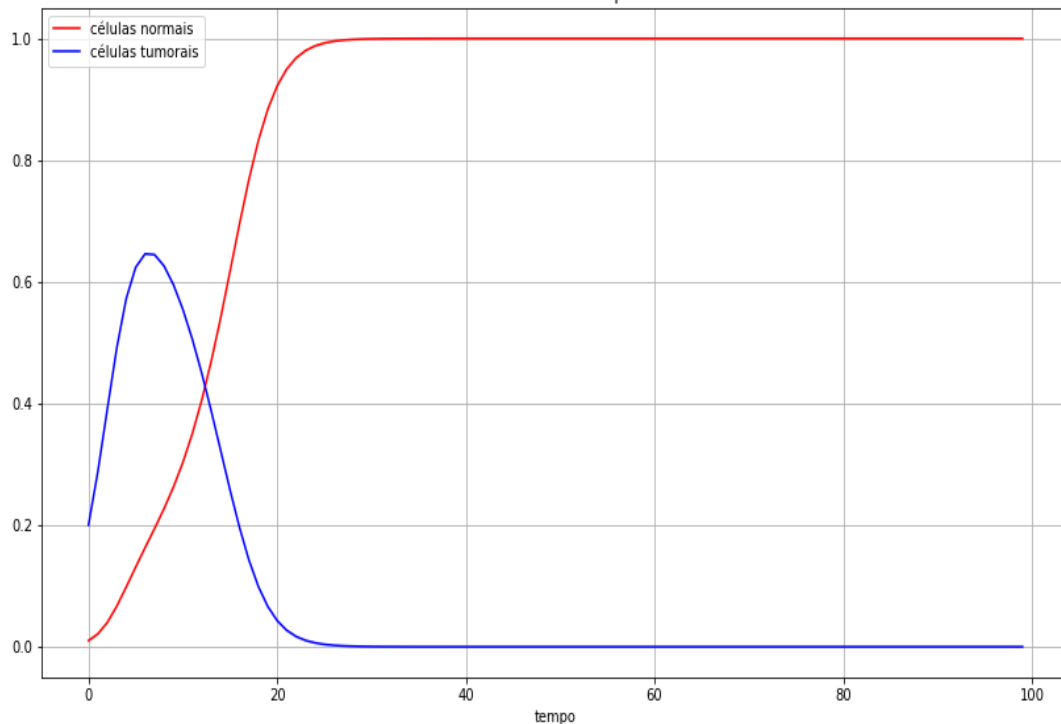
Figura 3.1: Dinâmicas dos Sistemas 1
Dinâmica no tempo



Fonte: do próprio autor.

Podemos observar com os gráficos os pontos de equilíbrio do sistema assim também como podemos observar os estágio do tumor. Vale ressaltar que como a situação se trata de uma competição de espécies e como descrito em [10] temos que a interação das células tumorais com as células normais, se o tumor fecundar e se desenvolver, podem ser definidas em três tipos:

1. Quando $N(t) > T(t)$, ou seja, a quantidade de células normais é maior que a de células tumorais, causado pela inibição do desenvolvimento do tumor.
2. Quando $N(t) = T(t)$, e as células convivem em harmonia, resultando no câncer benigno.
3. E quando $N(t) < T(t)$, onde as células tumorais ultrapassam o número de células normais, podendo resultar no câncer maligno levando a morte do hospedeiro.

Figura 3.2: Dinâmicas dos Sistemas 2
Dinamica no tempo

Fonte: do próprio autor.

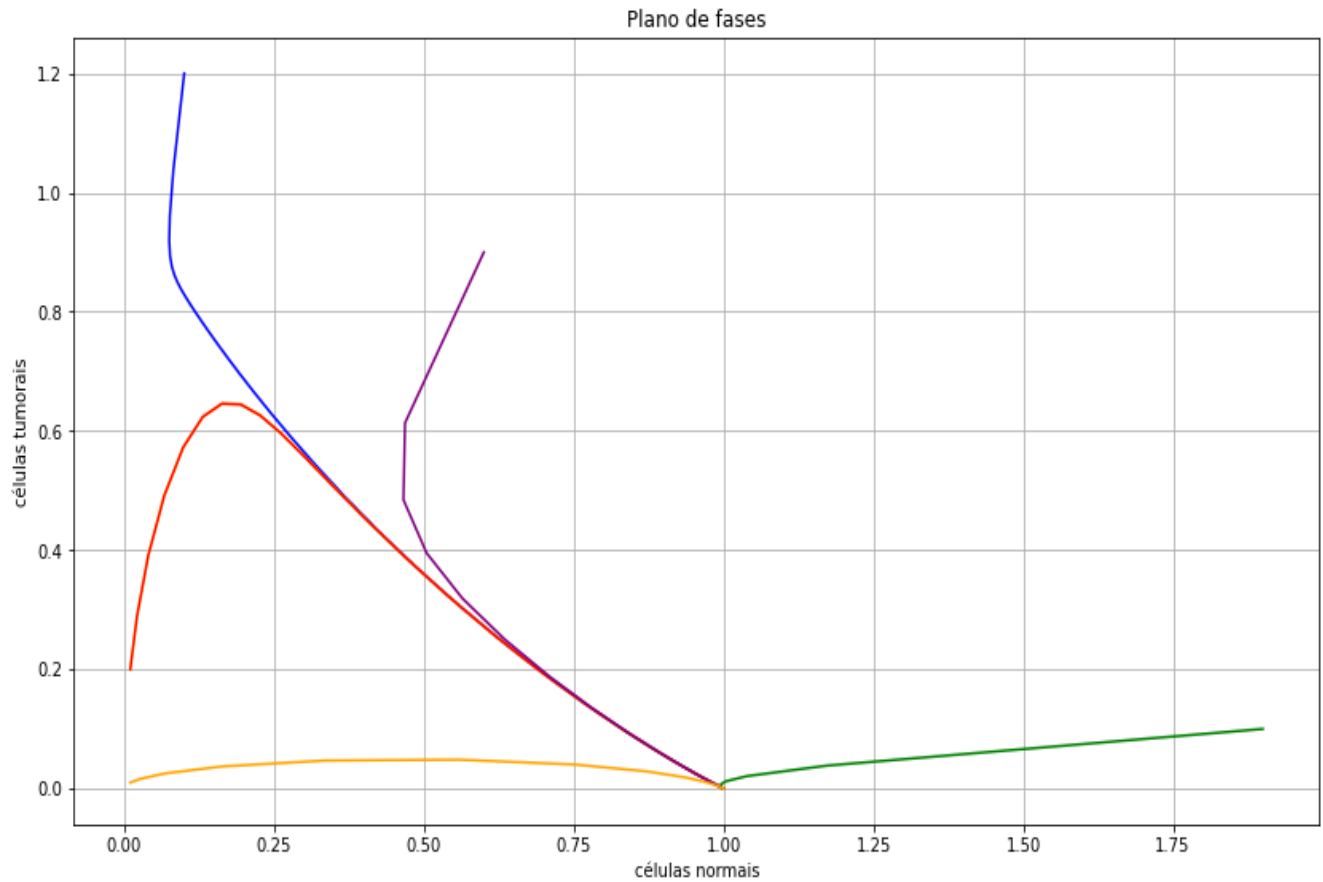
A seguir analisaremos os pontos de equilíbrio estáveis. Podemos ver pelos gráficos que independente das condições iniciais, que nas figuras apresentadas, em 3.1 são $N_0 = 0, 1$ e $T_0 = 1, 2$ e em 3.2 são $N_0 = 0, 01$ e $T_0 = 0, 2$. O sistema é levado sempre para o ponto $(1, 0)$, ou seja, temos que as células normais se estabilizam em 1 e as células tumorais são levadas à morte. O que indica que o único ponto de equilíbrio estável é o $(1, 0)$.

Observe que na Figura 3.3 é apresentado o plano de fase cujo gráfico de células normais x células tumorais apresenta diferentes valores iniciais, ou seja o número de células normais e células tumorais são diferentes no início. Cada curva representa uma trajetória deste crescimento, que levam ao único ponto de equilíbrio estável no qual as células normais se estabilizam em 1 e as células tumorais são levadas a morte, tornando o hospedeiro livre do tumor.

De maneira geral os resultados obtidos são satisfatórios, tornando possível visualizar as diferentes interações entre as células tumorais e células normais para cada valor inicial associados ao modelo.

Pode-se observar que a depender dos valores iniciais a interação entre as células normais e células tumorais adquirem um certo tipo de comportamento, podendo levar a extinção das células cancerígenas no corpo ou a morte do hospedeiro.

Figura 3.3: Pontos de Equilíbrio Estável



Fonte: do próprio autor.

3.5 Conclusões

Neste trabalho foi possível destacar a importância da modelagem matemática, seja em situações de saúde pública, ajudando no controle de tumores ou epidemias, podendo salvar vidas, como também na formação lúdica, trabalhando com situações fictícias e fantásticas dentro da matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] BACAER, N. *Verhulst e a equação logística na dinâmica populacional*. In: European Communications in Mathematical and Theoretical Biology. Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, France, 2008.
- [2] BASSANEZI, R. C. ; FERREIRA JR, W. C. *Equações Diferenciais Com Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1988. 572 p.
- [3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002. v. 2000. 389 p.
- [4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 11^o ed. LTC, Rio de Janeiro, 2020.
- [5] GUCKENHEIMER, J. e HOLMES, P *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Appl. Math. Sci. 42 (Second Printing), (New York:Springer), 1986.
- [6] HIRSCH, M., SMALE S.e DEVANEY R. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos Second Edition (Pure and Applied Mathematics)* Elsevier (USA) 2004.
- [7] MAUTHUS, T. R. *An essay on the principle of population*. 1798.
- [8] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] PILLIS, L.G. DE; RADUNSKAYA, W. GUA, A.E. *Mixed immunotherapy and chemotherapy of tumors: modeling, applications and biological interpretations*. Journal of Theoretical Biology, n. 238, p. 841–862, 2006.
- [10] RODRIGUES, D. S.; MANCARENA, P. F. A.; PINHO, S. T. R. *Modelagem Matemática em Cancêr e Quimioterapia: Uma Introdução*. v. 58. São Carlos: SBMAC, 2011.
- [11] SUATE, Gabriela Sousa. *Modelagem Matemática da dinâmica e controle do crescimento de tumores*. 2006. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - De-

partamento de Física Estática e Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2006.