



LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

EXPERIÊNCIA DO PIC: CRÍTICAS, SUGESTÕES E IMPORTÂNCIA  
PARA MINHA FORMAÇÃO DOCENTE

LEANDRO CONTE

Sorocaba

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

EXPERIÊNCIA DO PIC: CRÍTICAS, SUGESTÕES E IMPORTÂNCIA  
PARA MINHA FORMAÇÃO DOCENTE

LEANDRO CONTE

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Prof. Dr. Geraldo Pompeu Júnior.



Folha de aprovação

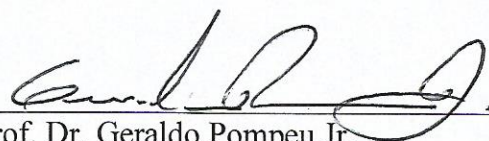
**LEANDRO CONTE**

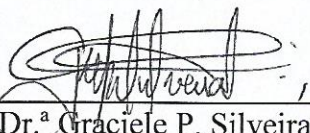
"EXPERIÊNCIA NO PIC: CRÍTICAS, SUGESTÕES E IMPORTÂNCIA  
PARA MINHA FORMAÇÃO DOCENTE"

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Aprovado em 30/08/2019

Orientador   
Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr.

Membro 2   
Prof.ª Dr.ª Graciele P. Silveira

Membro 3   
Prof. Dr. Antônio Luis Venezuela

# Agradecimentos

*Agradeço meus pais por todo o apoio.*

*Ao orientador Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr., por toda a paciência e dedicação.*

*À minha namorada.*

*Ao coordenador do PIC da edição de 2018, Prof. Dr. Antonio Luiz Venezuela e aos colegas professores do programa, Gabriela, Larissa, Leandro e Ricardo.*

*À todos os meus professores da graduação.*

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	7
2	HISTÓRIA DA OBMEP . . . . .	9
3	PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JR. (PIC) . . . . .	13
3.1	Comparação entre o PIC presencial e o virtual . . . . .	15
4	MATERIAIS UTILIZADOS NO PIC PRESENCIAL E VIR- TUAL . . . . .	18
4.1	“Livro para os encontros de Aritmética” . . . . .	18
4.2	“Livro para os encontros de Geometria” . . . . .	19
4.3	“Livro para os encontros sobre os Métodos de Contagem e Probabilidade” . . . . .	21
4.4	“Livro para os encontros sobre o Teorema de Pitágoras e Áreas”	22
4.5	“Outros materiais utilizados nos encontros” . . . . .	23
5	EXPERIÊNCIA DURANTE O PIC . . . . .	26
5.1	Experiência dos alunos . . . . .	26
5.2	Experiência dos professores . . . . .	32
5.3	Experiência pessoal como professor do nível 3 . . . . .	35
6	COMPARAÇÃO ENTRE UMA AULA DO PIC E DO ESTADO	39
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	44
	REFERÊNCIAS . . . . .	47
	ANEXO A – PRINCÍPIO BÁSICO DE CONTAGEM - PIC	49
	ANEXO B – PROBLEMAS DE CONTAGEM NO CADERNO DO ALUNO EM SÃO PAULO . . . . .	58
	ANEXO C – PROBLEMAS DE CONTAGEM NO PIC - N3	67

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quantidade de medalhas de ouro e prata distribuídas por região de 2005 a 2018. . . . .	11
Figura 2 – Exemplo de exercícios com sugestão de vídeo do portal. . . . .	19
Figura 3 – Primeiros conceitos abordados no livro. . . . .	20
Figura 4 – Exemplo de questão retirada da OBMEP. . . . .	20
Figura 5 – Estratégias para resolver um problema de contagem. . . . .	21
Figura 6 – Uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras. . . . .	23
Figura 7 – Resposta à primeira questão de um aluno do nível 2. . . . .	27
Figura 8 – Resposta à primeira questão de uma aluna do nível 3. . . . .	28
Figura 9 – Registro de um aluno do nível 2. . . . .	28
Figura 10 – Resposta de uma aluna do nível 3. . . . .	29
Figura 11 – Comentário de um aluno com relação ao horário de início dos encontros. . .	30
Figura 12 – Resposta de um aluno que já participou anteriormente. . . . .	30
Figura 13 – Segunda questão respondida por um aluno do nível 2. . . . .	31
Figura 14 – Problema que exige raciocínio lógico. . . . .	36
Figura 15 – Primeiro problema proposto sobre PA. . . . .	37
Figura 16 – Solução do primeiro problema proposto sobre PA. . . . .	38
Figura 17 – Primeiro exercício da Situação de Aprendizagem de Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo do caderno do aluno. . . . .	40
Figura 18 – Primeiro exercício proposto para o encontro 1 do Ciclo 2 do nível 3 no PIC.	40
Figura 19 – Segundo exercício da Situação de Aprendizagem de Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo do caderno do aluno. . . . .	41
Figura 20 – Segundo exercício da proposta para o encontro 1 do Ciclo 2 do PIC. . . . .	41

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição de escolas e alunos por região no ano de 2014. . . . .	10
Tabela 2 – Escolha dos alunos do assunto melhor desenvolvido. . . . .	32

## RESUMO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP foi criada no ano de 2005 como uma estratégia para se estimular e promover o estudo da Matemática no ensino básico brasileiro, além de incentivar jovens a ingressar em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas. A partir desta competição, novos programas foram desenvolvidos, entre eles o Programa de Iniciação Científica Jr. - PIC. Este programa é oferecido à jovens medalhistas em cada edição da OBMEP e visa ampliar o conhecimento científico e matemático dos alunos através de diferentes e interessantes questões no ramo da Matemática. Buscou-se fazer uma análise do PIC do ponto de vista dos alunos e dos professores participantes da 13<sup>a</sup> e 14<sup>a</sup> edições do programa, afim de que tanto os estudantes quanto os professores pudessem destacar os principais pontos positivos e negativos do programa, assim como darem sugestões para melhoria do mesmo. Desta forma, os objetivos centrais desse Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática são: (1) analisar, discutir e criticar, positiva e negativamente, o PIC, do ano de 2018, no qual atuei como professor de uma turma de nível 3 da região de Sorocaba, segundo os seguintes aspectos: seus objetivos, os participantes, as diferenças entre as aulas presenciais e virtuais, os materiais utilizados, a dinâmica das aulas e, por fim, as responsabilidades dos alunos e Professores participantes; (2) destacar as influências de minha participação nesse trabalho sobre a minha formação de futuro Professor de Matemática do Ensino Básico brasileiro. Apesar de alunos e professores terem apontado algumas falhas do PIC, eles pensam que ele é um ótimo programa para a propagação da Matemática.

**Palavras-chave:** Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP; Programa de Iniciação Científica Jr. - PIC; Resolução de Problemas.

## ABSTRACT

The Brazilian Public School Math Olympics (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, or OBMEP) was created in 2005 as a strategy to encourage and promote the study of Mathematics in Brazilian basic education, in addition to encouraging young people to get in science and technological careers at university level. As of this competition, new programs were developed, such as the Junior Scientific Initiation Program (Programa de Iniciação Científica Jr., or PIC). This program is offered to medal winning students in each edition of the Olympics and it aims to amplify the scientific and mathematical knowledge of the students using different and interesting Math questions. An analysis was made from the point of view of the students and teachers who participated in the 13<sup>th</sup> and 14<sup>th</sup> edition of the program. The purpose of this analysis was to highlight the positive and negative topics of the program, as well as to obtain suggestions and ideas to make it greater for the future participants. Thus, the main objectives of this Mathematics Degree Course Completion Paper are: (1) analyze, discuss and criticize, positively and negatively, a program called PIC, 2018 edition, in which I acted as a Teacher of a level 3 class, according to the following aspects: its objectives, participants, differences between classroom and virtual classes, the materials used, the dynamics of the classes and, finally, the responsibilities of the participating students and teachers; (2) to highlight the influences of my participation in this work on my formation as a future Mathematics Teacher of Brazilian Basic Education. Even though students and teachers have pointed out some flaws in the program, they think that PIC is an excellent program for the spread of Mathematics.

**Key words:** Brazilian Public School Math Olympics; Junior Scientific Initiation Program; Problem Solving.



## 1 INTRODUÇÃO

Noções matemáticas são utilizadas no cotidiano de todas as pessoas e ainda assim, quando se fala da disciplina Matemática, é comum se ouvir reclamações a respeito da dificuldade do assunto ou de como ela é entediante e sem sentido. Comentários desse tipo são feitos por pessoas de todas as faixas etárias, desde crianças até adultos. Há algo que possa ser feito para mudar a opinião de indivíduos que dizem não gostar do assunto? Para responder a essa pergunta, uma análise deve ser feita, bem como, perguntar-se o porquê isso acontece.

O gosto das pessoas pela Matemática está diretamente ligado ao modo como ela foi ensinada para elas. Se um professor simplesmente trata do assunto sem explicar o passo a passo do como aquilo que está sendo ensinado é válido ou não, ou sem fazer conexões com a vida cotidiana do aluno, dificilmente o aluno irá gostar da matéria, visto que para ele não há aplicabilidade em sua vida, logo, por quê a estudar? Licenciandos em Matemática, ou seja, futuros professores e também professores já experientes devem estar atentos a estes fatos e desse modo, adequar suas aulas para que crianças e jovens não se tornem avessas a disciplina.

Uma das estratégias existentes para isso, no Brasil e em outros países, para se tentar mudar esse cenário nas escolas de Ensino Básico, foi a criação de competições que instigam os alunos a usar a Matemática de uma forma criativa e divertida. Dessa forma, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), seguida da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foram criadas. Essas duas provas tratam do assunto de uma forma não convencional, diferente do modo como se normalmente ensina o assunto nas escolas, as questões são muito intuitivas e instigam o raciocínio lógico dos participantes. Como qualquer outra competição, existem premiações para os melhores colocados de cada escola.

A partir da classificação dos alunos na OBMEP, o que depende do desempenho deles na prova, os alunos são convidados a participar de programas voltados para um estudo mais aprofundado da Matemática, como é o caso do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC): alunos com as melhores classificações na Olimpíada participam do programa

de forma presencial ou virtual (dependendo da disponibilidade de Polos próximos a sua localidade), os professores do programa são graduandos de Licenciatura em Matemática e os assuntos trabalhados são dos mais diversos.

O PIC existe desde 2006 e há trabalhos que analisam e relatam as experiências de alunos e professores participantes do programa em diferentes locais do país, como no Vale do Taquari-Rio Grande do Sul, em Ponta Grossa-Paraná e Guaratinguetá-São Paulo. Os objetivos desses trabalhos eram o de refletir e analisar as práticas realizadas durante o projeto e também destacar o impacto e contribuição do PIC na aprendizagem em Matemática (MONTEIRO et al., 2017), (MEZA; PEREIRA; PERUZZO, 2017), (COELHO, 2016).

Os objetivos específicos desse Trabalho de Conclusão de Curso são os de: (1) analisar, discutir e criticar, positiva e negativamente, o PIC, do ano de 2018, no qual atuei como professor de uma turma de nível 3, segundo os seguintes aspectos: época de criação, seus objetivos, os participantes, as diferenças entre as aulas presenciais e virtuais, os materiais utilizados, a dinâmica das aulas e, por fim, as responsabilidades dos alunos e Professores participantes; (2) destacar as influências de minha participação nesse trabalho sobre a minha formação de futuro Professor de Matemática do Ensino Básico brasileiro.

O Capítulo 2 contém a história e características da OBMEP. O Capítulo 3 trata do PIC, sua criação, seus objetivos, como funciona, quem pode participar e possui as principais diferenças entre o PIC presencial e virtual. No Capítulo 4 os materiais utilizados no programa são descritos. O Capítulo 5 possui relatos de alunos e professores participantes do PIC, suas impressões acerca do programa e sugestões para a melhoria do mesmo. No Capítulo 6 há a comparação entre uma aula do PIC e uma aula em uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Por fim, no Capítulo 7 tem-se as considerações finais e, concluindo o TCC, são elencadas as referências consultadas e/ou citadas nesse trabalho.

## 2 HISTÓRIA DA OBMEP

Em 1979, surgiu a ideia de se criar uma competição de matemática no Brasil, chamada de Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), realizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Desde sua criação, o objetivo principal dela é a de estimular o ensino e aprendizado da Matemática nos alunos, além de encontrar jovens talentos. Outra finalidade da criação da competição é o de desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, melhorando assim o ensino da disciplina no Brasil.

Desde que foi criada a OBM sofreu diversas modificações. Essas mudanças envolveram os seguintes aspectos: criação de diferentes níveis de prova (algo que também se modificou durante os anos, até chegar nos moldes de hoje, ou seja, três níveis para o ensino básico e um para o nível universitário); diferentes fases (uma de múltipla escolha, outras com questões dissertativas); provas aplicadas em dois dias ou em um só). Apesar de todas as variações no decorrer dos anos, o foco da olimpíada sempre se manteve o mesmo (SBM, 2017).

No ano de 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas (OBMEP) foi criada. O projeto é realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da SBM e é promovido com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). Esta Olimpíada tem por objetivos:

- Ampliar e estimular o estudo da Matemática no Brasil, consequentemente promovendo a difusão da cultura Matemática;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, seja por meio da disponibilização de material didático de qualidade para um número significativo de alunos, seja através do incentivo de aperfeiçoamento de professores de escolas públicas;
- Tentar associar escolas de nível básico com universidades públicas, institutos federais e com sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão de conhecimento (OBMEP, 2016).

A olimpíada ainda possui três níveis de aplicação para o Ensino Básico: o primeiro nível, para alunos do 6º e 7º ano, o segundo para alunos de 8º e 9º ano e o último é para alunos do Ensino Médio. A competição possui ainda duas fases: a primeira composta por questões objetivas e a segunda por questões discursivas. Os alunos são classificados para a Segunda Fase de acordo com suas notas na prova da Primeira Fase, classificados em ordem decrescente de nota, até que se preencha o total de vagas disponíveis para cada escola, em cada nível (OBMEP, 2016).

No ano de 2017, a fim de racionalizar o uso dos recursos humanos e financeiros, as duas olimpíadas foram integradas. As duas primeiras fases da OBMEP passaram a servir como fase classificatória para a OBM, que passou a ter apenas uma etapa (exceto para o nível universitário). Assim, desde 2017, escolas privadas também se inscrevem na OBMEP. A OBM agora tem como objetivo selecionar jovens que representarão o Brasil em olimpíadas internacionais. Poderão participar da OBM, 300 alunos de escolas públicas ou particulares melhores classificados em cada nível (1, 2 e 3), além de medalhistas da OBM do ano anterior e vencedores de olimpíadas regionais (SBM, 2017). A OBMEP continua premiando 6500 alunos das escolas públicas com medalhas de ouro, prata e bronze, porém, agora também premia alunos de escolas privadas: 75 de ouro, 225 de prata e 675 de bronze. Além das medalhas entregues, ela também pode entregar até 5700 certificados de Menção honrosa. A Tabela 1 mostra a distribuição de escolas e o número de alunos matriculados por região do País no ano de 2014.

Tabela 1 – Distribuição de escolas e alunos por região no ano de 2014.

<b>Região</b>	<b>Número escolas</b>	<b>Número matrículas</b>
<b>Centro-Oeste</b>	4.681	954.052
<b>Nordeste</b>	21.216	3.836.105
<b>Norte</b>	8.370	1.307.430
<b>Sudeste</b>	19.371	5.048.754
<b>Sul</b>	9.259	1.613.843

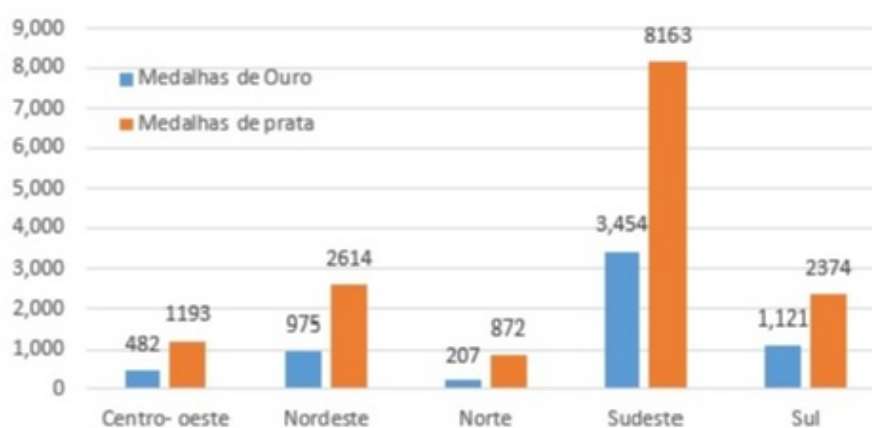
Fonte: (INEP, 2015)

Desde a criação da OBMEP, as regiões que mais conquistou medalhas de ouro e prata são a Sudeste, seguida da Sul e da Nordeste, respectivamente. A Figura 1, mostra a quantidade de medalhas ganhas por região, mas se analisássemos ano a ano, esse ranking se manteria mais ou menos o mesmo, com eventuais trocas de posição.

Buscou-se saber a quantidade de escolas e de alunos de cada região como tentativa

de entender o porquê dessa distribuição de prêmios ocorrer dessa forma. A Tabela 1 contém os valores do censo feito em 2014. Nele, consideram-se as escolas federais, estaduais, municipais e privadas de ensino fundamental e médio (INEP, 2015). Apesar de saber-se que há diferenças na qualidade de ensino em nível municipal, estadual e regional, deve-se levar em conta a diferença do número de alunos matriculados por região, o que afeta diretamente a quantidade de alunos que realizam a prova da OBMEP, conseqüentemente a distribuição de medalhas, até porque quanto maior o número de alunos fazendo a Olimpíada por região, maior a probabilidade de obtenção de premiação.

Figura 1 – Quantidade de medalhas de ouro e prata distribuídas por região de 2005 a 2018.



Fonte: Adaptado de (OBMEP, 2017a)

Observe que, percentualmente, entre os anos de 2005 e 2018, a premiação cresceu mais na região Norte (421%), enquanto nas demais regiões esse índice ficou entre 211% (região Sul) e 268% (região Nordeste). Questões à serem postas a esse respeito são: “ Por que a região Norte apresentou praticamente o dobro do crescimento das demais regiões do País no número de medalhistas de ouro e prata? O que foi feito nesse período na educação matemática local que tanto diferenciou esses resultados?”. Observe que, percentualmente, entre os anos de 2005 e 2018, a premiação cresceu mais na região Norte (421%), enquanto nas demais regiões esse índice ficou entre 211% (região Sul) e 268% (região Nordeste). Questões à serem postas a esse respeito são: “ Por que a região Norte apresentou praticamente o dobro do crescimento das demais regiões do País no número de medalhistas de ouro e prata? O que foi feito nesse período na educação matemática local que tanto diferenciou esses resultados?”.

No ano de 2018 ocorreu a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas

Públicas – Nível A (OBMEP “Nível A” 2018), prova criada para alunos de 4º e 5º ano do Ensino Fundamental I regularmente matriculados em escolas públicas municipais, estaduais e federais. Essa prova é realizada em uma única fase, composta de 20 questões objetivas. O seu conteúdo segue os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para alunos de 4º e 5º ano. As questões possuem as mesmas características encontradas nas provas dos alunos de Ensino Fundamental II e Ensino Médio: aplicação de raciocínio lógico e da criatividade.

A participação nas competições nacionais de matemática, OBMEP e OBM, permite a participação de alunos premiados em programas criados para o estudo mais aprofundado da disciplina. Existe um programa voltado para alunos que queiram participar das duas competições, outro que beneficia alunos universitários que já se destacaram nas olimpíadas. A seguir tem-se a lista e uma breve descrição desses programas:

- Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI): Oferece cursos gratuitos para alunos de 8º e 9º anos interessados em participar da OBMEP e OBM (IMPA, 2016).
- Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC): Curso oferecido a alunos premiados na OBMEP, cujo objetivo é apresentar o rigor matemático nas técnicas e métodos utilizados na resolução de problemas, assim como incentivar a independência do raciocínio e a criatividade dos alunos (OBMEP, 2017b).
- Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME): Programa oferecido para estudantes universitários que se destacaram em alguma competição nacional (OBMEP, 2017c).
- OBMEP Na Escola: Professores podem trabalhar resolução de problemas com pequenos grupos de alunos selecionados em sua escola ou de escolas vizinhas. O maior objetivo desse programa é o de contribuir para a formação dos professores de Matemática (OBMEP, 2018).

Tendo feito um breve resumo histórico da criação e objetivos principais da OBM e da OBMEP, passo agora a caracterizar e detalhar o Programa de Iniciação Científica Jr., ou seja, o PIC, um dos meus objetivos centrais de análise desse TCC.

### 3 PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JR. (PIC)

O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) teve sua primeira edição no ano de 2006 e consiste em um programa que permite ao aluno premiado em cada edição da OBMEP estudar diversos ramos da Matemática, de forma que seu conhecimento científico seja ampliado e aprofundado. Assim como a OBMEP, o PIC é realizado pelo IMPA. Se houver um polo de Iniciação Científica (geralmente universidades) perto da sua residência, o aluno poderá participar do PIC Presencial, cujas aulas geralmente ocorrem aos sábados, das 8h às 12h. Caso não haja, o aluno participará do PIC a Distância, com aulas virtuais. Os principais objetivos do PIC são:

- Incentivar a curiosidade dos alunos e o gosto deles não só pela matemática, mas pela ciência no geral;
- Utilizando da resolução de problemas, da leitura e interpretação de textos matemáticos, do estudo de temas de modo mais aprofundado e com um maior rigor matemático, espera-se que o conhecimento dos alunos se aprofunde;
- Auxiliar no desenvolvimento de algumas habilidades dos alunos, tais como: sistematização, generalização, analogia e capacidade de aprender por contra própria ou em colaboração com os demais colegas.

Os alunos participantes do programa são separados em três diferentes níveis: alunos do 7º ano participam do nível 1, alunos do 8º e 9º ano participam do nível 2, enquanto que estudantes do Ensino Médio participam no nível 3.

As responsabilidades dos alunos, além de participarem das aulas, sejam elas presenciais ou virtuais, são duas: realizar tarefas online no portal do PIC; e, participar dos fóruns elaborados pela OBMEP, nos quais podem interagir com alunos de todo o Brasil e também com moderadores, que os auxiliam na realização de atividades e no esclarecimento de dúvidas. Para o controle do trabalho realizado pelos professores e da própria OBMEP, os alunos realizam avaliações a cada duas semanas de estudos, sendo elas um dos critérios para a permanência deles no programa, já que alunos que não obtêm um certo rendimento não podem continuar participando do mesmo. A avaliação vale de 0 à 10 e possuem duas

questões dissertativas; durante os encontros em que eram realizadas as avaliações, eram disponibilizadas uma hora e meia para a realização das mesmas.

Os professores do programa são graduandos do curso de licenciatura em Matemática, ou seja, uma proposta bem interessante, já que pode ser o primeiro contato de um licenciando com o processo de ensino e aprendizagem. Dentre as responsabilidades desse professor estão: participar de reuniões de formação e de preparo das aulas, auxiliar os alunos na resolução dos problemas buscando sempre que as ideias e o raciocínio partam dos alunos, escrever relatórios contando sobre cada encontro, além de corrigir as avaliações, dados que devem ser colocados no diário de classe no Portal do PIC, incentivar os alunos a participarem dos fóruns e a realizarem as tarefas online.

O PIC é dividido em diferentes ciclos, neles eram desenvolvidos estudos sobre conteúdo específicos e ao final deles, os alunos faziam uma avaliação. A cada ciclo, encontrava-se no portal do PIC dos professores, um roteiro de estudos, que consistia em apresentar os conteúdos a serem estudados e também sugerir atividades para os encontros, ou seja, exercícios e problemas relacionados ao assunto estudado, muitos deles retirados de edições anteriores da OBMEP. Nesses roteiros eram sugeridos textos e vídeo aulas para uso tanto em sala de aula, como para a preparação do professor. O material teórico e as vídeo aulas se encontravam no Portal da Matemática (site que os alunos também tinham acesso).

Para desenvolver um país é necessário desenvolver pessoas: elevar o patamar de informação disponível e prover a população de conhecimentos básicos de ciência e tecnologia, porque esses conhecimentos são centrais hoje em dia. (...) Assim, é preciso que desde os primeiros anos da educação formal os(as) estudantes sejam postos em contato com a cultura científica, ou seja, com a maneira científica de produzir conhecimento e com as principais atividades humanas que têm moldado o meio ambiente e a vida humana ao longo da história. Acima de tudo, é preciso permitir que sejam criativos e inovadores. E capazes de sonhar! Esses são os principais ingredientes da ciência (CNPQ, 2013).

Para alunos do programa que estão matriculados em escolas públicas de educação básica, há a possibilidade de uma bolsa, um incentivo financeiro mensal concedido pelo



CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico aos alunos que acompanham todas as etapas do PIC (OBMEP, 2017b).

Alunos com alta multiplicidade, ou seja, que já participaram do programa várias vezes têm a oportunidade de estudar assuntos avançados em diversas áreas, mediante o oferecimento de cursos ministrados por professores universitários sobre tópicos específicos que envolvam direta ou indiretamente Matemática. Isso é possível através do Programa Mentores da OBMEP. Para que um aluno possa participar desse programa é necessário que ele já tenha participado do PIC mais de uma vez, sendo que uma delas deverá ter sido no nível 3. Para esses alunos, também existe uma bolsa concedida pelo CNPq (OBMEP, 2017b).

Passo agora a tecer algumas considerações e comparações a respeito do PIC Presencial e do PIC Virtual.

### 3.1 COMPARAÇÃO ENTRE O PIC PRESENCIAL E O VIRTUAL

Para os alunos que moram em cidades longe de qualquer polo presencial do PIC, existe a modalidade virtual do programa, assim todos os premiados têm a oportunidade de se aprofundar no estudo da Matemática. Por serem modalidades distintas, com suas próprias características e limitações, é necessário que o professor e os alunos se adaptem a cada uma dessas realidades. As principais semelhanças e diferenças entre o PIC Presencial e o Virtual serão descritos a seguir, com base na minha experiência como professor do PIC presencial do nível 3 e de outra professora do programa presencial no polo de Sorocaba e de um professor que participou da mesma edição do programa, entretanto com alunos do PIC Virtual.

Os materiais utilizados na preparação das aulas são praticamente os mesmos. Cada professor se utiliza dos materiais disponibilizados pela OBMEP (materiais escritos e vídeos disponíveis no Portal da Matemática, livros sugeridos pelo PIC e plano de aula de cada tema. Como as turmas de sala de aula, normalmente, eram bem heterogêneas, com alunos de diferentes séries e níveis de conhecimento da Matemática, a aula usualmente era iniciada com uma parte teórica sobre o tema sugerido para estudo. Em seguida, uma lista, contendo exercícios e problemas, era entregue aos alunos participantes objetivando que eles buscassem resolvê-los por conta própria. Caso os alunos já tivessem alguma

familiaridade com o assunto, pulava-se a etapa teórica e a lista, com exercícios e problemas, era entregue a eles. Após um certo tempo, que dependia do “tamanho” da lista, os alunos tinham que pensar sobre as situações propostas e as resolverem, enquanto, o professor intervinha, fazendo perguntas e pedindo a resolução deles. Assim uma discussão entre alunos e professor ocorria.

Com relação ao material, nenhum dos professores se limitava somente aos livros sugeridos pela OBMEP, mas sempre buscavam problemas no Portal da Matemática, banco de questões de edições passadas da OBMEP, questões de livros, como o "Círculos Matemáticos: A experiência Russa" (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010). Como mencionado anteriormente, uma lista de problemas era proposta pelos organizadores do PIC. Essas listas geralmente eram as mesmas tanto para alunos participantes do programa presencial quanto do virtual, embora as questões das avaliações fossem distintas.

Professores do PIC Presencial tinham uma maior liberdade ao trabalharem com os exercícios e problemas, isto é, mais de uma forma de apresentá-los (podiam utilizar slides, lousa, entregar cópias de teoria e exercícios), podiam dividir os alunos em pequenos grupos para que eles tentassem resolver as situações propostas de forma conjunta e também, conseguiam trabalhar com as dificuldades dos alunos de maneira individual, indo até a carteira daqueles que necessitassem de algum auxílio.

Já nas aulas do PIC Virtual, que ocorriam por meio de uma plataforma online, os recursos de webcam e microfone eram utilizados, objetivando que alunos e professor pudessem se ver. Além dessas possibilidades de comunicação, existe um chat, no qual a maior interação entre professor e alunos ocorria. O professor tinha acesso a algumas ferramentas de escrita e desenho em tela que o auxiliava na explicação da teoria e na resolução de exercícios. Entretanto, existem críticas e sugestões a respeito dessa plataforma, que buscam sua melhoria. Os alunos, por exemplo, não conseguem utilizar essas ferramentas, o que por vezes dificultava o envio das resoluções das questões, já que não há muitos recursos para colocar imagens no chat ou recursos para escrever fórmulas e equações. Por conta das limitações do PIC Virtual mencionadas, o professor acabava tendo que utilizar *slides* como base de sua aula, já que são neles que ele expõe a teoria, os exercícios propostos e também suas respectivas resoluções. Através do *chat*, o professor também dá "dicas" para que os alunos possam resolver os exercícios e problemas. Também pede para que mandem

suas respectivas resoluções, afim de se obter a impressão e perspectiva dos alunos sobre como resolver ou de como eles compreenderam os problemas ou os exercícios propostos.

Tendo feito as considerações e comparações que avaliei necessárias, do ponto de vista de professor do PIC Presencial, do nível 3, e das colocações feitas pelo professor do PIC Virtual, passo a analisar e avaliar os materiais utilizados durante o transcorrer do PIC Presencial e Virtual.

## 4 MATERIAIS UTILIZADOS NO PIC PRESENCIAL E VIRTUAL

No primeiro encontro com os alunos, foram entregues quatro livros a eles, independentemente do Nível que estavam. Esses livros serviram como Material Didático de apoio dos professores, já que apresentavam problemas e também explicações sobre os assuntos que seriam abordados durante todos os encontros, ou seja, os encontros de/do:

- Aritmética;
- Geometria;
- Métodos de contagem e probabilidade;
- Teorema de Pitágoras e áreas.

A seguir uma breve descrição de cada um desses livros será feita.

### 4.1 “LIVRO PARA OS ENCONTROS DE ARITMÉTICA”

Se trata de um livro escrito por Francisco Dutenhfner e Luciana Cadar (2015). Ele aborda os seguintes assuntos:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| • Paridade;  | • Aritmética dos restos;       |
| • Sistema posicional de numeração                  | • Múltiplos e divisores;       |
| • Base binária: problemas de pesagens com balança; | • Fatoração;                   |
| • Divisão euclidiana;                              | • Critérios de divisibilidade; |
| • Fenômenos periódicos;                            | • Máximo divisor comum;        |
|  | • Mínimo divisor comum.        |

O livro trabalha com vários tópicos, não necessariamente explicando minuciosamente cada um dos assuntos, pois este não é o objetivo dos autores, mas sim apresentar temas que às vezes não são trabalhados nas salas de aula das escolas, ou mesmo, apresentados

de forma diferente. Neste livro diversos problemas são propostos, sempre precedentes de pequenos comentários acerca do assunto abordado, muitas vezes com sugestões de raciocínios a serem seguidos e também de soluções. A cada novo tópico abordado, uma lista de exercícios e problemas é proposta. Um ponto que difere esse livro dos demais é que em todo texto há sugestões de vídeos do Portal da Matemática, o que pode ser observado na Figura 2, o que o torna bem interessante, já que como o livro não esmiúça cada um dos assuntos, os vídeos são excelentes complementos do que se está sendo tratado.

Figura 2 – Exemplo de exercícios com sugestão de vídeo do portal.

**Exercício 6:** (Fomin, capítulo 1, problema 17) Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? (Um problema muito parecido com este está resolvido no [vídeo 20](#).)

Fonte: (CADAR; DUTENHEFNER, 2015a)

## 4.2 “LIVRO PARA OS ENCONTROS DE GEOMETRIA”

Este livro também foi escrito por Francisco Dutenhfner e Luciana Cadar (2015). Seu conteúdo é composto de:

- Conceitos básicos: ângulos, triângulos e quadriláteros;
- Retas paralelas cortadas por uma transversal;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo;
- A circunferência e alguns dos seus elementos;
- Lugares geométricos;
- Pontos notáveis de um triângulo;
- Área: conceito e áreas do quadrado e do retângulo;
- A área de um triângulo retângulo;
- A área do paralelogramo;
- A área de um triângulo qualquer;
- A área do trapézio;
- Exemplos variados: áreas e perímetros;
- Teorema de Pitágoras;
- Visualização de figuras tridimensionais.

Por se tratar de um livro de geometria, cada um dos capítulos se inicia com definições de conceitos geométricos gerais, ou que serão utilizados para compreensão de algum assunto específico. O livro começa com a definição de conceitos básicos: segmentos de retas, retas, semirretas e também, tipos de retas. A Figura 3 mostra a definição de uma reta:

Figura 3 – Primeiros conceitos abordados no livro.

Uma reta é um conjunto de pontos. Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , ou o ponto pertence à reta ou o ponto não pertence à reta. Quando o ponto  $P$  pertence à reta  $r$  escrevemos  $P \in r$ . Quando o ponto  $P$  não pertence à reta  $r$  escrevemos  $P \notin r$ . Na figura a seguir,  $A \in r$  e  $B \notin r$ .

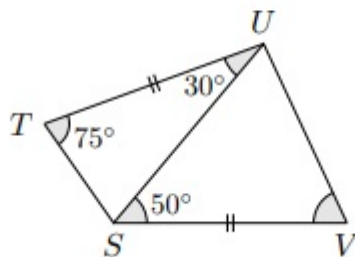


Fonte: (CADAR; DUTENHEFNER, 2015b)

De modo geral o livro segue um padrão, intercalando definições e exemplos, com exercícios, problemas e também questões da OBMEP de edições passadas. Alguns desses exercícios são de construção, sendo assim, régua e compasso devem ser utilizados. A estrutura do livro é diferente da que normalmente se vê em livros didáticos utilizados nas escolas e também em métodos apostilados. Veja a Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Exemplo de questão retirada da OBMEP.

(Banco de Questões 2010 – Nível 2 – questão 69) Na figura dada,  $TU = SV$ . Quanto vale o ângulo  $S\hat{V}U$ , em graus?



Fonte: (CADAR; DUTENHEFNER, 2015b)

### 4.3 “LIVRO PARA OS ENCONTROS SOBRE OS MÉTODOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE”

Esse livro foi escrito por Paulo Cezar Pinto Carvalho (2006). Segue a lista de assuntos abordados no livro:

- Métodos de contagem;
- Permutações e Combinações;
- Probabilidade;
- Probabilidade Condicional.

Como descrito no início do livro, o principal objetivo do material é o de habituar os alunos a problemas de contagem e modificar a visão de muitos sobre o assunto. Ao contrário do que muitos pensam, que só é possível resolver esse tipo de problemas com fórmulas complicadas (já que normalmente tais fórmulas nunca são demonstradas), muitas vezes esses tipos de problemas são resolvidos com raciocínios simples. Para que isso aconteça, em um primeiro momento, tenta-se fazer com que os alunos enxerguem o passo a passo da resolução de alguns problemas clássicos, como o de quantas maneiras distintas se é possível pintar uma bandeira com um determinado número de cores. A partir daí, existem dicas, estratégias e explicações para os raciocínios utilizados na resolução dos problemas. A Figura 5 assim mostra:

Figura 5 – Estratégias para resolver um problema de contagem.

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:

**1. Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.

**2. Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra.

Fonte: (CARVALHO, 2006)

A partir do quarto capítulo, algumas fórmulas são apresentadas, já que nem todo tipo de problema pode ser resolvido aplicando somente as quatro operações. Essas

fórmulas, porém, não são demonstradas, ou seja, se os alunos estiverem estudando sozinhos utilizando o livro, ou eles devem tentar demonstrá-las por conta ou devem pesquisar sobre a demonstração. Se o professor estiver usando isso durante os encontros, fica a cargo dele demonstrá-las.

#### 4.4 “LIVRO PARA OS ENCONTROS SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREAS”

O autor deste livro é Eduardo Wagner (2006) e apresenta os seguintes conteúdos:

- O enunciado do Teorema de Pitágoras;
- A recíproca do Teorema de Pitágoras;
- Ternos Pitagóricos;
- Generalizando o Teorema de Pitágoras;
- Construções Geométricas e o Triângulo Retângulo;
- Número  $\pi$ .

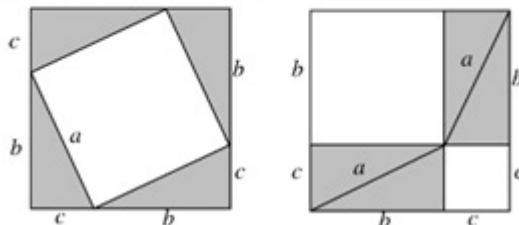
O início do livro trata, brevemente, da história do matemático Pitágoras, o contexto social da época em que vivia e até mesmo um pouco da história antes dele ter nascido. Por também ser um livro de geometria, ele tem um formato bem parecido com o do livro descrito anteriormente, com definições, exemplos e problemas propostos. Há uma grande diferença, porém. Nesse livro existem teoremas e suas respectivas demonstrações, o que o torna bem interessante. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, é ensinado em todas as escolas do nível básico da educação, porém costuma-se dar mais enfoque às aplicações do mesmo, do que às suas demonstrações. No livro, existem três diferentes tipos de demonstrações, logo, se alguém apresentou dificuldade em entender uma delas, ainda há outras duas opções. Nesse material há também muitas construções geométricas, onde muitos conceitos são abordados a partir de suas construções. A Figura 6 mostra uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras:



Figura 6 – Uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras.

**A demonstração clássica**

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , considere o quadrado cujo lado é  $b + c$ .



Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado  $b + c$  quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $a$ . Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado  $b + c$  os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $b$  e um quadrado de lado  $c$ . Logo, a área do quadrado de lado  $a$  é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem  $b$  e  $c$ .

Esta simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram.

Fonte: (WAGNER, 2006)

## 4.5 “OUTROS MATERIAIS UTILIZADOS NOS ENCONTROS”

Além dos quatro livros entregues aos alunos e professor descritos anteriormente, o professor recebe outros três pelos Correios: “Círculos Matemáticos - a experiência Russa”, “Círculo Matemático Moscou - problemas semana a semana” (DORICHENKO, 2016), “Primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra” (HOLANDA; CHAGAS, 2018). Os três livros contam com inúmeros problemas relacionados à praticamente todos os assuntos matemáticos abordados no ensino básico. Eles possuem estruturas muito parecidas, com enunciados de exercícios e problemas e suas respectivas resoluções e soluções. Estes livros não foram muito utilizados por mim, por conta do conteúdo denso estipulado para estudo pela organização do projeto, o que dificultava o trabalho com problemas extras, embora em alguns momentos, exercícios foram retirados desses livros para fazer uma complementação ao estudo realizado.

Em 2018 o Planejamento Acadêmico do PIC previu a realização de 7 ciclos de estudos com duração de três semanas cada um. Os assuntos trabalhados no nível 3 em cada ciclo foram:

- **Ciclo 1:** Fatoração de expressões algébricas; identidades algébricas notáveis; equações e inequações lineares; sistemas de duas equações lineares em duas variáveis; coordenadas no plano; conceito de função e seu gráfico; proporcionalidade e porcentagem; função afim e seu gráfico.
- **Ciclo 2:** Princípios Aditivo e Multiplicativo, permutações, combinações, permutações de elementos nem todos distintos; Probabilidade de eventos de espaços amostrais equiprováveis.
- **Ciclo 3:** definição, medida e bissetriz de um ângulo; triângulos e quadriláteros (paralelogramos e trapézios); congruência de triângulos; perímetro e área de triângulos, paralelogramos e trapézios; definição, ângulo central e ângulo inscrito de um círculo; perímetro e área do círculo.
- **Ciclo 4:** Paridade; sistema decimal; divisão euclidiana; critérios de divisibilidade; máximo divisor comum (MDC); mínimo múltiplo comum (MMC), Algoritmo de Euclides para o cálculo do MDC.
- **Ciclo 5:** Números primos e fatoração em primos; cálculo do MDC e MMC usando fatoração em primos; progressões aritméticas e geométricas.
- **Ciclo 6:** Teorema de Tales; semelhança de triângulos; razão entre as áreas de figuras semelhantes; Teorema de Pitágoras.
- **Ciclo 7:** Equações e inequações quadráticas; funções quadráticas e seus gráficos.

Observa-se que em cada ciclo são trabalhados diversos conceitos matemáticos que fazem parte do currículo do ensino básico, então esses assuntos também são estudados pelos participantes do programa na escola.

Ao se avaliar os conteúdos abordados durante os ciclos no nível 3 e avaliar os quatro primeiros livros descritos neste capítulo, é possível verificar que, embora os livros estejam de acordo com os conteúdos abordados nos Ciclos ( com excessão do Ciclo 1 e Ciclo 7), eles trazem os assuntos de maneira superficial para esse nível. Entende-se que esse material é mais prático para alunos de níveis inferiores, níveis 1 e 2, já que eles estão no início de sua jornada pelo mundo da OBMEP e do PIC, ou seja, não estão tão familiarizados com os assuntos trabalhados no programa, ou por nunca os terem estudados previamente ou por

não estarem acostumados aos tipos de exercícios e problemas apresentados nas Olimpíadas e no próprio PIC.

Passemos agora a relatar e analisar, nas perspectivas dos alunos e dos Professores, as experiências para com o PIC.

## 5 EXPERIÊNCIA DURANTE O PIC

Para se obter um parecer geral do PIC, alguns alunos e professores participantes do PIC foram entrevistados. Neste capítulo estão descritos os relatos e opiniões dessas pessoas.

### 5.1 EXPERIÊNCIA DOS ALUNOS

Com a finalidade de se obter um parecer dos alunos a respeito do programa, um questionário foi elaborado para se ter uma noção da opinião deles a respeito do PIC. As questões foram aplicadas aos alunos que estão participando da 14<sup>a</sup> edição do PIC presencial, no ano de 2019, no polo da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) - Campus Sorocaba, SP. Esses alunos responderam às seguintes questões:

- É a primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.
- Você já estudou algum dos assuntos apresentados no programa na escola?
- Para os alunos que estão participando no mesmo nível novamente: você acha os assuntos repetitivos ou há coisas diferentes (problemas diferentes, modo da aula diferente)?
- Qual o melhor conteúdo desenvolvido em sua opinião? Através das atividades propostas, qual te fez aprender melhor sobre o assunto? (Caso o conteúdo seja de um nível diferente do atual, por favor mencionar)

No total, 31 alunos responderam ao formulário: 3 alunos do nível 1, 22 alunos do nível 2 e 6 alunos do nível 3. No geral as respostas foram positivas, eles veem o programa com bons olhos. Os alunos não fizeram muitas críticas negativas. Entretanto, um ponto que deve ser observado é de que os alunos possam ter ficado receosos de expressar suas opiniões por completo, tendo em vista que os próprios professores entregaram e recolheram os questionários. A seguir encontram-se algumas das respostas mais relevantes na ótica do que se deseja nesse trabalho, ou seja, criticar de maneira positiva e negativa

os materiais utilizados no programa, os assuntos escolhidos para estudos, as listas de problemas propostos, enfim, o programa de um modo geral.

Há dois pontos que chamam atenção na Figura 7 que é a resposta de um dos alunos: o fato de o programa ser diferenciado da escola e da diferença de comportamento dos próprios alunos. Esta figura foi um dos registros, porém mais de um aluno descreveu os mesmos pontos.

Figura 7 – Resposta à primeira questão de um aluno do nível 2.

1- É primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.

SIM, ATÉ AGORA TEM SIDO MUITO INTERESSANTE, JÁ QUE O PROGRAMA É BEM DIFERENTE QUE A ESCOLA UMA DAS PRINCIPAIS DIFERENÇAS É O PRÓPRIO COMPORTAMENTO DOS ALUNOS

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta do aluno na Figura 7: “Sim, até agora tem sido interessante, já que o Programa é bem diferente que a escola. Uma das principais diferenças é o próprio comportamento dos alunos”)

O PIC é baseado na Resolução de Problemas, o qual não é muito trabalhado nas escolas, nas quais primeiro se ensina o conteúdo e depois exercícios de fixação são dados. Essa abordagem é muito diferente da proposta do PIC que, primeiramente, apresenta problemas e a partir da resolução deles, com os conhecimentos prévios dos alunos, é que se dá início a mais um assunto matemático, sempre discutindo e trocando ideias e pensamentos com os colegas de classe e o Professor.

Quanto ao comentário sobre o comportamento dos alunos, é natural que ela exista, até porque os alunos participantes do programa tem um interesse diferenciado pela Matemática, estando ali por vontade própria para estudar a disciplina, enquanto que na escola, infelizmente, muitos alunos não gostam da matéria, por diversos motivos, entre eles a falta de propósito em aprender o que se aprende e da maneira como isso se dá.

(Resposta da aluna na Figura 8: “Sim, estou muito feliz e grata pela oportunidade. No PIC aprendi mais de uma forma diferente e que nos estimula a pensar e achar soluções.

Figura 8 – Resposta à primeira questão de uma aluna do nível 3.

1- É primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.

*Sim, estou muito feliz e grata pela oportunidade, no PIC aprendi mais de uma forma diferente, e que nos estimula a pensar e achar soluções, é impressionante como para cada problema há sempre mais de uma solução, e que cada um acha uma diferente das dos demais*

Fonte: Arquivos do autor

Portanto, impressionante como para cada problema há sempre mais de uma solução e cada um acha uma diferente das dos demais”)

Na Figura 8, encontra-se o registro de uma aluna do nível 3, no qual ela destaca o quanto acha interessante que para um único problema, existem diversos métodos de resolução e é exatamente isso que faz com que esse método de ensino seja tão rico.

Como é possível observar na Figura 9, um dos participantes do projeto destacou o fato de haver a plataforma *online*, na qual eles devem realizar a tarefa *online*, além de também poderem conversar com alunos e professores do Brasil todo a fim de trocarem conhecimento e discutirem os mais diversos assuntos e problemas matemáticos. Essa ferramenta *online* de fato é algo muito interessante, já que estimula os alunos a estudarem durante a semana em suas casas e permite que eles tirem possíveis dúvidas sem ter de esperar necessariamente o próximo encontro presencial.

Figura 9 – Registro de um aluno do nível 2.

1- É primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.

*Sim, a minha experiência até este momento é que é um ótimo jeito de aprender e aprimorar seus conhecimentos na matemática e onde podemos participar online, o que ajuda muito, além de*

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta de um aluno na Figura 9: “Sim, a minha experiência até este momento é que é um ótimo jeito de aprender e aprimorar seus conhecimentos na matemática e onde podemos participar online, o que ajuda muito”)

Um ponto destacado por outra aluna (Figura 10) é o fato do programa ocorrer dentro de uma faculdade, dando a oportunidade para que os alunos tenham um contato inicial com o ambiente acadêmico. Eles passam a entender melhor o que ela representa e os benefícios que pode trazer para a comunidade local. Isso é algo extremamente importante, visto o panorama geral que o nosso país se encontra, com tantos cortes na área da educação, desinformação desenfreada que tem sido compartilhada através de inúmeras notícias falsas a respeito do trabalho e da pesquisa realizadas por milhares de alunos de graduação, mestrado e doutorado de instituições federais e estaduais.

Figura 10 – Resposta de uma aluna do nível 3.

1- É primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.

*Sim. Entrar em uma faculdade para fazer um programa de iniciação científica é algo inovador, aprender novos conteúdos que raramente são expostos de maneira breve nas escolas, é muito bom, pois acredito que todo esse conhecimento adquirido no PIC fará com que eu passe em muitas olimpíadas que me ajudarão a ingressar em uma faculdade futuramente. Novos desafios matemáticos são propostos em todas as aulas, novos conteúdos são ensinados.*

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta da aluna na Figura 10: “Sim. Entrar em uma faculdade para fazer um programa de iniciação científica é algo inovador, aprender novos conteúdos que raramente são expostos de maneira breve nas escolas, é muito bom, pois acredito que todo esse conhecimento adquirido no PIC fará com que eu posse em muitas olimpíadas que me ajudarão a ingressar em uma faculdade futuramente. Novos desafios matemáticos são propostos em todas as aulas, novos conteúdos são ensinados.”)

Um dos alunos disse, que apesar de gostar do programa, não gosta do horário do programa, conforme a Figura 11. Esse ponto talvez fosse necessário ser revisto, visto que os encontros geralmente ocorrem das 8h às 12h, com um pequeno intervalo de vinte minutos para que os alunos possam lanchar. Há alunos que não sofrem tanto com o horário de início dos encontros, pois além de morarem na cidade de Sorocaba, os pais os levam de carro até o local. Outros, porém, por mais que morem na cidade, dependem do transporte público, o qual não possui muitos horários até a Universidade aos sábados. Dessa forma, esses alunos são obrigados a acordar até duas horas antes do início do PIC. Há participantes ainda que

moram em outras cidades, ocasionando um tempo maior de deslocamento até a UFSCar. Por conta dessa questão de deslocamento até o polo do programa, seria interessante discutir um horário alternativo para a realização dos encontros.

Figura 11 – Comentário de um aluno com relação ao horário de início dos encontros.

1- É primeira vez que você participa do programa? Se sim, relate brevemente sua experiência até agora, se não, relate sua experiência de um modo geral.

Sim, muito divertido e interessante, só é triste acordar as 7:00 no sábado

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta do aluno na Figura 11: “Sim, muito divertido e interessante, só é triste acordar as 7:00 no sábado”)

Somente um dos alunos que responderam o questionário já havia participado do PIC anteriormente e ele disse que os problemas apresentados, por vezes, são repetitivos, como pode ser observado na Figura 12. Entre uma edição e outra, existem assuntos iguais, o que pode ser um problema, já que é possível que alunos participem do mesmo nível durante dois ou três anos seguidos. Quando isso acontece, os organizadores e professores do PIC devem estar atentos ao fato, modificando assim as situações problemas e os exercícios apresentados. Talvez, uma outra solução fosse criar outros níveis entre os já existentes, para que assim os alunos que já participaram anteriormente possam continuar aperfeiçoando seus conhecimentos matemáticos de forma crescente, sem ter de estudarem os mesmos assuntos seguidas vezes. A Figura 12 mostra a resposta desse aluno.

Figura 12 – Resposta de um aluno que já participou anteriormente.

3- Para os alunos que estão participando no mesmo nível novamente: você acha os assuntos repetitivos ou há coisas diferentes (problemas diferentes, modo da aula diferente)?

Os exercícios são um pouco repetitivos, mas o modo de ensinar é diferente que é muito bom para resolver problemas de formas diferentes

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta do aluno na Figura 12: “Os exercícios são um pouco repetitivos, mas o modo de ensinar é diferente que é muito bom para resolver problemas de formas diferentes”)



Com relação aos conteúdos, alguns deles, talvez, pudessem ser estudados na escola previamente. Os seguintes temas foram mencionados: paridade, razão e proporção, frações, equações de 1º grau, divisão Euclidiana, sequências numéricas, contagem e função. Alguns alunos responderam que nunca haviam estudado nenhum dos assuntos trabalhados até então, enquanto outros responderam que apesar de já terem estudado alguns dos tópicos, o fizeram de maneira simples e não aprofundada como ocorreu no PIC. Veja na Figura 13:

Figura 13 – Segunda questão respondida por um aluno do nível 2.

2- Você já estudou algum dos assuntos apresentados no programa na escola? Se sim, quais deles?

*Não do modo que é ensinado aqui; sempre via de um modo mais simples*

Fonte: Arquivos do autor

(Resposta do aluno: “Não do modo como é ensinado aqui, sempre via de um modo mais simples.”)

O questionário foi entregue no primeiro semestre do ano, ou seja, na primeira parte do projeto, sendo assim eles haviam tido alguns poucos encontros, deste modo, não haviam estudado todos os conteúdos programados. Os assuntos estudados por eles até a entrega das perguntas foram:

- Nível 1: paridade, operações com inteiros, frações, razão e proporção
- Nível 2: paridade, sistema decimal, divisão euclidiana, padrões numéricos
- Nível 3: álgebra, função, contagem e probabilidade.

A Tabela 2 mostra quais foram os conteúdos que os alunos acharam que foi melhor desenvolvido até aquele momento. É possível notar que Paridade é o assunto que foi mais escolhido, talvez por ser um assunto que normalmente não é tratado de forma direta nas escolas, além de ser um tópico extremamente interessante, tendo muitas aplicabilidades. Houve 7 alunos que não opinaram, uns por acreditarem que todos os assuntos foram muito bem trabalhados então seria impossível escolher um “melhor”. Outros alegaram que por não terem estudado todos os assuntos do Programa, visto que estavam no início do mesmo, não poderiam escolher. Dentre os assuntos trabalhados no nível 3, o que mais os interessou

foi o de anagramas e combinação. Acredito que isso aconteceu por conta da abordagem desses assuntos, já que, usualmente, são trabalhados através de fórmulas, as quais não são demonstradas, ocasionando assim uma barreira entre os temas, suas aplicabilidades e os alunos.

Tabela 2 – Escolha dos alunos do assunto melhor desenvolvido.

Assunto	N1	N2	N3
Paridade	1	10	-
Razão e Proporção	2	-	-
Padrões matemáticos	-	1	-
Aritmética	-	1	-
Sequência	-	1	-
Álgebra	-	1	-
Divisão Euclidiana	-	1	-
Contagem e probabilidade	-	1	1
Função	-	-	1
Anagramas e combinação	-	-	3
Não opinou	-	6	1
Total	3	22	6

Fonte: Arquivos do autor

## 5.2 EXPERIÊNCIA DOS PROFESSORES

Um questionário também foi entregue aos professores participantes da 13<sup>a</sup> edição do PIC, em 2018, do polo de Sorocaba. Os professores que responderam essa lista de indagações e sugestões eram de ambos os PICs, Virtual e Presencial, sendo que as respostas condizem com a realidade das duas modalidades do programa. As perguntas feitas foram as seguintes:

- Você tem sugestões para melhorar a programação acadêmica de cada ciclo e de cada um dos níveis N1, N2 e N3 do PIC? Quais conteúdos podem ser acrescentados, retirados, modificados? Explique.
- Qual a sua sugestão para diminuir a evasão dos alunos durante o programa?
- Qual o material disponibilizado pelo PIC que mais te agradou por ser o mais coerente com a curva de aprendizado dos alunos? E o pior?

- Sugestões, críticas, elogios ou quaisquer comentários adicionais. Utilize este espaço para acrescentar informações que não foram contempladas nas questões do questionário e também para apresentar detalhes específicos.

Uma das sugestões feitas pelo professor do PIC Virtual foi a de que, talvez, fosse necessário dividir o encontro semanal de duração de quatro horas em dois encontros, de duas horas cada, já que ele observou que os alunos se cansavam e não tinham aproveitamento total da aula, mesmo havendo uma pausa durante esse tempo. Os alunos do virtual tem uma certa vantagem com relação aos alunos do presencial nesse aspecto, já que há uma maior flexibilidade na determinação dos horários e dias de encontros. Porém, ao mesmo tempo em que isso acontece, existe a dificuldade em fazer com que os horários de todos os alunos se encaixem, visto que em uma mesma turma virtual, existem alunos de todas as regiões do Brasil, sendo assim, há alunos em diferentes fusos horários.

Com relação a evasão de alunos, todos os professores deram possíveis razões para as quais isso ocorre, apesar de todos concordarem ser difícil determinar uma causa específica para esse acontecimento. O professor responsável pela turma virtual apontou a dificuldade que teve em se comunicar com alguns alunos, por exemplo, no momento de determinar os dias e horários de encontro. Muitos alunos enviavam mensagem solicitando a troca de dia ou de horário caso não fosse possível para eles no que havia sido combinado, assim o professor poderia tomar as medidas cabíveis e fazer as trocas. Em contrapartida, muitos alunos nem sequer respondiam os e-mails ou participavam de um ou dois encontros e logo paravam de participar das atividades. A sugestão dele para resolver esse problema é a de que haja uma comunicação direta entre esses alunos e seus responsáveis e os organizadores do projeto, a fim de que haja um esclarecimento dos motivos pelos quais eles desistiram do programa. Já a professora do PIC Presencial destacou a questão da divisão dos alunos nos níveis do programa, falando da dificuldade de alguns alunos de se adaptarem aos níveis designados a eles:

“Acredito que existem vários motivos para que os alunos desistam do programa, uma delas talvez seja o modo de classificação por nível feito pela OBMEP. Existem alunos, por exemplo que estão no nível 1 sendo que seu conhecimento matemático permitiria que estivessem no nível 2, alunos do N2 que poderiam estar no N3 e em alguns outros casos o inverso acontece: alunos que estão em

níveis mais avançados aproveitariam melhor seus estudos se estivessem em níveis mais baixos. Isso poderia ser resolvido ao se pensar em outro modo de classificação, talvez a OBMEP pudesse fazer essa pré-classificação e o professor, em um ou dois encontros, observar se o aluno está de fato no ciclo em que poderá trabalhar todo seu potencial.”

Em relação a opinião dos professores a respeito do material sugerido pelo PIC que mais lhes agradou, tanto a professora da turma de N1 e N2, quanto o professor do virtual, destacaram o tópico de contagem que, através de listagens e árvores de possibilidades, foram trabalhados com os alunos do N1. Eles têm essa opinião pelo fato de no material disponibilizado haver texto introdutório que apresentava conceitos, nunca estudados pelos alunos (tais como os princípios aditivos e multiplicativos), de forma prática e didática, com vários exemplos resolvidos, o que tornou a aprendizagem do tópico mais clara e fácil. Este texto introdutório encontra-se no Anexo A. Já o plano de aula que menos agradou a professora do N1 e N2 foi aquele direcionado aos alunos do N2 que tratava de probabilidade. Esse material era justamente o contrário do descrito anteriormente. Ou seja, os problemas propostos não possuíam um grau constante e crescente de dificuldade, ou seja, havia exercícios e problemas simples e outros extremamente difíceis, sem um meio termo entre eles. Como a maioria dos alunos nunca havia estudado o assunto, esse foi um complicador para o processo de aprendizagem. O professor do virtual criticou o tema de geometria, já que as questões propostas não eram bem programadas, em termos de progressão de dificuldade. Isso é um agravante ao que já é realidade para muitos alunos, os quais nunca exploraram o tema de maneira devida nas escolas. A seguir um comentário feito pelo Professor do PIC Virtual sobre um assunto que os alunos geralmente gostam:

“Um assunto que geralmente é mais bem aceito pelos alunos, mas que ultimamente não vejo que tem trabalhado muito bem com uma boa progressão de dificuldade de exercícios é Teoria dos Números. Talvez por explorar a aritmética e um pouco de álgebra, os alunos se sintam mais à vontade com o tema, mas creio que a lista poderia ser mais bem embasada, por isso, muitas vezes inseria outros exercícios do banco de questões ou livros do PIC para atenuar.”

No geral, os professores têm uma visão muito boa do programa, acreditam que

além de ser um ótimo incentivo aos alunos contemplados, ele também os auxiliou em sua formação como professores, sendo uma ótima experiência docente. Certamente que há mudanças que devem ser realizadas a fim de que o programa se expanda e alcance um maior número de alunos, com uma qualidade excelente de ensino. Isso pode ser atestado através da seguinte declaração de um dos Professores:

“Acho o programa muito bom, uma prática saudável e que é um verdadeiro investimento social e educacional para os jovens e toda a sociedade. Torço para que apesar de um quadro político desfavorável à educação, o programa permaneça e se expanda.”

### 5.3 EXPERIÊNCIA PESSOAL COMO PROFESSOR DO NÍVEL 3

Como mencionado anteriormente, atuei como professor do PIC presencial para alunos do nível 3. Farei um relato das minhas impressões e opiniões a respeito do programa, para tanto as perguntas entregues aos professores serão norteadoras para a explanação da minha experiência.

Como descrito anteriormente, uma das responsabilidades dos professores é a sua participação nos encontros de formação, reunião com o coordenador do programa daquele polo e com os outros professores. No ano de 2018 houveram paralisações de nível nacional e também paralisações no campus da UFSCar-Sorocaba, local de encontro do programa e isso atrapalhou o andamento do programa. Em um determinado período, não era possível realizar os encontros com os alunos na universidade, sendo assim, alguns encontros foram adiados até se encontrar outro local para que as aulas pudessem ser retomadas. Com todos esses empecilhos externos, os encontros de formação também foram prejudicados e não conseguimos nos reunir com a frequência que se deveria.

No nível 3 foi enfrentado um grande problema, a discrepância de conhecimento entre os alunos participantes, pois havia alunos que além de estarem em diferentes séries escolares, muitos já haviam participado do programa outras vezes e outros participavam pela primeira vez. Esse mesmo fato ocorreu também com professores de outros níveis. Isso atrapalhava todo o andamento da aula e até mesmo o rendimento dos alunos, como mencionado pela professora dos níveis 1 e 2. Para que este contratempo fosse contornado, na maioria dos encontros, primeiramente perguntava aos alunos se eles já haviam estudado

um determinado assunto. Normalmente, haviam respostas afirmativas e negativas. Portanto, dependendo dos problemas propostos pelos organizadores do Projeto, entregava-se a lista de problemas e deixava-os tentando resolvê-la, orientando-os quando necessário. Porém, em alguns encontros a lista de problemas propostos não era muito bem elaborada. Não havia um crescimento constante de dificuldade entre um problema e outro, por vezes exigindo um raciocínio avançado logo nos primeiros problemas, tornando suas resoluções praticamente impossíveis para alunos que nunca haviam estudado o assunto. Quando isso ocorria, buscava-se fazer uma explicação do assunto de forma que o raciocínio dos alunos continuasse sendo instigado, trazendo problemas mais simples e com um crescente grau de dificuldade. Indagando os alunos e também explicando a eles os porquês matemáticos do tema estudado.

Os assuntos que mais me agradaram foram os de Teoria dos Números: paridade, critérios de divisibilidade, divisão euclidiana, máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC). Isto se deve ao fato de a aula ter sido mais prazerosa aos alunos, visto que a teoria não era muito complexa e exigia mais do raciocínio lógico do que conhecimento aprofundado no conteúdo. Ou seja, todos os tópicos mencionados não requisitavam uma bagagem teórica complexa. Nas aulas que trataram desses assuntos, houve um trabalho mais homogêneo entre os alunos, pois utilizavam o raciocínio para solucioná-los e não simplesmente conhecimento específico de algum assunto. A Figura 14 é um exemplo de problema que utiliza de raciocínio lógico.

Figura 14 – Problema que exige raciocínio lógico.

**Exercício 2 (Questão 15 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):**

O *contrário* de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é soma de um número de dois algarismos com seu contrário?

- A) 44
- B) 99
- C) 121
- D) 165
- E) 181

Problemas que envolvem geometria normalmente exigiam um conhecimento prévio do aluno, já que esse ramo da matemática é regido por diversos axiomas e teoremas. Nos encontros em que se trabalhou o tema, os alunos demonstraram que possuíam um nível elevado de dificuldade, principalmente ao se estudar sobre círculos. Porém, como todos

os alunos já haviam estudado o assunto na escola, mesmo os problemas propostos sendo difíceis, muitos deles foram resolvidos.

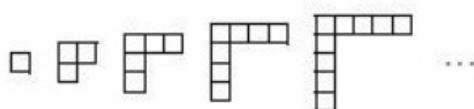
Os conteúdos relacionados a Progressão Aritmética (PA) e a Progressão Geométrica (PG), apesar de serem mais simples que os da geometria, não haviam sido estudados pelos alunos que estavam no 1º ano do ensino médio. O que os impedia de resolvê-los era o fato dos problemas propostos exigirem um conhecimento prévio desses assuntos. Este problema talvez pudesse ser contornado se este assunto tivesse sido colocado para ser trabalhado nos últimos encontros do programa, visto que PA e PG são assuntos que normalmente são abordados no segundo semestre do 1º ano do Ensino Médio. Dessa forma, por mais desafiadores que os problemas podiam parecer, todos os alunos já possuiriam um certo grau de familiaridade com o tema.

A Figura 15 é o primeiro problema proposto para o encontro de PA e PG e mostra exatamente a crítica que fiz quanto ao nível de dificuldade dos problemas apresentados. Sua solução é observada na Figura 16, a qual utiliza da fórmula a soma de termos de uma PA.

Figura 15 – Primeiro problema proposto sobre PA.

**Exercício 1 (Problema 2.1 – Círculo Matemático de Moscou):**

Eis uma série de figuras:



A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura?  
Quantos quadrados há ao todo nas 100 primeiras figuras?

A soma dos 100 primeiros termos dessa PA é algo nada intuitivo. Seria interessante que os primeiros problemas apresentassem progressões com um número pequeno de elementos, algo que pudesse ser resolvido mentalmente e, gradativamente, iria-se aumentando o nível de dificuldade para os alunos. Para contornar este problema, ele foi entregue aos alunos que já haviam estudado o tema, para que tentassem solucioná-lo, a partir de seus próprios conhecimentos. Por outro lado, para os alunos que nunca haviam ouvido falar de PA e PG, ou que tinham dúvida sobre o assunto, uma aula diferenciada foi preparada.

O material escrito disponibilizado no Portal da Matemática, assim como as diversas vídeo aulas lá contidas foram utilizadas na preparação deste encontro, buscando-se sempre trazer problemas com um nível de aumento gradativo de dificuldade. A aula foi muito

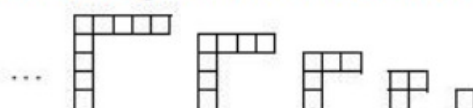
Figura 16 – Solução do primeiro problema proposto sobre PA.

**Solução do Exercício 1:**

Há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais que na anterior. Logo, podemos representar essa sequência por  $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1$  (a sequência de números naturais ímpares). A centésima figura terá  $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$  quadrados. Para saber quantos quadrados há no total basta calcular a soma de uma progressão aritmética e obtemos o número total de quadrados:

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (a_1 + a_{100})}{2} = \frac{100 \cdot 200}{2} = 100^2 = 10000.$$

Podemos também considerar os diagramas em ordem inversa:



Note que a primeira figura (que agora é a última) cabe na segunda (penúltima, agora) para formar um quadrado  $2 \times 2$ . Tudo isso cabe dentro da próxima figura para formar um quadrado  $3 \times 3$ , e assim por diante. Logo as 100 primeiras figuras juntas formam um quadrado  $100 \times 100$ , que contem  $100 \cdot 100 = 10000$  pequenos quadrados.

produtiva, com todas às fórmulas de progressões demonstradas, porém, para se fazer isso, todo o tempo do encontro foi gasto, impossibilitando, por consequência, o uso dos problemas propostos pelos organizadores do PIC para esses alunos.

O programa é uma excelente oportunidade para os alunos aprofundarem seus conhecimentos matemáticos e desenvolverem, ainda mais, suas habilidades na disciplina. Apesar da quantidade de material disponibilizado pelos organizadores do programa ser imensa, tanto para apoio do professor quanto dos alunos, algo elogiável, pois os muitos exercícios, problemas, vídeo aulas, textos explicativos e chats ajudam, em muito, ambas as partes, muitas vezes os problemas não apresentam um grau crescente de dificuldade. Se esse ponto fosse modificado, o aproveitamento por parte dos alunos aumentaria bastante.

Passemos agora a fazer uma análise comparativa entre uma aula ministrada no PIC e outra, de conteúdo matemático idêntico, ministrada em uma sala de aula de uma escola pública.



## 6 COMPARAÇÃO ENTRE UMA AULA DO PIC E DO ESTADO

Durante a graduação, houve a oportunidade de participar do Programa de Iniciação a Docência (PIBID) que era realizado em uma escola pública e, além disso, as disciplinas de estágio também foram realizadas em uma escola do estado, ambas localizadas na cidade de Sorocaba, SP. Com isso, percebi diferenças entre o interesse dos alunos das escolas e dos alunos do PIC. Entre as mais relevantes, se dá o fato de que alunos que frequentam as aulas do PIC vão, em sua maioria, por vontade própria, já tendo um interesse diferenciado pela Matemática.

Esse interesse diferenciado pode decorrer de uma maior facilidade com a disciplina, como também pelo incentivo que grande parte deles recebe de seus responsáveis, que normalmente acompanham o seu desempenho tanto na escola quanto no Projeto. O Programa tenta dar um estímulo a mais para estudantes de escolas públicas, com uma pequena bolsa, que pode até ser considerada uma ajuda de custo para bancar o transporte até o local dos encontros.

Os alunos são convidados a participar do PIC a partir do resultado obtido na prova da OBMEP, não sendo eles obrigados a participar da mesma. Alguns, inclusive, vão à alguns encontros e depois desistem. Isso é um diferencial com relação à participação dos alunos na escola, que são obrigados a estudar a disciplina o que, por vezes, os desestimula. Não é tão agradável estudar algo que não se gosta ou que se tem dificuldade. Sabe-se da importância da matemática na vida dos alunos, esse comentário não veio para dizer que matemática deveria ser uma disciplina optativa e sim, constatar que esse é um dos motivos possíveis para explicar o desinteresse dos alunos, além é claro, da cultura incutida de que a Matemática é chata e difícil.

Há muitas semelhanças entre os conteúdos abordados no Programa e os conteúdos dispostos no Currículo do Estado de SP. As semelhanças, dependendo do assunto tratado, terminam por aí, visto que além de alguns temas não serem abordados durante o Ensino Médio, por conta do extenso o Currículo desse ensino (conteúdo de três anos), há também a questão da metodologia de trabalho em sala de aula, ou seja, enquanto que no PIC a Resolução de Problemas é o fio condutor para o processo de ensino e aprendizagem, na

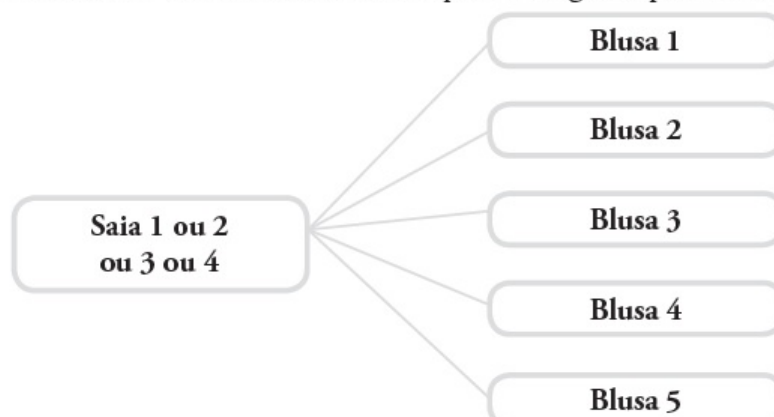
escola, geralmente o que se vê é a velha tríade “Teoria, Exemplo, Exercícios”.

No início desse trabalho, as escolas estaduais de São Paulo utilizavam o chamado “Material de Apoio Ao Currículo do Estado de São Paulo”, também conhecido como “Cadernos do Aluno” e “Caderno do Professor”. No ano de 2019, esse material deixou de ser distribuído pelo governo do Estado, cabendo às escolas e seus respectivos professores de Matemática escolherem o livro didático a ser utilizado. Como esse material foi utilizado durante vários anos e talvez possa ser reutilizado futuramente, será feita uma comparação entre a maneira de abordagem de um conteúdo nesses cadernos e no roteiro de estudo sugerido para os encontros do PIC. O assunto que escolhi para ser comparado foi o de “Contagem”.

Figura 17 – Primeiro exercício da Situação de Aprendizagem de Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo do caderno do aluno.

### Construindo árvores de possibilidades

1. Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa, e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha de:



Escreva uma multiplicação para indicar o total das diferentes possibilidades de escolha da menina.

Figura 18 – Primeiro exercício proposto para o encontro 1 do Ciclo 2 do nível 3 no PIC.

#### Exercício 1 (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

É possível observar uma discrepância entre o nível de dificuldade das duas primeiras questões de cada material. Ambas situações para serem resolvidas se utilizam do Princípio Multiplicativo. Na situação proposta pelo Caderno do Aluno é apresentado uma árvore de possibilidades, facilitando a visualização de sua solução. Por outro lado, na situação proposta no material do PIC, cabe ao aluno visualizar e tentar sistematizar tal solução.

Já os problemas apresentados a seguir possuem uma semelhança maior, visto terem o mesmo grau de dificuldade em suas resoluções.

Figura 19 – Segundo exercício da Situação de Aprendizagem de Análise Combinatória: Raciocínios Aditivo e Multiplicativo do caderno do aluno.

2. Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por “Cidades Históricas de Minas Gerais”, formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:
  - a) Ouro Preto sempre fizer parte do roteiro?
  - b) não houver restrição à escolha das duas cidades?

Figura 20 – Segundo exercício da proposta para o encontro 1 do Ciclo 2 do PIC.

**Exercício 2 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):**

Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

O restante das situações propostas pelo Caderno do Aluno e também pelo material do PIC estão nos anexos B e C, respectivamente. Nota-se que ambos os materiais propostos são norteados pela metodologia de Resolução de Problemas, não “entregando” nada pronto aos alunos, sem fórmulas descritas previamente. Cabe ao professor apresentar os problemas e fazer indagações que levem os alunos a encontrarem as resoluções. A partir delas, descreverem um certo tipo de comportamento e assim estabelecem regras que serão válidas para todos os tipos de situações que estão sendo estudadas.

A partir da metodologia adotada para abordar os conteúdos básicos da análise combinatória e da probabilidade, espera-se que ao final desta etapa do trabalho previsto para a 2ª série do Ensino Médio os alunos sejam capazes de aplicar o raciocínio multiplicativo à resolução de situações-problema envolvendo agrupamentos. Nesse sentido, enfatizamos que o estímulo à clássica categorização dos problemas em tipos – permutações, arranjos e combinações – e, conseqüentemente, o uso de fórmulas matemáticas, não devem ser tomados como preocupação central nesse momento da resolução de problemas. O principal é que, ao enfrentar situações-problema envolvendo análise combinatória, os alunos sejam inicialmente estimulados a mobilizar as mais diferentes estratégias de raciocínio para que, a seu tempo, escolham aquelas que consideram eficientes e apropriadas a cada nova situação. (GRANJA et al., 2014)

Na experiência que tive durante o PIBID e também durante o estágio, não pude notar a metodologia baseada na Resolução de Problemas aplicada dentro de sala de aula. Credito isso a um aglomerado de fatores, dentre eles:

1. A imensa dificuldade que os Professores têm de trabalharem em sala de aula com um grande número de alunos. Muitos dos quais possuem grandes dificuldades na disciplina, visto nunca terem estudado de maneira apropriada e, infelizmente, muitos se sentem obrigados a isso.
2. A falta de preparo e resistência dos Professores mediante mudanças. A maioria de nossos Professores está acostumado a apresentar fórmulas e métodos de resolução e depois aplicar exercícios de fixação, não tendo assim muito “trabalho” na preparação de suas aulas. Já, a metodologia de Resolução de Problemas não é algo tão simples de ser conduzida. Ela se baseia em mudanças, variações e questionamentos. Cada turma reage diferentemente a ela, o que exige do Professor domínio de conteúdo, prática e dedicação no preparo das aulas.

Implementar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação em Matemática baseada na Resolução de Problemas, exige mudar o papel do aluno e do Professor em sala de aula. Isso pode ter uma certa resistência de ambas as partes, já que todos estão acostumados com o jeito “convencional” de se dar aula, mas se dada uma chance, os resultados serão excelentes. Muitos autores que abordam o tema, destacam algumas vantagens do método: a matemática passa a ter sentido para os alunos, eles são capazes de pensar matematicamente, sua confiança e autoestima aumentam, pois passam a acreditar que conseguem raciocinar matematicamente. Dessa forma, quando o professor formaliza os conceitos e teorias matemáticas, grande parte delas é assimilada (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004), (WALLE, 1998).

É exatamente isso que ocorre durante todo o PIC: ao mesmo tempo que o Professor ensina, o aluno tem de estar ativo, participando e aprendendo junto. Não é só o Professor que avalia o desenvolvimento dos alunos, eles próprios analisam seus métodos e soluções obtidas para as situações-problema sendo investigadas, visando sempre a construção do conhecimento. O professor, como mediador, avalia se o que está ocorrendo dentro da sala de aula deve ser mantido ou alterado. O foco da metodologia de Resolução de Problemas

é que a partir da solução encontrada, os alunos possam fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e conteúdo.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como especificado na introdução desse TCC, foram dois os seus objetivos centrais:

1. analisar, discutir e criticar, positiva e negativamente, o PIC, do ano de 2018, no qual atuei como Professor de uma turma de nível 3, segundo os aspectos: seus objetivos, os participantes, as diferenças entre as aulas presenciais e virtuais, os materiais utilizados, a dinâmica das aulas e, por fim, as responsabilidades dos alunos e Professores participantes;
2. destacar as influências da participação nesse trabalho sobre a minha formação de futuro Professor de Matemática do Ensino Básico brasileiro.

Buscando apontar minhas críticas e sugestões à Coordenação local e nacional do PIC e sua influência sobre a minha formação de futuro Professor de Matemática, do Ensino Básico brasileiro, afirmo que:

- Desde a criação da OBMEP em 2005, ela trouxe resultados positivos para milhões de alunos, pois despertou a curiosidade e o interesse de muitos deles pela Matemática. Sua proposta metodológica baseada na Resolução de Problemas com os alunos é diferente da proposta existente dentro da maioria das escolas. Com problemas interessantes e relacionáveis, os quais muitas vezes tratam de situações cotidianas envolvendo matemática, a olimpíada chama a atenção dos estudantes. Com isso, mesmo os Professores são beneficiados, já que o interesse e atenção dos alunos aumenta, incentivando-os a estudar a disciplina, o que, por consequência, auxilia o trabalho de nós educadores nas escolas brasileiras.
- Apesar da OBMEP tratar a Matemática de um jeito diferenciado, as questões que são apresentadas por muitas vezes utilizam de raciocínios repetitivos, principalmente os problemas apresentados durante o PIC. Inicialmente, eles possuem certa eficiência, mas logo suas resoluções tendem a utilizar os mesmos raciocínios, tornando os encontros do PIC pouco cansativos para os alunos de alta multiplicidade, ou seja, alunos que já participaram de várias edições do Programa. Foi possível observar

essa diferença entre os alunos: aqueles que nunca haviam participado do Programa, tiravam um maior proveito dos problemas propostos, enquanto que os alunos que já haviam participado do Programa, muitas vezes, não tinham que resolver problemas, mas sim exercícios, pois já haviam estudado problemas com resoluções e linhas de raciocínio similares.

- Uma outra dificuldade enfrentada durante o Programa foi a divisão dos alunos nos Níveis existentes e utilizados também pela OBMEP, ou seja:
  - Alunos do 7º ano participam do nível 1;
  - Alunos do 8º e 9º anos participam do nível 2; e,
  - Alunos do Ensino Médio participam do nível 3.

Esta classificação não necessariamente condiz com o conhecimento do aluno ou a facilidade que alguns deles tem com a disciplina, o que torna as salas mistas no que diz respeito a capacidade matemática dos alunos em cada um dos níveis, dificultando o trabalho dos Professores e atrapalhando o desenvolvimento do potencial de cada um dos alunos. Aqueles com mais dificuldade, por vezes, se sentem desestimulados, ou mesmo, intimidados pelos outros e os com uma maior facilidade não conseguem evoluir como esperado.

- Em uma época em que as universidades públicas e a ciência brasileira vêm sofrendo diversos cortes orçamentários, além das mais diversas perseguições e difamações, as competições matemáticas e os programas relacionados a elas são de extrema importância para a propagação, não só da Matemática, mas da ciência no âmbito geral. Portanto, é imprescindível a continuação de projetos como o PIC, com suas devidas melhorias.
- O material disponibilizado para o estudo não somente dos alunos, como também dos Professores, é de excelente qualidade, abrangendo dos mais diversos assuntos de uma maneira muito aprofundada, auxiliando o Professor no preparo de suas aulas e os alunos a tirarem suas dúvidas de forma independente. Entretanto, algumas das situações-problema propostas para estudo deveriam ser modificadas, de forma que houvesse uma cadência mais regular em seu grau de dificuldade, tornando assim, provavelmente, o aproveitamento dos alunos ainda maior.

- Outro ponto que melhoraria o Programa ainda mais seria criar mais níveis entre os já existentes, para que os alunos pudessem estar em turmas onde poderiam utilizar os seus conhecimentos de maneira mais adequada, ou talvez modificar a forma de classificação dos alunos nos Níveis já existentes, considerando não somente o ano acadêmico em que estão, mas também seus desempenhos nos primeiros encontros de trabalho. Isso traria mais responsabilidade aos Professores, mas, em compensação, os alunos poderiam ter um melhor desempenho nas atividades propostas.
- Especificamente a respeito da influência de minha atuação no PIC sobre a minha formação profissional, de professor de Matemática, foi de fundamental importância compreender que a metodologia baseada na Resolução de Problemas não é comumente utilizada em salas de aula devido a vários fatores: o grande número de alunos, muitos dos quais com grandes dificuldades em Matemática; a falta de preparo, matemático e pedagógico, dos professores e sua resistência às mudanças; ao mesmo tempo em que o professor ensina, o aluno tem que estar ativo, participando e aprendendo junto; o professor deve sempre visar a “Construção Individual do Conhecimento” de seus alunos; finalmente, o professor deve atuar como um verdadeiro mediador em sala de aula, avaliando o que nela está ocorrendo e, se necessário, propor modificações.



## REFERÊNCIAS

- CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. Encontros de aritmética. *Apostila do PIC OBMEP*, 2015.
- CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. Encontros de geometria. 2015.
- CARVALHO, P. C. P. Métodos de contagem e probabilidade. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA*, 2006.
- CNPQ. *Iniciação Científica*. 2013. <<http://memoria.cnpq.br/web/guest/iniciacao-cientifica>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.
- COELHO, M. d. S. Uma experiência com o pic-obmep (programa de iniciação científica da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas). Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016.
- DORICHENKO, S. Círculo matemático Moscou: Problemas semana a semana. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA*, 2016.
- FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos matemáticos: A experiência russa. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA*, 2010.
- GRANJA, C. E. d. S. C. et al. *Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino médio, 2ª série/Secretaria de Educação; [S.l.] : São Paulo : SE*, 2014.
- HOLANDA, B.; CHAGAS, E. A. Círculos de matemática da obmep - volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA*, 2018.
- IMPA. *O POTI*. 2016. <<http://poti.impa.br/>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.
- INEP. *Inep Data*. 2015. <<http://inep.gov.br/inep-data>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.
- MEZA, E. dos S.; PEREIRA, M.; PERUZZO, J. F. Os programas pic e obmep na escola na uepg. 15º CONEX, 2017.
- MONTEIRO, S. et al. Pic obmep jr: experiência em uma escola estadual do rio grande do sul. Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 2017.
- OBMEP. *Regulamento da OBMEP*. 2016. <<http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.
- OBMEP. *OBMEP em números*. 2017. <<http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.
- OBMEP. *Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)*. 2017. <<http://www.obmep.org.br/pic.htm>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.

OBMEP. *Sobre o PICME - Informações aos medalhistas*. 2017. <<http://picme.obmep.org.br/>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.

OBMEP. *OBMEP na Escola*. 2018. <<http://www.obmep.org.br/na-escola.htm>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.

ONUCHIC, L. d. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, p. 212–231, 2004.

SBM. *Quem somos - Histórico*. 2017. <<https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>>. Acesso em: 14 de setembro de 2019.

WAGNER, E. Teorema de pitágoras e áreas. *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

WALLE, J. A. Van de. *Elementary and middle school mathematic: Teaching developmentally*. [S.l.]: ERIC, 1998.

## ANEXO A – PRINCÍPIO BÁSICO DE CONTAGEM - PIC

O princípio aditivo é utilizado cotidianamente quando fazemos uma contagem e a separamos em casos. Por exemplo, para contar quantos são os alunos que estão em uma sala de aula, podemos contar os meninos e podemos contar as meninas. O número de alunos na sala será a soma da quantidade de meninos e de meninas. Do mesmo modo, se temos uma pilha de cartas de baralhos e queremos contar essas cartas, podemos separar por naipe (paus, copas, espadas e ouros) e depois podemos somar as quantidades de cartas de cada naipe.

Para que esta contagem separada em casos esteja correta é necessário que:

- os casos cubram todas as possibilidades, ou seja, não se pode esquecer de contar nada que deveria ser contado.
- os casos devem ser disjuntos, ou seja, nada pode ser contado mais de uma vez.

Traduzindo estas condições para uma linguagem mais formal, o que está sendo dito é o seguinte: se temos um conjunto escrito como uma união de dois subconjuntos disjuntos, então a quantidade de elementos do conjunto dado é a soma das quantidades de elementos desses dois subconjuntos.

**Princípio Aditivo.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos disjuntos, isto é, conjuntos com interseção vazia. Se  $A$  possui  $m$  elementos e se  $B$  possui  $n$  elementos, então a união  $A \cup B$  possui  $m+n$  elementos.

Por exemplo, se desejamos contar quantos são os alunos em uma sala de aula, vamos representar por  $A$  o conjunto dos meninos e vamos representar por  $B$  o conjunto das meninas desta sala. É evidente que a sala de aula é a união  $A \cup B$ . Como a interseção  $A \cap B$  é vazia, então a quantidade de elementos em  $A \cup B$  é igual à soma da quantidade de elementos em  $A$  com a quantidade de elementos em  $B$ . Ou seja, é a quantidade de meninos mais a quantidade de meninas.

**Exemplo 1.** Quantos são os números inteiros entre 1 e 20 que são múltiplos de 3 ou múltiplos de 7?

*Solução.* Existem 6 múltiplos de 3 entre 1 e 20, a saber 3, 6, 9, 12, 15, 18 e existem 2 múltiplos de 7 neste conjunto, a saber 7, 14. Como esses conjuntos são disjuntos, então existem  $6+2=8$  múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 20.

**Exemplo 2.** Em uma escola, 153 alunos estudam pela manhã, outros 92 estudam a tarde e outros 136 estudam a noite. Quantos alunos desta escola estudam pela manhã ou à noite?

*Solução.* Pela manhã estudam 153 alunos e a noite estudam 136 alunos. Como são alunos diferentes, o total de alunos que estudam de manhã ou a noite é igual a  $153+136=289$ .

De outro modo o princípio aditivo também pode ser enunciado do seguinte modo.

**Princípio Aditivo.** Suponha que um evento  $X$  possa ocorrer de  $x$  maneiras possíveis e que um evento distinto  $Y$  possa ocorrer de  $y$  maneiras possíveis. Então  $X$  ou  $Y$  pode ocorrer de  $x+y$  maneiras diferentes.












O princípio aditivo enunciado logo acima pode ser generalizado para situações em que um conjunto está escrito como a união de mais de dois subconjuntos disjuntos. Por exemplo, esta pode ser a situação de uma pilha de cartas de um baralho. Podemos chamar de  $A$  o conjunto das cartas de paus, de  $B$  o conjunto das cartas de copas, de  $C$  o conjunto das cartas de espadas e de  $D$  o conjunto das cartas de ouros. Cada carta da pilha está em um desses conjuntos. Logo se contamos os elementos de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não esquecemos de contar nenhuma carta. Isto significa que a pilha de cartas é a união  $A \cup B \cup C \cup D$ . E como uma carta possui um único naipe, ou seja, como  $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$ , se contamos os elementos de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  então contamos cada carta uma única vez. Deste modo, a quantidade de cartas na pilha é a soma das quantidades de elementos dos conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

**Exemplo 3.** Maria é muito indecisa. Ela pretende sair com suas amigas e está pensando em qual roupa vestir. Ela pode combinar três blusas diferentes com duas saias diferentes. De quantas maneiras diferentes Maria pode se vestir?

*Solução.* Vamos representar por  $S_1$  e  $S_2$  as duas saias de Maria. Podemos listar todas as combinações possíveis.

- Se ela escolheu a saia  $S_1$ , então ela pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.
- De modo análogo, se ela escolheu a saia  $S_2$ , ela também pode se vestir de três modos diferentes, vestindo esta saia com cada uma das três blusas.

Então, pelo princípio aditivo, ao todo ela pode se vestir de  $3 + 3 = 6$  modos diferentes. Veja estas possibilidades na figura a seguir.

BLUSAS SAIAS			
			
			

*Comentário.* A resposta  $3 + 3 = 6$  também pode ser escrita como  $2 \times 3 = 6$ . Neste caso podemos raciocinar assim. Para a escolha da saia temos 2 possibilidades. Uma vez escolhida a saia, temos 3 blusas para escolher. Então ao todo temos  $2 \times 3 = 6$ , pois temos uma soma de duas parcelas iguais a três.

**Exemplo 5.** Quantos são os números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1,2,3 e 4?

*Solução.* Para resolver este problema podemos listar todas as possibilidades.

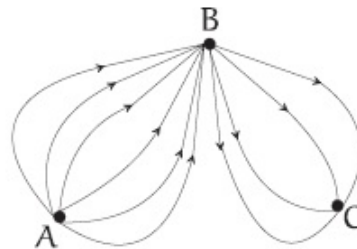
- Se o número começa com o algarismo 1 temos: 12, 13 e 14.
- Se o número começa com o algarismo 2 temos: 21, 23 e 24.
- Se o número começa com o algarismo 3 temos: 31, 32 e 34.
- Se o número começa com o algarismo 4 temos: 41, 42 e 43.

	1	2	3	4
1		12	13	14
2	21		23	24
3	31	32		34
4	41	42	43	

Então ao todo temos  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$  números possíveis.

*Comentário.* Do jeito como a solução foi organizada, a contagem de todas estas possibilidades também pode ser pensada assim. Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidades (são as quatro linhas da tabela). Uma vez escolhido este primeiro algarismo, sobram 3 possibilidades para a escolha do algarismo seguinte (são os números coloridos das três colunas em cada linha). Daí o total de possibilidades é igual ao produto  $4 \times 3 = 12$  pois temos uma soma de quatro parcelas iguais a três.

**Exemplo 6.** (Fomin, capítulo 2) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem seis estradas ligando A a B e quatro estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C?



*Solução.* Vamos numerar as cidades de A até B com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Vamos numerar as cidade de B até C também com números 1, 2, 3 e 4. E vamos representar um caminho de A até C, como por exemplo 5 – 3, em que pegamos a estrada 5 para ir de A até B e pegamos a estrada 3 para ir de B até C.

- Se a primeira estrada é a 1, então podemos fazer quatro percursos diferentes: 1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4.
- Se a primeira estrada é a 2, então também podemos fazer quatro percursos diferentes: 2 – 1, 2 – 2, 2 – 3, 2 – 4.

- De modo análogo se a primeira estrada é a 3, então também podemos fazer quatro percursos diferentes:  $3 - 1$ ,  $3 - 2$ ,  $3 - 3$ ,  $3 - 4$ .

Então para cada escolha da estrada de A até B, podemos fazer quatro percursos diferentes para sair de A e chegar até C. Como temos 6 escolhas de estradas de A até B, o número total de percursos de A até C é igual a  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 6 \times 4 = 24$ .

As resoluções destes três primeiros exemplos são aplicações do princípio multiplicativo, que nada mais é do que a interpretação de multiplicação de números inteiros como uma maneira resumida de escrever uma soma de parcelas iguais.

**Princípio multiplicativo.** Se uma decisão  $D_1$  pode ser tomada de  $p$  modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão  $D_2$  pode ser tomada de  $q$  modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões  $D_1$  e  $D_2$  é igual ao produto  $pq$ .

**Exemplo 7.** Em uma sala estão 2 meninos e 3 meninas. De quantos modos diferentes podemos formar um par menino-menina para uma dança?

*Solução.* O menino pode ser escolhido de 2 modos diferentes e em seguida a menina pode ser escolhida de 3 modos diferentes. Daí o casal pode ser formado de  $2 \times 3 = 6$  maneiras diferentes. (solução idêntica a do exemplo 4)

**Exemplo 8.** Quantos são os números de dois algarismos distintos?

*Solução.* O algarismo da dezena pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual a zero). Depois de escolhido o algarismo da dezena, o algarismo da unidade pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes (pois ele não pode ser igual ao algarismo da dezena). Portanto existem,  $9 \times 9 = 81$  números de dois algarismos distintos. Observe que esses números podem ser representados em uma tabela com 9 linhas (algarismo da dezena) e com 10 colunas (algarismo da unidade), com uma diagonal apagada, correspondente aos números com dois algarismos iguais. Esta tabela possui  $9 \times 10 - 9 = 90 - 9 = 81$  números com dois algarismos distintos.

**Exemplo 9.** Quantos são os números pares de dois algarismos distintos?

*Solução 1.* Existem 9 números pares de dois algarismos terminados em zero. Agora se o número não termina em zero, então ele deve terminar com 2, 4, 6, 8. Desse modo existem 4 possibilidades para a escolha do algarismo da unidade. Depois de escolhido o

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10		12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21		23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32		34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43		45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54		56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65		67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76		78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87		89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	

algarismo da unidade, o algarismo da dezena pode ser escolhido de 8 maneiras diferentes (devemos excluir o zero e o algarismo que já foi escolhido na unidade). Então existem  $8 \times 4 = 32$  números pares de dois algarismos distintos terminados com 2, 4, 6 ou 8. Somando com os 9 que terminam com zero, obtemos um total de  $32 + 9 = 41$  números.

*Solução 2.* De outro modo, uma estratégia bastante comum utilizada em problemas de contagem é contar com excesso e depois subtrair desta contagem os casos não desejados. Neste exercício podemos contar quantos são os números pares de dois algarismos e, em seguida, subtrair a quantidade de números pares com dois algarismos iguais. Existem  $45 = 9 \times 5$  números pares de dois algarismos (9 dígitos para a casa da dezena e 5 dígitos para a casa da unidade). Desses 45 números devemos desconsiderar os números 22, 44, 66 e 88 que possuem algarismos iguais. Portanto existem  $45 - 4 = 41$  números pares com dois algarismos distintos.

	0	2	4	6	8
1	10	12	14	16	18
2	20		24	26	28
3	30	32	34	36	38
4	40	42		46	48
5	50	52	54	56	58
6	60	62	64		68
7	70	72	74	76	78
8	80	82	84	86	
9	90	92	94	96	98

Nas soluções de muitos problemas de contagem pode ser necessário o uso tanto do princípio multiplicativo quanto do princípio aditivo, como ilustra o próximo exemplo.

**Exemplo 10.** Suponha que temos uma coleção com 5 livros de álgebra, 7 livros



de combinatória e 10 livros de geometria. Se todos os livros são diferentes, de quantas maneiras podemos selecionar dois livros de assuntos diferentes?

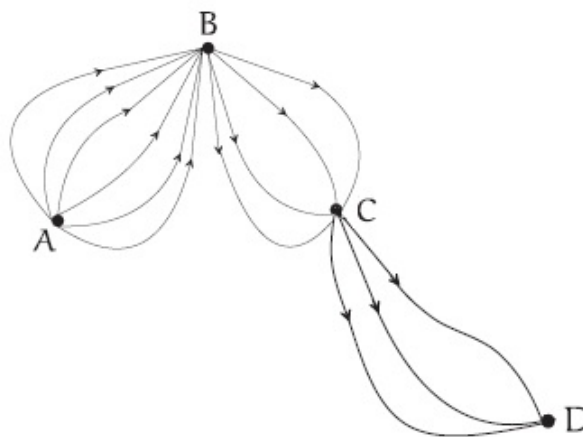
*Solução.* Primeiramente observe que existem três possibilidades de escolhas de dois dos três assuntos: álgebra-combinatória ou álgebra-geometria ou combinatóriageometria. Então vamos contar quantas são as escolhas em cada um desses casos:

- Álgebra-combinatória:  $5 \times 7 = 35$
- Álgebra-geometria:  $5 \times 10 = 50$
- Combinatória-geometria:  $7 \times 10 = 70$

Ao todo vemos que existem  $35+50+70=155$  escolhas diferentes.

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para uma situação em que mais de duas decisões devem ser tomadas. Se escolhas diferentes de uma decisão não modificar a quantidade de escolhas de uma outra decisão, então para saber o número total de possibilidades basta multiplicar o número de escolhas de cada uma das decisões.

**Exemplo 11.** Existem 6 estradas ligando as cidades A e B; existem 4 estradas ligando as cidades B e C; existem 3 estradas ligando as cidades C e D. De quantas maneiras é possível dirigir de A até D?



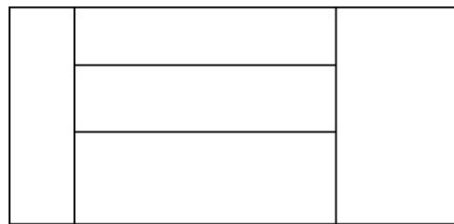
*Solução:* Para o trecho AB podemos escolher uma entre 6 estradas disponíveis. Uma vez escolhida esta estrada, para o trecho BC, temos 4 escolhas. Depois de escolhida esta

estrada, temos 3 possibilidades para o trecho CD. Portanto temos  $6 \times 4 \times 3 = 72$  modos diferentes de dirigir de A até D.

**Exemplo 12.** Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

*Solução.* Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a zero. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois ele não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é  $9 \times 9 \times 8 = 648$ .

**Exemplo 13.** O retângulo a seguir está dividido em 5 regiões. Se temos 5 cores a nossa disposição, de quantas maneiras podemos colorir este retângulo de modo que cada região receba uma cor e regiões adjacentes sejam coloridas com cores diferentes?



*Solução.* Devemos considerar dois casos, analisando separadamente se as regiões da esquerda e da direita são coloridas da mesma cor ou com cores diferentes. Suponhamos então que as regiões da esquerda e da direita são coloridas com a mesma cor. Neste caso:

- A região da esquerda pode ser colorida com 5 cores.
- A região da direita pode ser colorida de uma única cor: a mesma cor da região da esquerda.
- A faixa horizontal de cima pode ser colorida com 4 cores, pois não podemos repetir a cor das regiões laterais.
- A faixa horizontal do meio pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- A faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 3 cores pois devemos evitar a cor das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos  $5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$  possibilidades.

Suponhamos agora que as regiões da esquerda e da direita são coloridas com cores diferentes. Neste caso:

- Existem 5 opções de cores para a região da esquerda.
- Em seguida existem 4 opções de cores para a região da direita, pois ela deve ser colorida com uma cor diferente da região da esquerda.
- Daí podemos colorir a faixa horizontal de cima com 3 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais.
- Em seguida podemos colorir a faixa horizontal do meio com 2 cores, pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal de cima.
- Finalmente a faixa horizontal de baixo também pode ser colorida com 2 cores pois devemos evitar as duas cores das regiões laterais e a cor da faixa horizontal do meio.

Neste caso obtemos  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$  possibilidades. Somando, concluímos que o retângulo pode ser colorido de  $180 + 240 = 420$  maneiras diferentes.

## ANEXO B – PROBLEMAS DE CONTAGEM NO CADERNO DO ALUNO EM SÃO PAULO

**3-** Os números 342, 335, 872 e 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números de 3 algarismos podemos escrever se:

- a) todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?
- b) todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?
- c) não houver qualquer restrição, isto é, desde 100 até 999?
- d) os números não contiverem algarismos repetidos?

**4-** Existem 9 000 números de 4 algarismos, dos quais 1 000 é o menor deles e 9 999 o maior. Entre esses 9 000 números há muitos que não repetem algarismos, como 1023, 2549, 4571 ou 9760. Quantos são esses números de 4 algarismos distintos?

**5-** Para que um número de 3 algarismos seja par, é preciso que ele “termine” por um numeral par, ou, em outras palavras, é preciso que o algarismo das unidades seja 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, como: 542, 134, 920, 888 etc.

- a) Quantos números pares de 3 algarismos existem?
- b) Quantos números ímpares de 3 algarismos existem?
- c) Quantos números ímpares de 3 algarismos distintos existem?
- d) Quantos números pares de 3 algarismos distintos existem?
- e) A soma dos resultados obtidos nos itens c) e d) deste problema deve ser igual ao resultado do item d) da atividade 3. Verifique se isso ocorreu com os resultados que você obteve. Se não, procure descobrir o que saiu errado.

**6-** Considere os numerais 1, 2, 3 e 4, e também todos os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com eles. Imagine que todos esses números serão ordenados, do menor para o maior. Isso feito, o primeiro da fila será o 1 234, o segundo será o 1243, o terceiro, 1324, e assim por diante, até o último, que será o 4321.

- a) Qual é a posição do número 4321 nessa fila?

- b) Qual é a posição do número 3241 nessa fila?
- c) Acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4, e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados, qual é o número que ocupa a 72ª posição?



### Leitura e análise de texto

#### As filas

Quando duas pessoas **A** e **B** colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem **A** e depois **B**, ou primeiro vem **B** e depois **A**. Se uma pessoa **C** juntar-se a essas duas, a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

**ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA**

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, serão, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão  $4 \cdot 6 = 24$  filas.

7- Quantas filas diferentes poderão ser formadas com 5 pessoas, apenas alternando suas posições na fila?

8- Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras das palavras:

- BIA
- LUCIA
- NICO
- CAMILO

9- Considere a palavra **CABO**. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavras conhecidas, estaremos formando “anagramas”. Veja alguns dos anagramas da palavra **CABO**:

**COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB**

- a) começando por A, quantos anagramas diferentes poderemos formar?
- b) quantos anagramas terminados em O existem?
- c) no total, quantos anagramas existem?

10- Em uma caixa foram colocadas 9 bolinhas, numeradas de 1 a 9. Para retirar uma bolinha dessa caixa, temos 9 maneiras diferentes: pegar a bolinha 1, ou a bolinha 2, ou a bolinha 3, e assim por diante. Para retirar duas bolinhas da caixa, temos já um número

bem maior de maneiras diferentes: temos 8 vezes mais, isto é, 72 maneiras diferentes. Isso porque há 8 possibilidades de pegar a segunda bolinha depois de a primeira delas ter sido apanhada. Responda:

- a) quantas maneiras diferentes existem para pegar 3 bolinhas dessa caixa?
- b) quantas maneiras diferentes existem para pegar 4 bolinhas dessa caixa?

**11-** Suponha que, no caso do problema anterior, a bolinha que for pega seja jogada novamente na caixa antes que a próxima bolinha seja sorteada. Em outras palavras, a bolinha é repostada na caixa a cada sorteio. Nessa condição, de quantas maneiras diferentes podemos retirar dessa caixa:

- a) duas bolinhas?
- b) três bolinhas?
- c) quatro bolinhas?

**12-** Sete pessoas formarão ao acaso uma fila indiana. Em quantas ordenações diferentes poderá ser formada a fila?

**13-** Trocando a ordem das letras INA, podem ser formados 6 anagramas diferentes:

**INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA**

Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3:

**ANA, AAN, NAA**

Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas.

A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 “L” e 2 “U”, tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um “L” com outro ou a troca entre os dois “U” não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra com 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2!, por causa dos “L” e dos “U” repetidos. Então,  $24 \div 2! \div 2! = 6$ .

Veja por exemplo, a palavra INICIOU: apesar de ter 7 letras não tem  $7! = 5040$  anagramas distintos, pois tem o “I” repetido três vezes, uma vez que a troca de um “I” com outros dois “I” não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 5040 anagramas de uma palavra com 7 letras distintas fica, no caso de INICIOU dividido por  $3!$ , em decorrência dos “I” repetidos. Assim, INICIOU tem  $5040 \div 3! = 5040 \div 6 = 840$  anagramas distintos.

Agora, responda: qual é o total de anagramas das palavras a seguir?

- CARRO
- CORRO
- CORPO

14- Quantos anagramas podem ser formados com as letras das palavras a seguir?

- ANA
- BANANA
- CASA
- CABANA
- BANANADA

15- Quando três meninas, Ana, Bia e Carla, e um menino, Dan, formam uma fila, temos 24 filas diferentes, como já vimos em problemas anteriores. Se, no entanto, o critério para a formação da fila não for a individualidade das pessoas, mas apenas o sexo, serão apenas 4 filas diferentes formadas por 3 mulheres (M) e um homem (H), da seguinte forma:

MMM**H**, MM**H**M, M**H**MM, **H**MMM

Com 5 pessoas, sendo 2 meninas e 3 meninos, quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de:

- a) ser considerada a individualidade das pessoas?
- b) ser considerado apenas o sexo das pessoas?

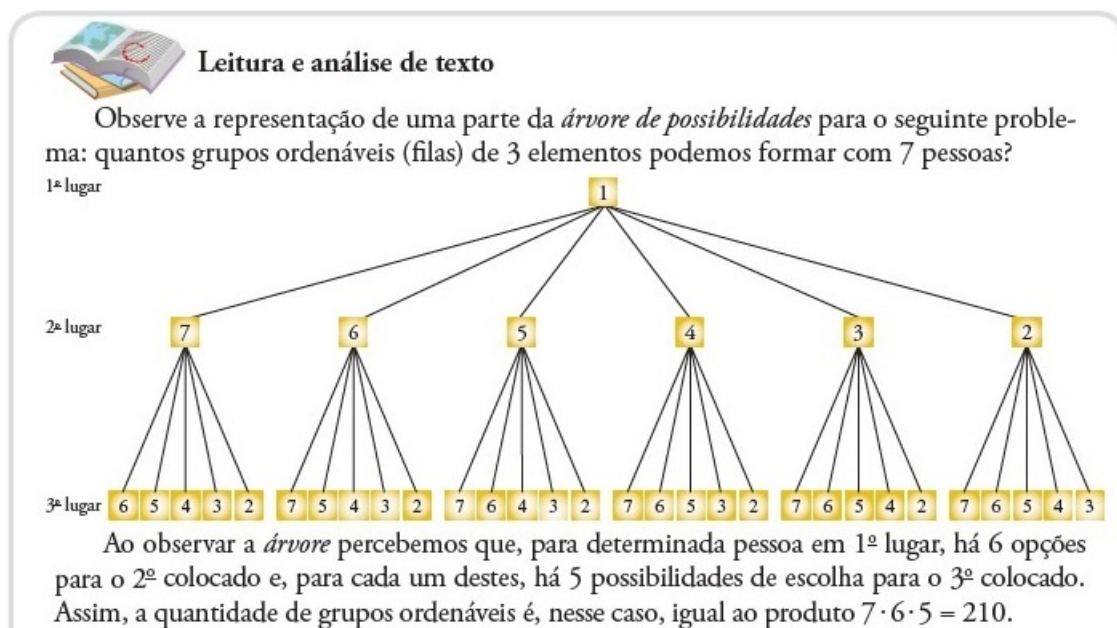
16- Três livros de Geografia diferentes e três livros de História diferentes serão colocados, um sobre o outro, de modo a formar uma pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se:

- a) não importar a matéria, e sim os livros, que, no caso, são todos diferentes?
- b) a diferença entre os livros não for levada em conta, mas apenas o fato de que são de duas disciplinas diferentes?

17- Sete pessoas, sendo 3 meninas e 4 meninos, formarão uma fila. Desconsiderando a individualidade das pessoas e levando em conta apenas o sexo, quantas ordenações diferentes poderá ter a fila formada?

18- Um jogo de futebol entre duas equipes A e B terminou empatado por 3 a 3. Alguém que não assistiu ao jogo pretende descobrir a ordem em que ocorreram os gols. Será que A começou ganhando e B empatou? Será que B fez 3 a 0 e depois A tentou reverter a situação? Enfim, como foram saindo os gols nessa partida? Quantas ordenações possíveis existem para os gols que ocorreram nessa partida?

19- Aplicando a propriedade distributiva e desenvolvendo o binômio  $(A + B)^5$ , isto é, fazendo  $(A + B) \times (A + B) \times (A + B) \times (A + B) \times (A + B)$ , aparecerá um termo igual a  $A^5$  e um termo igual a  $B^5$ . No entanto, vão aparecer vários termos com parte literal igual a  $A^3B^2$ , decorrentes da multiplicação entre 3 “A” de qualquer dos 5 binômios por 2 “B”, também de qualquer dos 5 binômios. Quantos termos iguais com parte literal  $A^3B^2$  aparecerão?



20- Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane, estão juntas em uma sala.

a) Quantos agrupamentos **ordenáveis** diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

b) Quantos agrupamentos **não ordenáveis** diferentes (grupos) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes



Agora, vamos mudar a questão e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento “João, José, Maria” fosse o mesmo de “João, Maria, José”, o mesmo de “Maria, José, João” e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas, fossem feitos grupos de pessoas?

Para responder, retomamos os problemas anteriormente resolvidos, mostrando que haverá  $3! = 6$  ordenações possíveis. Portanto, quaisquer 3 elementos que considerarmos entre 7 permitirão  $3! = 6$  ordenações possíveis. Assim, se temos  $7 \cdot 6 \cdot 5$  conjuntos ordenáveis, temos  $(7 \cdot 6 \cdot 5) \div 3!$  conjuntos não ordenáveis, e a resposta do problema é  $210 \div 6 = 35$  grupos diferentes de 3 pessoas.

na sala?

**21-** Há 10 bolas em uma caixa, todas iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados sendo:

- todas brancas?
- duas brancas e duas pretas?

**22-** Sobre a prateleira de um laboratório repousam 8 substâncias diferentes. Quantas misturas diferentes com iguais quantidades de 2 dessas substâncias podem ser feitas se:

- a) não houver qualquer restrição?
- b) entre elas há 3 substâncias que não podem ser misturadas duas a duas por formarem um composto que exala gás tóxico?

**23-** Uma seleção de basquete com 5 jogadores será formada por atletas escolhidos de apenas duas equipes **A** e **B**. Da equipe **A**, que possui 12 atletas, serão selecionados 2, enquanto a equipe **B**, que possui 10 atletas, cederá 3 para a seleção. Se todos os atletas têm potencial igual de jogo, quantas seleções diferentes poderão ser formadas?

**24-** A partir de um conjunto de 15 bolas iguais, a não ser pela cor (8 são brancas, 4 pretas e 3 amarelas), serão formados grupos de 3 bolas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formados esses grupos se não são desejáveis grupos que contenham bolas de uma única cor?

**25-** Na classe de Luiza e Roberta estudam, contando com elas, 34 alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho de 4 alunos se Roberta e Luiza não podem participar juntas de um mesmo grupo?

**26-** Dispomos de 8 pessoas para formar grupos de trabalho. De quantas maneiras diferentes o grupo poderá ser formado se dele participar(em):

- apenas uma das 8 pessoas?
- duas das 8 pessoas?
- três das 8 pessoas?
- quatro das 8 pessoas?

27- Em uma sala há  $n$  pessoas com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:

- apenas 1 elemento?
- 2 elementos?
- 3 elementos?
- 4 elementos?
- $p$  elementos,  $p < n$ ?

*O texto seguinte serve de enunciado para as atividades de 28 a 32.*

Observe a imagem a seguir, das 24 pessoas que esperavam o início da aula de Matemática, e complete a tabela com a quantidade de pessoas que apresentam as características indicadas.



	Homens	Mulheres
Com óculos		
Sem óculos		
Total		

28- De quantas maneiras diferentes podemos sortear, entre essas pessoas:

- uma mulher?
- dois homens?
- duas mulheres com óculos?
- um homem?
- duas pessoas com óculos?
- duas mulheres?

29- Na primeira fila estão sentadas 7 pessoas. De quantas maneiras podemos trocá-las de lugar de modo a mantê-las todas na mesma fila?

30- De quantas maneiras diferentes podemos formar, com as pessoas da imagem, grupos de:

- 3 homens?
- 2 homens e uma mulher?
- 3 mulheres?
- 3 pessoas com óculos?
- 1 homem e duas mulheres?

**31-** Agora, atenção! Vamos formar grupos de 4 pessoas com as 7 pessoas da primeira fila. Quantos grupos diferentes poderão ser formados se:

- a) todos forem homens?
- b) todas forem mulheres?
- c) todos usarem óculos?
- d) nenhuma pessoa usar óculos?
- e) o grupo for formado por 3 homens e uma mulher?
- f) o grupo for formado por 2 homens e duas mulheres?

**32-** Crie um problema que envolva a ideia de agrupamento de pessoas, levando em conta o pessoal que está sentado ao seu redor. Não vale copiar enunciados já apresentados. Resolva o problema.

**33-** Sete pessoas, 3 meninas e 4 meninos, entram em um cinema e vão ocupar 7 cadeiras. Uma pessoa em cada cadeira, colocadas lado a lado. De quantas maneiras diferentes essa ação poderá ser realizada se:

- a) não houver qualquer restrição?
- b) na primeira cadeira sentar um menino e na última uma menina?
- c) duas meninas sempre ficarem lado a lado?
- d) todas as meninas ficarem lado a lado?
- e) todas as meninas ficarem lado a lado e os meninos também?

**34-** A fim de angariar fundos para uma viagem de estudos com sua turma, um professor de Matemática organizou uma rifa. Para tanto, ele imprimiu a maior quantidade possível de bilhetes contendo um número de 4 algarismos distintos. Depois, vendeu esses bilhetes a R\$ 2,00 cada um para comprar as passagens que custavam, ao todo, R\$ 4 000,00. Supondo que o professor tenha vendido todos os bilhetes, responda: ele conseguiu ou não comprar todas as passagens?

**35-** Pensando apenas nas pessoas da fileira de trás, de quantas maneiras elas podem trocar

*O enunciado seguinte serve para a resolução das atividades de 35 a 38.*

O desenho mostra 12 pessoas sentadas em uma arquibancada. Na fileira de trás estão 5 homens e uma mulher. Na fileira da frente estão 4 homens e duas mulheres.

Entre as pessoas deste grupo, duas, da fileira da frente, usam óculos, e duas, da fileira de trás, também.



as posições entre si:

- a) sem qualquer restrição?
- b) de modo que as duas pessoas de óculos fiquem sempre separadas?
- c) de modo que a mulher esteja sempre entre os dois homens que usam óculos?

**36-** Pensando apenas nas pessoas da fileira da frente, de quantas maneiras elas podem trocar as posições entre si:

- a) se as duas pessoas que usam óculos estiverem sempre lado a lado?
- b) se os homens sempre ficarem juntos e as mulheres também?

**37-** Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?

**38-** Se forem sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?

## ANEXO C – PROBLEMAS DE CONTAGEM NO PIC - N3

**Exercício 3 (Questão 17-Prova da 1ª Fase da OBMEP-nível 3-2009):** Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.



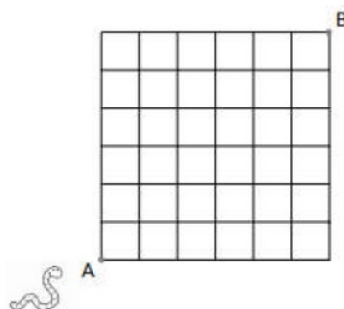
Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo.

**Exercício 4 (Questão 17-Prova da 1ª Fase da OBMEP-nível 3-2010):** Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

**Exercício 5 (Questão 9-Prova da 1ª Fase da OBMEP-nível 3-2011):** Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

**Exercício 6 (Questão 11-Prova da 1ª Fase da OBMEP-nível 3-2013):** Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda à sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda à sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

**Exercício 7 (Questão 6-Banco de Questões da OBMEP-nível 3-2013):** Uma minhoca matamática parte do ponto A e chega no ponto B da figura abaixo.





que este pulo aumente a distância entre o ponto  $O$  e a posição atual do gafanhoto. De quantas maneiras o gafanhoto pode chegar ao cubo unitário no canto oposto?

**Exercício 10:**

- a) Quantos números diferentes com 10 algarismos podem ser escritos usando-se apenas os algarismos 1 e 2?
- b) Uma mangueira tem dez mangas de diferentes tamanhos. De quantas maneiras podemos colher diversas delas?

**Exercício 11:** De quantas maneiras podemos dividir 15 pessoas em três times de 5 pessoas?

**Exercício 12:** Para participar de uma loteria esportiva na Rússia, é preciso escolher 6 dentre 45 números impressos em um cartão de loteria (todos os cartões são idênticos).

- a) De quantas maneiras é possível preencher o cartão da loteria?
- b) Depois do final da loteria, seus organizadores decidiram contar o número de maneiras de preencher o cartão da loteria de modo que exatamente 3 dos 6 números escolhidos estejam entre os 6 números vencedores. Ajude-os a encontrar a resposta.