Universidade Federal de São Carlos

***Campus* Sorocaba**

José Vinícius Zapte Bergamo

Aplicação do Método Averaging no Sistema de Kukles

Sorocaba/SP - Julho de 2014

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo utilizar o método Averaging para determinar o número máximo de ciclos limites que bifurcam do centro linear $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ quando este é perturbado por um parâmetro ϵ arbitrariamente pequeno em uma classe de sistemas diferenciais polinomiais de Kukles. Também pretendemos, antes de nos dedicarmos a análise do problema exposto, apresentar alguns fatos básicos da teoria qualitativa das EDOs.

Índice

Introdução

Em 1881, com o seu célebre trabalho *Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle*, Henri Poincaré lançou as bases da teoria qualitativa das equações diferenciais. Sua teoria fornece uma descrição da configuração global das soluções e o efeito de pequenas perturbações das condições iniciais (estabilidade). Poincaré também estudou o comportamento assintótico das soluções bem como a estrutura de seus conjuntos limites, conteúdos que compõem o outro aspecto da teoria qualitativa.

A noção de ciclo limite surgiu pela primeira vez nos estudos de equações diferenciais no plano realizados por Poincaré entre os anos de 1880 e 1890. No final da década de 20, Van der Pol, Lienard e Andronov, no estudo de certos fenômenos elétricos, obtiveram equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites idealizados por Poincaré. Desde então, problemas envolvendo a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limites passarem a ser estudados mais intensivamente pelos matemáticos.

Um dos métodos usados na abordagem de tais problemas é o método Averaging, que, resumidamente, permite relacionar as soluções de sistemas diferenciais autônomos e não autônomos e determinar o número de ciclos limites de um sistema quando o perturbamos por um pequeno parâmetro ϵ. Neste trabalho, utilizamos o método Averaging para determinar o número máximo de ciclos limites que bifurcam do centro linear $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ quando este é perturbado na seguinte classe de sistemas diferenciais polinomiais de Kukles:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \epsilon(f_{n_1}(x) + g_{n_n}(x)y + h_{n_3}(x)y^2 + dy^3) \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f_{n_1}(x)$, $g_{n_2}(x)$, $h_{n_3}(x)$ são polinômios em x de grau n_1, n_2 e n_3, respectivamente, d é um número real diferente de zero e ϵ é um parâmetro arbitrariamente pequeno. Pretendemos ainda determinar o número máximo de ciclos limites para casos particulares do sistema (1), atribuindo valores para n_1, n_2 e n_3.

Inicialmente (Capítulo 1), introduzimos alguns conceitos fundamentais da teoria das equações diferenciais ordinárias, apresentando a definição do que vem a ser uma solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem $x' = f(t, x)$ e dando, em seguida, a formulação do problema de Cauchy.

No Capítulo 2, examinamos a questão da existência e unicidade de soluções para problemas de Cauchy. Neste capítulo, é provado o teorema de Picard, que garante sob hipóteses bem gerais sobre f - se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas - a existência de uma única solução local para um dado problema de valor inicial. Além disso, estudamos a máxima extensão de tais soluções (soluções maximais) e enunciamos e provamos o teorema de Peano.

Nos capítulos 3 e 4, apresentamos alguns fatos básicos da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias para campos vetoriais contínuos em R^n e enunciamos o teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos no plano.

Por fim, no capítulo 5, após uma breve apresentação do desenvolvimento histórico do método Averaging, enunciamos o seu teorema clássico e o utilizamos a fim de encontrar o número máximo de ciclos limites de sistemas diferenciais polinomiais planares de Kukles.

Destacamos que nos quatro primeiros capítulos deste trabalho adotamos [3] como principal referência para o desenvolvimento dos resultados apresentados.

Capítulo 1

1 O Conceito de EDO e o Problema de Cauchy

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos fundamentais da teoria das equações diferenciais ordinárias. Inicialmente, apresentamos a definição do que vem a ser uma solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem $x' = f(t, x)$. A seguir, damos a formulação do problema de Cauchy, denotado abreviadamente por

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

Neste caso, discutimos se dado (t_0, x_0) fixo existe alguma solução que no ponto t_0 assume o valor x_0.

1.1 Definições

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde $\mathbb{R}$ é a a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano de dimensão n. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{E}$.

Definição 1.1.1. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e I um intervalo não degenerado da reta, isto é, não reduzido a um ponto. Uma equação diferenciável $\varphi : I \to E$ chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$

no intervalo I quando:

- gráfico de $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω;
- $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

A equação (2) também pode ser denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x)$$

Sejam $f_i : \Omega \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$, as componentes de f; $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, com $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, é uma solução da equação (2) se e somente se cada φ_i é diferenciável no intervalo I, $(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = f_2(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$
$$\vdots$$
$$\frac{d\varphi_n}{dt} = f_n(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

para todo $t \in I$.

1.2 O Problema de Cauchy

Definição 1.2.1. Seja Ω um aberto contido em $I \times \mathbb{E}$, onde I é um intervalo da reta não degenerado e $\mathbb{E}$ um espaço euclidiano n dimensional. Seja $f : \Omega \to \mathbb{E}$ um aplicação contínua. Fixado o par (t_0, x_0) em Ω, chamado de *valor inicial* para a equação diferencial ordinária dada por f, chamamos de *problema de Cauchy* associado a f com valor inicial (t_0, x_0) ao problema definido por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

Neste caso, a aplicação $\varphi : I \to \mathbb{E}$ é uma solução do problema de Cauchy dado por f, com valor inicial (t_0, x_0), se φ é solução da EDO dada por f e se $\varphi(t_0) = x_0$.

Exemplo 1.2.2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$, e $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(c) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da equação $x' = 3x^{2/3}$, pois o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 3(t-c)^2 = 3[(t-c)^3]^{2/3} = f(t, \varphi(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$$

Porém, note que por cada ponto da forma $(t_0, 0)$ passa mais de uma curva solução (pois a função constante $\varphi = 0$ também é solução da EDO dada).

Este exemplo mostra que o problema de Cauchy pode não ter uma única solução. No Capítulo 2 veremos quais condições para a aplicação f nos garantem a existência e a unicidade de soluções para problemas de valor inicial.

Capítulo 2

2 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções

Como já foi apontado anteriormente, visamos, neste capítulo, examinar a questão da existência e unicidade de soluções para problemas de Cauchy. Veremos que sob hipóteses bem gerais sobre f - se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em Ω - existe uma única solução local para um dado problema de valor inicial. Por fim, examinaremos a máxima extensão de tais soluções, as quais também são chamadas de soluções maximais.

Observação: Uma equação da forma $\frac{dx}{dt} = f(t,x);\ x(t_0) = x_0$, com $f : \Omega \to \mathbb{E}$ contínua no aberto Ω, possui uma correspondente equação integral. Logo, φ é solução do problema de Cauchy acima, definida em um certo intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, se, e somente se, o gráfico de φ está contido no domínio da f e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

2.1 O Teorema de Picard

Definição 2.1.1. Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama-se *Lipschitziana em* Ω *em relação à segunda variável* se existe uma costante K tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K\,|x - y|$$

para todos $(t,x), (t,y) \in \Omega$; K chama-se *constante de Lipschitz* de f.

Dizemos que a aplicação f é localmente lipschitziana em Ω se para todo (t_0, x_0) existe uma vizinhança $V = V(t_0, x_0)$ tal que $f|V$ é lipschitziana em V. Por exemplo, se f admite derivada parcial em relação à segunda variável, $D_2 f$, contínua em Ω, então f é localmente lipschitziana em Ω.

A seguir, apresentamos o Teorema do Ponto Fixo e um corolário que serão usados na demonstração do Teorema de Picard.

Teorema 2.1.2 (Teorema do Ponto Fixo)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo p, por F, isto é $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F, ou seja, $F^n \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. F^n é definido por $F(F^{n-1}(x))$.*

Demonstração:

Unicidade: Sejam p_1 e p_2 dois pontos fixos. Então

$$d(p_1, p_2) = d(F(p_1), F(p_2)) \leq Kd(p_1, p_2)$$

Como $0 \leq K < 1$, segue que $d(p_1, p_2) = 0$, o que implica que $p_1 = p_2$.

Existência: Sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x)$. Provaremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por indução, mostraremos que $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ı) Para $n = 0$ a desigualdade é trivialmente verdadeira, pois

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1)$$

ıı) Suponhamos, agora, que a desigualdade seja válida para n. Vamos mostrar que ela também é valida para $n + 1$. Como F é uma contração,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) = d(F(F^n(x)), F(F^{n+1}(x))) = d(F(x_n), F(x_{n+1})) \leq$$

$$\leq Kd(x_n, x_{n+1}) \leq K^{n+1}d(x_0, x_1)$$

Portanto, por indução, $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$. Pela desigualdade triângular,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

$$\leq K^n d(x_0, x_1) + K^{n+1}d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n+p-1}d(x_0, x_1)$$

ou seja,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq K^n d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n+p-1} d(x_0, x_1) = K^n(1 + \cdots + K^{p-1}) d(x_0, x_1) =$$

$$= K^n \, \frac{1 - K^{p-1}}{1 - K} d(x_0, x_1) = \frac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1) - \frac{K^{p-1}}{1 - K} d(x_0, x_1)$$

e portanto,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1)$$

Como $0 \leq K < 1$, $K^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo $d(x_n, x_m) \to 0$, ou seja, (x_n) é convergente. Provemos que $\lim x_n = p$ é ponto fixo de F. De fato,

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

$\square$

Corolário 2.1.3. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e, para algum $m \in \mathbb{N}$, F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por F. Mais ainda, p é um atrator de F.*

Demonstração: Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado pelo Lema da Contração. Seja $n = mk + l$, com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, F^l é um ponto de X. Como p é atrator de F^m, temos $[F^m]^k(F^l(x)) \to p$, quando $k \to \infty$. Como $F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$, segue que $F^n(x) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Logo, p é ponto atrator de F. Além disso, p é ponto fixo. De fato,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p)$$

$\square$

Teorema 2.1.4 (Teorema de Picard)**.** *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua e lipschitziana com respeito à segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, com $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω, então existe uma única solução da equação*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α, *onde* $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Demonstração: Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$ com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,, \quad t \in I_\alpha$$

Além disso, para $\varphi \in X$, definimos a aplicação $F(\varphi) : I_\alpha \to \mathbb{E}$ da seguinte forma:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

A integral está bem definida, pois f é contínua e limitada. Note, ainda, que a aplicação F apresenta as seguintes propriedades:

1. $F(X) \subseteq X$
2. F^n é uma contração, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Para todo $t \in I_\alpha$

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds| \leq M\,|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

o que prova a afirmação (1). Agora, por indução, vamos provar que para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$, vale a seguinte desigualdade

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2(t))| \leq \frac{K^n\,|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Para $n = 0$ a afirmação é óbvia. Suponhamos que ela seja válida para $n = r$. Então,

$$|F^{r+1}(\varphi_1)(t) - F^{r+1}(\varphi_2)(t)| = |F(F^r(\varphi_1(t)) - F(F^r(\varphi_2)(t))| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, F^r(\varphi_1)(s)) - f(s, F^r(\varphi_2)(s))|\,ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} K\,|F^r(\varphi_1)(s)) - F^r(\varphi_2)(s)|\,ds\right| \leq$$

$$\leq K\left|\int_{t_0}^{t} \frac{K^r}{r!}(t_0 - s)^r d(\varphi_1, \varphi_2)ds\right| \leq \frac{K^{r+1}}{(r+1)!}\,|t - t_0|^{r+1}\,d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \dfrac{K^n\alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$. Assim, temos que para n suficientemente grande, $K^n\alpha^n/n! < 1$, pois este é o termo de uma série cuja soma é $\varepsilon^{K\alpha}$. Logo, F^n é uma contração de X e, pelo Corolário 2.1.3, existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$, o que conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 2.1.5. *Sejam Ω aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ e $f : \Omega \to \mathbb{E}$ contínua com $D_2 f$ também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω, existe uma vizinhaça $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico dessa solução está contido em V.*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de (t_0, x_0) tal que $f\,|U$ é lipschitziana e $|f| \leq M$ em U. Além disso, tomemos α suficientemente pequeno para que $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$, onde $b = \alpha M$. Basta aplicar o Teorema 2.1.4 para concluir a demonstração. □

2.2 Teorema de Peano

Enuciamos, abaixo, o Teorema de Arzelá, cujo resultado será utilizado na demonstração do Teorema de Peano.

Definição 2.2.1. Uma família F de funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é chamada *equicontínua* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$ para toda $\varphi \in F$.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Arzelá)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Seja F uma família equicontínua de funções $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Se F é uniformemente limitada (isto é, existe $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$ para toda $\varphi \in F$), então toda sequência $\{\varphi_n\}$ de elementos de F possui uma subsequência $\{\varphi_{nk}\}$ uniformemente convergente em X.*

Teorema 2.2.3 (Teorema de Peano)**.** *Seja f contínua em $\Omega = I_a \times B_b$, como dado no Teorema 2.1.4. Se $|f| < M$ m Ω, a equação $x' = f(t, x)$, com $x(t_0) = x_0$, possui ao menos uma solução em I_α, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência f_n de funções, cujas componentes são polinômios, que converge para f uniformemente em Ω. Para n suficientemente grande, f_n satisfaz as hipóteses do Teorema (2.1.4). Seja φ_n solução de $x' = f_n(t, x), x(t_0) = x_0$ em I_n, cuja existência e unicidade decorrem do Teorema de Picard. Note que a família $\{\varphi_n\}$ é equicontínua, pois:

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M \, |t_1 - t_2|$$

e uniformemente limitada, já que para todo n suficientemente grande tem-se

$$|\varphi_n(t) - x_0| = |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| \leq M.b/M = b$$

Assim, pelo Teorema de Arzelá existe uma subsequência, que denotaremos por φ_k, tal que φ_k converte uniformemente em I_α para uma função $\Psi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to B_b$. Mostraremos que Ψ é solução local do problema

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

De fato,

$$\left| x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(s)), ds - \varphi_k(t) \right| =$$

$$\left| x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f_k(s, \varphi_k(s)) ds \right| \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} |f_k(s, \varphi_k(s)) - f(s, \Psi(s))| \, ds \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} |f_k(s, \varphi_k(s)) - |f(s, \varphi_k(s))| \, ds + \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \Psi(s))| \, ds.$$

A expressão acima vai a zero uniformemente quando k tende a $+\infty$. Logo, a sequência φ_k que converge a Ψ também converte a $x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(s)) ds$, o que, pela unicidade do limite, implica que

$$\Psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(s)) ds$$

Portanto, Ψ é solução do problema de Cauchy. □

2.3 Soluções Máximas

Definição 2.3.1. Chamamos de *solução máxima* da equação $x' = f(t, x)$ toda solução φ definida num intervalo I, denominado *intervalo máximo* de φ, tal que se ψ é outra solução no intervalo J, com $J \supseteq I$ e $\varphi = \psi|J$, então $I = J$. Em outras palavras, φ é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução da equação.

Proposição 2.3.2. *Seja* $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *contínua e tal que* $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ *existe uma única solução do Problema de Cauchy* $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$*, definida num intervalo* $I(t_0, x_0)$*. Então* $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ *existe uma única solução máxima* $\varphi(t, (t_0, x_0))$ *do Problema de Cauchy dado.*

Demonstração: Definamos o intervalo maximal $I_m(t_0, x_0)$ como a reunião $\bigcup_\varphi I_\varphi(t_0, x_0)$, onde φ percorre as soluções do Problema de Cauchy indicado. Se $t \in I_\varphi(t_0, x_0)$, definimos $\varphi(t, (t_0, x_0)) = \varphi(t)$. Pela unicidade, $\varphi(t, (t_0, x_0))$ é bem definida. Pela existência local, $I_m(t_0, x_0)$ é conexo (ou seja, um intervalo). $\square$

Com este resultado, podemos concluir que se a equação $x' = f(t, x)$ tem por cada ponto (t_0, x_0) uma única solução local, então ela possui soluções máximas únicas. O Exemplo 1.2.2 mostra que, em geral, existe uma infinidade de soluções máximas por um ponto se apenas a continuidade da f é exigida.

Capítulo 3

3 Aspectos Gerais da Teoria Qualitativa das EDOs

Neste capítulo, iniciaremos o estudo de sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3}$$

chamados autônomos, nos quais as funções X_i não dependem de t. Serão apresentados os fundamentos da Teoria Qualitativa com alguns de seus resultados mais significativos, tais como o Teorema do Fluxo Tubular.

3.1 Campos Vetoriais e Fluxos

Seja U um aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial de casse C^k, $1 \leq k \leq \infty$ em U é uma aplicação $F : U \to \mathbb{R}^n$. Ao campo vetorial F associamos a equação diferencial

$$x' = F(x) \tag{4}$$

As soluções desta equação sao aplicações diferenciáveis $\varphi : I \to U$ (I é um intervalo da reta) tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)) \tag{5}$$

para todo $t \in I$. Estas soluções também são chamadas de *trajetórias* ou *curvas integrais* de F.

Definição 3.1.1. Um ponto $p \in U$ tal que $F(x) = 0$ é dito *ponto singular* ou *singularidade* de F. Se $F(p) \neq 0$, então p é chamado de *ponto regular* de F. Uma curva integral $\varphi : I \to U$ de F chama-se máxima se para toda curva integral $\psi : J \to U$, tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|$, então $I = J$ e, consequentemente, $\varphi = \psi$. Neste caso, I é chamado de *intervalo máximo*.

Abaixo, enunciamos o Teorema do Fluxo Local. A demonstração deste teorema pode ser vista em [3].

Teorema 3.1.2. *Seja $F : U \to R^n$ um campo de vetores C^k, $k \geq 1$, no aberto U. Então:*

(a) Para cada $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima φ_x de (4) tal que $\varphi_x(0) = x$.

(b) Se $y = \varphi_x(s)$ e $s \in I_x$, então $I_y = I_x - s = \{r - s; r \in I_x\}$, $\varphi_y(0) = y$ e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t+s)$ para todo $t \in I_y$.

(c) O conjunto $D = \{(t, x); x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em R^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \to R^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k. Além disso, φ satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DF(\varphi(t, x)).D_2\varphi(t, x), \quad D_2\varphi(t, x)|_{t=0} = E$$

para todo $(t, x) \in D$. Aqui E denota a identidade de R^n.

Observação 3.1.3. A parte (b) do Teorema 3.1.2 decorre da unicidade de soluções e do fato da equação ser autônoma. Neste caso, $\varphi_y(s)$ e $\varphi_x(t + s)$ são soluções do mesmo Problema de Cauchy.

Definição 3.1.4. A aplicação $\varphi : D \to U$ chama-se fluxo gerado por F. O campo F é dito *completo* se $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in U$, isto é, se $D = \mathbb{R} \times U$

Corolário 3.1.5. *Seja F um campo vetorial C^k, $k \geq 1$, em $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $\omega_+(x) < \infty$ (respectivamente $\omega_-(x) > \infty$), então φ_x tenda a ∂U quando $t \to \omega_+(x)$ (respectivamente $t \to \omega_-(x)$), isto é, para todo compacto $K \subseteq U$, existe $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x)]$, então $\varphi_x(t) \notin K$.*

Demonstração: Suponhamos que exista um compacto $K \subseteq U$ e uma sequência $t_n \to \omega_+(x) < \infty$ tal que $\varphi_x(t_n) \in K$, para todo n. Então, existe uma subsquência, a qual denotaremos por $\varphi_x(t_k)$, tal que $\varphi_x(t_k)$ converge para um ponto $x_0 \in K$. Agora, tomemos $b > 0$ e $\alpha > 0$, tais que $B_b \times I_\alpha \subseteq D$, onde $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x_0| \leq b\} \subseteq U$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t| \leq \alpha\}$. D é aberto pela parte (c) do Teorema 3.1.2. Alem disso, pela parte (b), $\varphi_x(t_k + s)$ está definido para $s < \alpha$ e coincide com $\varphi_y(s)$ para k suficientemente grande, onde $y = \varphi_x(t_k)$. Mas disso decorre que $t_k + s > \omega_+(x)$, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 3.1.6. *Se $U = \mathbb{R}^n$ e $|F(x)| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Suponhamos que exista $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\omega_+(x) < \infty$. Como $|x - \varphi_x(t)| < \left|\int_0^t F(\varphi_s(x))ds\right| \leq ct \leq c\omega_+(x)$, temos que para todo $t \in [0, \omega_+(x))$, $\varphi_x(t)$ está na bola fechada de centro x e raio $c\omega_+(x)$, ou seja, num compacto, o que contradiz o Colorário 3.1.5. Portanto, $\omega_+(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Usando argumento análogo, prova-se que $\omega_-(x) = -\infty$. □

Corolário 3.1.7. *Se φ_x é uma solução regular de (4) definida no intervalo máximo I_x e $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$, então $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$, para todo t, onde $c = t_2 - t_1$.*

Demonstração: Seja $\psi : [t_2, t_2 + c] \to \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por $\psi(t) = \varphi_x(t-c)$. Temos que ψ também é solução de (4), pois $\psi'(t) = \varphi_x'(t-c) = F(\varphi_x(t-c)) = F(\psi(t))$. Além disso, $\psi(t_2) = \varphi_x(c + t_1 - c) = \varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$. Mas em virtude da unicidade de soluções, tem-se $[t_2, t_2 + c] \subseteq I_x$ e $\varphi_x(t) = \varphi_x(t+c)$, para $t \in [t_1, t_2]$. Prosseguindo com o mesmo argumento, concluímos que $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Definição 3.1.8. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t,p); t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de F pelo ponto p, chama-se *órbita de F pelo ponto p*.

Note que $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$. De fato, se $q \in \gamma_p$, então, pela parte (b) do Teoerma 3.1.2, $q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t,q) = \varphi(t + t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_q$. Logo, duas órbitas de F ou coincidem ou são disjuntas.

Teorema 3.1.9. *Se φ_x é uma solução máxima de (4) em I_x, então verifica-se uma única das seguintes alternativas:*

(a) φ_x é injetiva;

(b) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é constante;

(c) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é periódica.

Demonstração: Se $\varphi_(x)$ não é injetiva, existem t_1 e t_2 em I_x, com $t_1 \neq t_2$, tais que $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$. Logo, pelo Corolário 3.1.7, $I = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in R$ e $c = t_2 - t_1 \neq 0$. Mostraremos que o conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; \varphi_x(t+c) = \varphi_t \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ que também é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. De fato, note que $0 \in C$, pois $\varphi_x(t+0) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, dado $c \in C$, temos que $\varphi_x(t-c) = \varphi_x(t-c+c) = \varphi_x(t)$ o que implica que $-c \in C$, e se $c, d \in C$, $c+d \in C$, pois $\varphi_x(t+c+d) = \varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$. Por outro lado, se $c_n \in C$ e $c_n \to c$, temos que $c \in C$. Com efeito,

$$\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t + \lim_{n\to\infty} c_n) = \varphi_x(\lim_{n\to\infty}(t+c_n)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_x(t+c_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_x(t) = \varphi_x(t)$$

No lema a seguir, demonstraremos que todo subgrupo aditivo C de $\mathbb{R}$ é descrito na forma $\tau\mathbb{Z}$, $\tau \geq 0$, ou então C é denso em $\mathbb{R}$. Como $C \neq \{0\}$ e C é fechado, segue que $C = \mathbb{R}$ ou $C\tau\tau\mathbb{Z}$, $\tau > 0$. Cada uma destas alternativas corresponde aos casos (b) e (c) do enunciado do teorema, respectivamente. $\square$

Lema 3.1.10. *Todo subgrupo aditivo $C \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}$ é da forma $C = \tau\mathbb{Z}$, com $\tau > 0$, ou C é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Como, por hipótese, $C \neq \{0\}$, então $C \cap \mathbb{R}_+ \neq 0$, onde $\mathbb{R}_+$ denota os reais positivos, pois existe $c \in C$, com $c \neq 0$, o que implica que c ou $-c$ está em $C \cap \mathbb{R}_+$. Seja $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Se $\tau > 0$, $C = \tau\mathbb{Z}$, pois se $c \in C - \tau\mathbb{Z}$, existe um único $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k\tau < c < (k+1)\tau$ e, portanto, $0 < c - k\tau < \tau$ e $c - k\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$, o que contraria o fato de $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Se $\tau = 0$, dado $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $c \in C$ tal que $|c - t| < \epsilon$, o que implica que C é denso em R. $\square$

Em particular, se γ é uma órbita de F, então cada caso do Teorema 3.1.9 corresponde, respectivamente, a cada uma das alternativas a seguir:

(a) γ é a imagem biunívoca de um intervalo de $\mathbb{R}$;

(b) γ é um ponto (neste caso, a órbita chama-se *ponto singular*);

(c) γ é difeomorma a um círculo.

Definição 3.1.11. O conjunto aberto U, munido da decomposição em órbitas de F, chama-se *retrato de fase de F*. As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo F e os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

3.2 Equivalência e Conjugação de Campos Vetoriais

Para compararmos campos vetoriais e seus retratos de fase utilizaremos as noções de conjugação e equivalência entre dois campos vetoriais, as quais serão introduzidas a seguir.

Definição 3.2.1. Sejam F_1, F_2 campos vetorias nos abertos U_1, U_2 de $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que F_1 é *topologicamente equivalente* (resp. C^k*-equivalente*) a F_2 quando existe um hemeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^k) $h : U_1 \to U_2$ que leva órbita de F_1 em órbita de F_2 preservando a orientação. O homeomorfismo h é chamado de *equivalência topólogica* entre F_1 e F_2

Definição 3.2.2. Sejam $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $F_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ respectivamente. Diz-se que F_1 é *topologicamente conjugado* (resp. C^k*-conjugado*) a X_2 quando existe o homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^k) $h : U_1 \to U_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$. O homeomorfismo h chama-se *conjugação topológica* (resp. C^k-conjugação) entre F_1 e F_2.

Neste último caso, tem-se necessariamente que $I_1(x) = I_2(h(x))$, onde I_x e $I_2(h(x))$ denotam os intervalos máximos das respectivas soluções máximas.

Observação 3.2.3. Ambas as definições apresentadas estabelecem um relação de equivalência entre campos definidos em abertos do R^n. Além disso, uma equivalência h entre F_1 e F_2 leva um ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. No caso em que h é uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.

Exemplo 3.2.4. Sejam $F_1 = (x, -y + x^3)$, $F_2 = (x, -y)$ e $U = \mathbb{R}^2$. Os fluxos de F_1 e F_2 são dados respectivamente por

$$\begin{cases} \varphi_1(t, (a, b)) = (ae^t, (b - \frac{a^3}{4})e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}) \\ \varphi_2(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t}) \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Note que $h : (a, b) \to (a, b + \frac{a^3}{4})$ é uma conjugação topológica entre F_1 e F_2, ou seja, h satisfaz $h(\varphi_2(t, p)) = \varphi_1(t, h(p))$, com $p \in \mathbb{R}^2$. De fato,

$$h(\varphi_2(t,(a,b))) = (ae^t, be^{-t} + \tfrac{a^3}{4}e^{3t})$$

e

$$\varphi_1(t, h(a,b)) = (ae^t, [(b + \tfrac{a^3}{4}) - \tfrac{a^3}{4}]e^{-t} + \tfrac{a^3}{4}e^{3t}) = (ae^t, be^{-t} + \tfrac{a^3}{4}e^{3t})$$

Lema 3.2.5. *Sejam $F_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $F_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ campos C^k e $h : U_1 \to U_2$ um difeomorfismo de classe C^r. Então, h é uma conjugação entre F_1 e F_2 se, e somente se,*

$$Dh(p)F_1(p) = F_2(h(p)), \qquad \forall p \in U_1 \tag{6}$$

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Sejam $\varphi_1 : D_1 \to U_1$ e $\varphi_2 : D_2 \to U_2$ os fluxos de F_1 e F_2, respectivamente. Suponhamos que h satisfaz (6). Dado $p \in U_1$, seja $\psi(t) = h(\varphi_1(t,p))$, $t \in I_1(p)$. Então ψ é solução do problema de Cauchy $x' = F_2(x)$, $x(0) = h(p)$, pois

$$\psi'(t) = Dh(\varphi 1(t,p)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi_1(t,p) = Dh(\varphi_1()t,p)F_1(\varphi_1(t,p)) =$$

$$= F_2(h(\varphi_1(t,p))) = F_2(\psi(t))$$

Portanto, $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$

($\Longrightarrow$) Supondo que h é uma C^r-conjugação, então dado $p \in U_1$, temos

$$h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$$

Derivando em relação a t em $t = 0$, obtemos

$$\mathrm{Dh}(\varphi_1(0,p)) \cdot \varphi_1'(0,p) = \varphi_2'(0, h()p) \Rightarrow$$

$$Dh(p)F_1(\varphi_1(0,p)) = F_2(\varphi_2(0, h(p))) \Rightarrow$$

$$Dh(p)F_1(p) = F_2(h(p))$$

$\square$

Definição 3.2.6. Sejam $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k com $k \geq 1$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e além disso $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \to U$ de classe C^r chama-se *seção transversal local de* F quando para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $F(f(a))$ geram o espaço $\mathbb{R}^n$. Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \to \Sigma$ for um homeomorfismo então Σ é uma *secão tranversal de* F.

Observação 3.2.7. Sejam $p \in U$ um ponto não singular e $\{v_1, \cdots, v_{n-1}, F(p)\}$ uma base de R^n. Seja $B(0, \delta)$ uma bola de R^{n-1} de centro na origem e raio $\delta > 0$. Para δ suficientemente pequeno, $f : B(0, \delta) \to U$ dada por $f(x_1, \cdots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ é uma seção transversal local de F em p.

Teorema 3.2.8 (Teorema de Fluxo Tubular)**.** *Seja p um ponto não singular do campo $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Então existe uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : (-\epsilon, \epsilon) \times B \to V$ de classe C^k, onde $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta em $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem, tal que h é uma C^k-conjugação entre o campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$ dado por $Y = (1, 0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e o campo $F|_V$.*

Demonstração: Seja $\varphi : D \to U$ o fluxo de F e considere $f : A \to U$ a seção transversal local, com A um aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$ contendo a origem e com $f : (0) = p$. Defina $D_A \subset \mathbb{R} \times A \subset \mathbb{R}^n$ com $D_A = \{(t, u); (t.f(u)) \in D\}$. Defina $\tilde{h} : D_A \to U$ por $\tilde{h}(t, u) = \varphi(t, f(u))$. Note que $\tilde{h}$ aplica linhas paralelas ao eixo t em curvas integrais de F.

Mostremos agora que $\tilde{h}$ é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Pelo Teorema da Função Inversa, é suficiente provar que $D\tilde{h}(0)$ é um isomorfismo. Temos

$$\partial_t \tilde{h}(0) = \frac{d}{dt} \varphi(t, f(0)) \Big|_{t=0} = F(\varphi(0, p)) = F(p)$$

$$\partial_u \tilde{h}(0) = D_u \varphi(0, f(0))|_{u=0} = D_u f(u)|_{u=0} = Df(0)$$

Como f é seção transversal, $F(p)$ e $Df(0)$ geram o espaço R^n, ou seja, formam um conjunto de vetores L.I. Logo, a matriz transformação de $D\tilde{h}(0)$ é invertível e, portanto, $D\tilde{h}(0)$ é um isomorfismo linear. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem $\epsilon > 0$ e uma bola B em $\mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem tais que $h = \tilde{h}_{(-\epsilon,\epsilon)\times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = \tilde{h}((-\epsilon, \epsilon) \times B)$.

Agora, só falta mostrar que h é uma conjugação entre os campos Y e $F|_V$.

$$\text{Dh(t,u)} \cdot Y(t, u) = Dh(t, u) \cdot (1, 0, \cdots, 0) = \partial_1 h(t, u) = \frac{d}{dt} \varphi(t, f(u)) =$$

$$F(\varphi(t, f(u))) = F(h(t, u))$$

Pelo Lema 3.2.5, h é uma conjugação de Y e $F|_V$. □

Em suma, o Teorema do Fluxo Tubular afirma que na vizinhança de pontos regulares existe um único modelo de comportamento local para as trajetórias. Segue, abaixo, um corolário do Teorema 3.2.8. A demonstração deste resultado está disponível em [1].

Corolário 3.2.9. *Seja Σ uma seção transversão de F. Para todo ponto $p \in \Sigma$, existem $\epsilon = \epsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\tau : V \to \mathbb{R}$ de classe C^k tais que $\tau(\Sigma \cap V) = 0$ e*

(a) para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t, q)$ de $F|_V$ é definida e biunívoca em $J_q = (-\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q))$;

(b) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)|J_q$ intercepta a seção Σ. Em particular, $q \in \Sigma \cap V \Leftrightarrow \tau(q) = 0$;

(c) $\xi : V \to \Sigma$ é de classe C^k e $D\xi(q)$ é sobrejetiva para todo $q \in V$. Além disso, $D\xi(q) \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \alpha F(q)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

O Corolário 3.2.9 será útil para dar precisão a definição da transformação de Poicaré ou transformação de primeiro retorno, a qual será apresentada na seção a seguir.

3.3 A Transformação de Poincaré

Sejam $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq T\}$ uma órbita periódica de período T do campo $F : U \to R^n$ de classe C^k, $k \geq 1$, e uma secão transversal Σ a F em p. Por causa da continuidade do fluxo φ de F, para todo $q \in \Sigma$ arbitrariamente próximo de p, a trajetória $\varphi(t, q)$ permanece próxima a γ, com t em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo $[0, 2T]$. Definamos $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita, partindo de q, volta a interceptar novamente a seção Σ. Seja Σ_0 o domínio de π.

Consideremos, agora, a vizinhança V de p dada pelo Corolário 3.2.9. Se necessário, restrinjamos Σ, de modo que $\Sigma = \Sigma \cap V$. Como $\varphi(T, p) = p$, então para todo $q \in \Sigma_0$, $\varphi(T, 0) \in V$. Seja $\xi : V \to \Sigma$ a aplicação dada pelo Corolário 3.2.9. A transformação de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \to \Sigma$ é dada pela expressão:

$$\pi(q) = \xi \circ \varphi(T, q)$$

Outra expressão para π é $\pi(q) = \varphi(T+\tau(\varphi(T,q)),q)$, onde $\tau : V \to \mathbb{R}$ é o tempo $\tau(x)$ que a órbita por x em V leva para interceptar a seção Σ. Do Teorema das Funções Implícitas, segue que τ é de classe C^k. Logo, π é da mesma classe de diferenciabilidade que F. Além disso, sua inversa $\pi^{-1} : \Sigma_1 \to \Sigma_0$, onde $\Sigma_1 = \pi(\Sigma_0)$, é definida tomando-se o campo $-F$. Assim, fica provado que π é um difeomorfismo de C^k.

Afirmação 3.3.1. *A transformação $\pi : \Sigma_0 \to \Sigma$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.*

A transformação π é útil para exibir muitas propriedades do retrato de fase de F perto de γ. Por exemplo, os pontos periódicos de π, que são pontos $q \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$, correspondem às órbitas periódicas de F que estão numa vizinhança de γ. A transformação de Poincaré também indica o comportamento assintótico das órbitas do campo F perto de γ . Assim, $\lim_{n\to\infty} \pi^n(q) = p$ implica $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$, onde $d(\varphi(t,q),\gamma) = \inf\{|\varphi(t,q) - r|, r \in \gamma\}$. Se $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ para todo q numa vizinhança de γ, dizemos que a órbita fechada γ é um *atrator periódico.*

3.4 Ciclos Limites no Plano

Definição 3.4.1. Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $F : U \to U$ um campo vetorial de classe C^1. Uma órbita periódica γ de F chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a unica órbita fechada de F que intercepta V.

Proposição 3.4.2. *Existem apenas os seguintes tipos de cliclos limites:*

(a) Estável, quando $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ *para todo* $q \in V$*;*

(b) Instável, quando $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ *para todo* $q \in V$*;*

(c) Semi-estável, quando $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ *para todo* $q \in V \cap Ext\,\gamma$*; e* $\lim_{t\to-\infty} d(\varphi(t,q),\gamma) = 0$ *para todo* $q \in V \cap Int\,\gamma$*, ou o contrário.*

Demonstração: Diminuindo a vizinhança V se necessário, podemos supor que ela não contém singulariedades. Sejam $p \in \gamma$ e Σ uma seção transversal a F em p. Seja $\pi : \Sigma_0 \to \Sigma$ a transformação de Poincaré. Suponhamos que Σ esteja ordenado, sendo o sentido positivo de Ext γ para Int γ. Dado $q \in \Sigma_0 \cap$ Ext γ, temos $\pi(q) > q$ ou $\pi(q) < q$. Sem perda de generalidade, suponhamos $\pi(q) > q$. Considere a região A limitada por γ, pelo arco de trajetória $\widehat{q\pi(q)}$ e pelo segmento $\overline{q\pi(q)} \subset \Sigma_0$. A região A é homeomorfa a um anel e positivamente invariante, ou seja, dado $x \in A$, $\varphi(t, x) \in A$ para todo $t \geq 0$. Isto segue pela unicidade de soluções e pela orientação das órbitas. Além disso, $\varphi(t, x)$ intercepta Σ numa sequência estritamente monótona de pontos x_n que converge para p. Concluí-se então que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$.

Se $\pi(q) < q$, considerando o campo $-F$, fica provado que $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$ para todo $x \in A$. Podemos fazer as mesmas considerações em Int γ. Basta agora combinar as possibilidades para concluir a demonstração. $\square$

Observação 3.4.3. Com as notações introduzidas na Proposição 3.4.2, temos que γ é um ciclo limite $\Leftrightarrow$ p é um ponto fixo isolado de π. Além disso,

(a) γ é estável $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p|\ \forall x \neq p$ próximo de p;

(b) γ é estável $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| > |x - p|\ \forall x \neq p$ próximo de p;

(c) γ é estável $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p|\ \forall x \in \Sigma \cap \text{Ext}\ \gamma$ próximo de p, e $|\pi(x) - p| > |x - p|$ $\forall x \in \Sigma \cap \text{Int}\ \gamma$ próximo de p ou o contrário.

Capítulo 4

4 Teorema de Poincaré-Bendixson

Neste capítulo, estudaremos o comportamento do conjunto de acumulação da órbita φ quando $t \to \infty$. Enunciaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson, considerado um dos primeiros resultados da Teoria Qualitativa das EDOs. Apresentaremos a versão do teorema para campos vetoriais definidos no plano, a qual estabelece apenas três padrões possíveis de comportamento para os conjuntos limtes das órbitas.

4.1 Conjuntos α-limite e ω-limite

Definição 4.1.1. Seja $F : U \to R^n$ um campo vetorial de classe C^k, $k \geq 1$, com U um subconjunto aberto do espaço euclidiano R^n. Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ a curva integral de F passando pelo ponto p, definida no intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = \infty$, definimos os seguintes conjuntos:

$$\omega(p) = \{q \in U, \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \to \infty \text{ e } \varphi(t_n) \to q, \text{ quando } n \to \infty\}.$$

De forma analoga, temos para $\omega_(p) = -\infty$

$$\alpha(p) = \{q \in U, \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \to -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \to q, \text{ quando } n \to \infty\}.$$

Chamamos então os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ de conjuntos ω-limite e α-limite de p, respectivamente. Observamos que se p é um ponto singular do campo F, então qualquer que seja o ponto p, $\alpha(p)$, $\omega(p) = \{p\}$, pois $\varphi(t) = p \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Além disso se γ_p é a órbita de F pelo ponto p e $q \in \gamma_p$, então $\omega(p) = \omega(q)$. De fato, se $q \in \gamma_p$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t,p) = \varphi(t+c,q)$.

Para estudar as propriedades gerais dos conjuntos α-limite e ω-limite é suficiente restringirmos o nosso estudo ao conjunto ω-limite. Com efeito, sejam $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ a curva integral do campo F pelo ponto p e $\psi(t) = \psi(t,p)$ a curva integral do campo $-F$ pelo ponto p, então $\psi(t,p) = \varphi(-t,p)$. Segue, portanto, que o conjunto ω-limite de $\psi(t)$ é igual ao conjunto α-limite de $\varphi(t)$.

Teorema 4.1.2. *Sejam $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de Classe C^k, $k \geq 1$ definido em $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma^+ = \{\varphi(t,p); t \geq 0\}$ a semiórbita positiva do campo F pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ está contida num subconjunto compacto $K \subset U$, então:*

(a) $\omega(p) \neq 0$ (respectivamente, $\alpha(p)$);
(b) $\omega(p)$ é compacto, (respectivamente $\alpha(p)$);
(c) $\omega(p)$ é invariante por F , isto é, se $q \in \omega(p)$, então a curva integral de F por q está contida em $\omega(p)$;
(d) $\omega(p)$ é conexo, (respectivamente, $\alpha(p)$).

Demonstração: Em virtude do que já foi observado anteriormente, é suficiente mostrar o teorema para o conjunto ω-limite.

(a) $\omega(p) \neq \emptyset$.

Seja $t_n = n \in \mathbb{N}$. Como $\{\varphi(t_n)\} \subset$ é compacto, existe uma subsequência $\{\varphi(t_{n_k})\}$ que converte para algum ponto $q \in K$. Então, $t_{n_k} \to \infty$, quando $n_k \to \infty$ e $\varphi(t_{n_k}) \to q$. Logo, $q \in \omega(p) \neq \emptyset$.

(b) $\omega(p)$ é compacto.

Como $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$, basta mostrar que $\omega(p)$ é fechado. Seja $q_n \to q$, $q_n \in \omega(p)$. Vamos mostrar que $q \in \omega(p)$. De fato, para cada $q_n \in \omega(p)$, existe uma sequência $\{t_m^{(n)}\}$ tal que $t_m^{(n)} \to \infty$ e $\varphi(t_m^{(n)}, p) \to q_n$, quando $m \to \infty$.

Tomemos, para cada sequência $\{t_m^{(n)}\}$, um ponto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ e tal que $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \leq \frac{1}{n} + d(q_n, q).$$

Segue, então, que $d(\varphi(t_n, p), q) \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, $\varphi(t_n, p) \to q$. Como $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, concluí-se que $q \in \omega(p)$.

(c) $\omega(p)$ é invariante por F.

Seja $q \in \omega(p)$ e seja $q_0 = \varphi(t_0, q)$. Como $q \in \omega$, existe $\varphi(t_n, p) \to q$ quando $t_n \to \infty$. Pela continuidade de φ, segue que

$$q_0 = \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n + t_0, p).$$

Note que a sequência $(s_n) = (t_n + t_0)$ é tal que $s_n \to \infty$ e $\varphi(s_n, p) \to q_0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $q_0 \in \omega(p)$.

(d) $\omega(p)$ é convexo.

Suponhamos, por absurdo, que $\omega(p)$ seja não convexo. Então existem A e B fechados e não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\omega(p) = A \cup B$. Como $A \neq \emptyset$, existe uma sequência $\{t'_n\}$ tal que $t'_n \to \infty$ e $\varphi(t'_n) \to a \in A$, quando $n \to \infty$. Analogamente, existe uma sequência $\{t''_n\}$ tal que $t''_n \to \infty$ e $\varphi(t''_n) \to b \in B$, quando $n \to \infty$. Seja $d = d(A, B) > 0$. Podemos construir uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e tal que $d(\varphi(t_n), A) < d/2$ e $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$ para todo n ímpar.

Como a função $g(t) = d(\varphi(t), A)$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, para todo n ímpar é contínua e $g(t_n) < d/2$ e $g(t_{n+1}) > d/2$, segue-se do teorema do valor intermediário que existe $\tilde{t_n}$, $t_n < \tilde{t_n} < t_{n+1}$ tal que

$$g(\tilde{t_n}) = d(\varphi(\tilde{t_n}), A) = d/2.$$

Desde que a sequência $\{\varphi(\tilde{t_n})\}$ está contida no compaco $Q = \{x \in U; d(x, A) = d/2\} \cap K$, $\{\varphi(\tilde{t_n})\}$ possui uma subsequência convergente, que denotaremos por $\{\varphi(\tilde{t_k})\}$. Seja $\tilde{p} = \lim_{k\to\infty} \varphi(\tilde{t_k})$. Então $\tilde{p} \in \omega(p)$. Mas $\tilde{p} \notin A$, pois $d(\tilde{p}, A) = d/2 > 0$; além disso, $\tilde{p} \notin B$, pois $d(\tilde{p}, B) \geq d(A, B) - d(\tilde{p}, A) = d/2 > 0$. Portanto, chegamos a uma contradição e o resultado está demonstrado. $\square$

Corolário 4.1.3. *Nas condições do Teorema (4.1.2), se $q \in \omega(p)$, então a curva integral de F, pelo ponto q, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como $\omega(p)$ é compacto e invariante, então a órbita de F passando por q está contida no compacto $\omega(p)$. Portanto, pelo Corolário (3.1.5), a órbita está definida em todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Segue, abaixo, o enunciado do Teorema de Poincaré-Bendixson. Sua demonstração está disponível em [3], bem como a demonstração dos lemas que facilitam a prova deste resultado.

Teorema 4.1.4. ***Teorema Poincaré-Bendixson*** *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X, definida para todo $t \leq 0$, tal que γ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset \Omega$. Suponha também que o campo X possua um número infinito de singularidade em $\omega(p)$. Então, tem-se as seguintes afirmativas:*

(a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

(b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \to +\infty$

(c) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

Capítulo 5

5 Método Averaging

Neste capítulo, introduzimos o método averaging e apresentamos uma aplicação deste método ao problema de encontrar ciclos limites (especificar o problema do meu TCC). Antes, fazemos um breve resgate histórico acerca dos problemas e matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desta teoria.

5.1 Introdução

A construção do método Averaging remonta ao século XVII, mais especificamente ao ano de 1687, quando Sir Isaac Newtoun apresentou a lei da gravitação universal. A teoria de Newton, que descreve a força de atração entre dois corpos, não solucionou o problema de descrever o movimento de três ou mais corpos interagindo entre si. Como as equações que regem o movimento destes corpos não podem ser resolvidas analiticamente, a alternativa encontrada para superar este obstáculo foi procurar aproximações das soluções, usando, para este fim, as famosas séries de potências.

Paralelalmente ao problema mencionado, o matemático francês Pierre Simon Laplace apresentou, em 1773, o que é considerado o primeiro resultado sobre a estabilidade do sistema solar. Seus trabalhos, assim como os de outros matemáticos, tais como Lagrange e Clairaut, já apresentavam vários elementos e ideias que estão presentes hoje na teoria do Averaging. Mais tarde, no século XIX, Henri Poincaré provou o resultado que compõe atualmente o escopo do Averaging. Considerando o problema de determinar órbitas periódicas por meio de expansões em série com respeito a um parâmetro pequeno, Poincaré mostrou que é possível descrever soluções periódicas usando séries convergentes em potências inteiras de um certo parâmetro ϵ onde os coeficientes são funções limitadas no tempo.

No século passado, o primeiro teorema do Averaging foi apresentado, formalizando a teoria, que passou a ser amplamente usada na abordagem de diversos problemas, como o *16º Problema de Hilbert*, apresentado pelo matemático alemão David Hilbert no 2º Congresso Internacional de Matemáticos, em 1900, na cidade de Paris. O problema é constituído de duas partes; a que cabe à teoria dos sistemas dinâmicos consiste em detrminar o número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial planar de grau n. Apesar dos inúmeros trabalhos desenvolvidos no último século sobre o tema, o problema de Hilbert ainda não foi solucionado.

Mais recentemente (2004), uma nova versão do teorema foi elaborada pelo matemático espanhol Jaume Llibre e pela romena Adriana Buica, ampliando a classe de problemas nos quais o método pode ser aplicado.

5.2 O Método Averaging

Vamos enunciar o teorema de Averaging de primeira ordem e, em seguida, apresentar uma aplicação deste método na equação de Van der Pol. Lidaremos com o problema de valor inicial que se encontra na forma padrão, ou seja, que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon F(t,x) + \epsilon^2 R(t,x,) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Supondo F T-periódica na variável t, podemos considerar o sistema médio dado por:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \epsilon F^1(y) \\ y(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{8}$$

onde

$$F^1(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t,y)dt$$

Assim, pretendemos relacionar as soluções de (7) com as soluções do sistema promediado (8). Segue abaixo o enunciado do teorema do Averaging clássico. Para a demonstração do teorema, veja (colocar referência).

Teorema 5.2.1. *Considere os problemas de valor inicial* (7) *e* (8) *com* $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon]$. *Suponha que*

1. *F_1, R e ∇f estão definidas, são contínuas e limitadas por uma costante M independente de ϵ em $[t_0, \infty] \times D$;*

2. R é lipszchitziana em $x \in D$;

3. F é T-periódica em T, com T costante independente de ϵ;

4. $y(t)$ pertence a um subconjunto interior de D no tempo escala $1/\epsilon$.

Então,

$$x(t) - y(t) = o(\epsilon)$$

quando $\epsilon \to 0$ no tempo escala $1/\epsilon$.

Equação de Van der Pol: Considere a equação

$$\ddot{x} + x = -\epsilon(1 - x^2)y.$$

Podemos formar o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\epsilon(1 - x^2)y - x. \end{aligned} \tag{9}$$

Fazendo a alteração das variáveis x e y para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} x = r\cos\theta &\quad\Rightarrow\quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta &\quad\Rightarrow\quad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

.

Substituindo em (9), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= -\epsilon(1 - r^2\cos^2\theta)r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

O sistema (10) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon(1 - r^2\cos^2\theta)r\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ \dot{\theta} &= -\epsilon(1 - r^2\cos^2\theta)r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 1 \end{aligned}$$

Tomando θ como a variável independente, podemos escrever

$$\dot{z} = \frac{dr}{d\theta} = \epsilon(1 - r^2\cos^2\theta)r\,\mathrm{sen}^2\,\theta + o(\epsilon^2)$$

Note que a equação acima está escrita na forma padrão, portanto, podemos aplicar o método Averaging para determinar o número de ciclos limites da equação de Van der Pol. Pelo Teorema (5.2.1), basta encontrar os zeros simples de

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - r^2\cos^2\theta)r\,\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta$$

Calculando a integral acima, temos que $F(r) = -\dfrac{1}{8}\pi^2 r(r^2 - 4)$. Os zeros deste polinômio são $r = 0$ e $r = \pm 2$, ou seja, a única solução válida é $r = 2$. Portanto, o sistema inicial possui um ciclo limite, como esperado para a equação de Van der Pol.

5.3 Equações de Kukles

Nesta seção, vamos determinar o número máximo de ciclos limites do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \epsilon(f_{n_1}(x) + g_{n_2}(x)y + h_{n_3}(x)y^2 + dy^3) \end{aligned} \tag{11}$$

aplicando o método Averaging clássico de primeira ordem. Inicialmente, vamos estudar o caso geral em que f_{n_1}, g_{n_2} e h_{n_3} são polinômios de graus n_1, n_2 e n_3, respectivamente. Em seguida, estudaremos casos particulares do sistema acima atribuindo valores para n_1, n_2 e n_3 e apresentando alguns exemplos.

Teorema 5.3.1. *Considere o sistema* (11)*, onde* $f_{n_1}(x)$*,* $g_{n_2}(x)$*,* $h_{n_3}(x)$ *são polinômios em* x *de grau* n_1*,* n_2 *e* n_3*, respectivamente e* d *é um número real diferente de zero. Então, para* $|\epsilon|$ *arbitrariamente pequeno, o número máximo de ciclos limimtes do sistema diferencial polinomial de Kukles acima, usando a teoria do Averaging de primeira ordem, é* $\max\{[\frac{n_2}{2}, 1]\}$.

Demonstração: A prova do Teorema (5.3.1) é baseada na teoria do Averaging de primeira ordem dada pelo Teorema (5.2.1).

Inicialmente, escrevamos $f_{n_1}(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i$, $g_{n_2}(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i$ e $h_{n_3}(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i$. Por meio da mudança de variáveis $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, assumindo $r > 0$, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon \sin\theta P(r,\theta) \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\epsilon}{r}\cos\theta P(r,\theta) \end{aligned} \tag{12}$$

onde

$$P(r,\theta) = dr^3 \sin^3\theta + \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^i\theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^i \cos^i\theta r \sin\theta + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^i \cos^i\theta r^2 \sin^2\theta$$

Agora, tomando θ como a variável independente, o sistema (12) pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \sin\theta P(r,\theta) + o(\epsilon^2) = \epsilon F_1(r,\theta) + o(\epsilon^2)$$

que é a forma padrão para a aplicação do método Averaging de primeira ordem. Então, pelo Teorema (5.2.1), temos que

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta P(r,\theta) d\theta.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos^k\theta \sin\theta d\theta = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots \\ &\int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}\theta \sin^2\theta d\theta = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots \\ &\int_0^{2\pi} \cos^{2k}\theta \sin^2\theta d\theta = \alpha_{2k} \neq 0, \qquad k = 0, 1, \cdots \\ &\int_0^{2\pi} \cos^k\theta \sin^3\theta d\theta = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots \\ &\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

Segue que

$$F(r) = \frac{3}{8}dr^3 + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n_2} b_i\alpha_i r^{i+1}, \qquad i \text{ par.}$$

Logo, o polinômio $F(r)$ possui no máximo $\max\{[\frac{n_2}{2}, 1]\}$ raízes positivas e o teorema está provado. $\square$

Note que o polinômio $F(r)$ independe dos polinômios f_{n_1} e h_{n_3}. Além disso, podemos escolher os coeficientes b_i, com i par, de modo que $F(r)$ tenha exatamente duas raízes reais positivas. Agora, estudaremos alguns casos particulares do sistema (11) atribuindo valores a n_2 e apresentando exemplos quando o sistema possui exatamente $\dfrac{n_2}{2}$ ciclos limites.

1º Caso: $n_2 = 4$

Como $F(r)$ independe de f_{n_1} e h_{n_3}, vamos tomar $f_{n_1} = h_{n_3} = 0$. Assim,

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \left(\sum_{i=0}^{n_2} b_i r^i \cos^i\theta r\sin\theta + dr^3\sin^3\theta\right) d\theta \Rightarrow$$

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(dr^3\sin^2\theta + b_0 r + b_1 r^2\cos\theta + b_2 r^3\cos^2\theta + b_3 r^4\cos^3\theta + b_4 r^5\cos^4\theta)d\theta \Rightarrow$$

$$F(r) = \frac{b_4 r^5 + 2b_2 r^3 + 6dr^3 + 8b_0 r}{16} \Rightarrow \tag{13}$$

$$F(r) = \frac{r(b_4 r^4 + r^2(2b_2 + 6d) + 8b_0)}{16}$$

Temos que $r = 0$ é uma das raízes deste polinômio. Para encontrar as demais raízes, precisamos fazer $b_4 r^4 + r^2(2b_2 + 6d) + 8b_0 = 0$. Tomando $r^2 = t$, temos

$$b_4 t^2 + t(2b_2 + 6d) + 8b_0 = 0$$

.

A equação acima possui, no máximo, duas soluções positivas. Assim, $F(r)$ possui no máximo dois zeros positivos e, portanto, o sistema (11) com $n_2 = 4$ possui $\max\{[2,1]\}$ como era de se esperar pelo Teorema (5.3.1).

Alguns sistemas Kukles possuem exatamente dois ciclos limites. O exemplo abaixo ilustra este tipo de caso.

Exemplo 5.3.2. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon[(1 + x + x^3 + x^4)y - y^3] \end{cases}$$

Neste caso, temos $b_0 = 1$, $b_2 = 0$, $b_4 = 1$ e $d = -1$. Então, por (13), o polinômio $F(r)$ é dado por

$$F(r) = \frac{r^5 - 6r3 + 8r}{16} = \frac{r(r^4 - 6r2 + 8)}{16}$$

As raízes deste polinômio são $r = 0$, $r = \pm 2$ e $r = \pm\sqrt{2}$, ou seja, $F(r)$ tem exatamente duas raízes positivas ($r = 2$ e $r = \sqrt{2}$) e, portanto, o sistema possui dois ciclos limites.

2º Caso: $n_2 = 6$

Para o caso em que g_{n_2} é de grau 6, temos que

$$F(r) = \frac{5b_6r^7 + 8b_4r^5 + 2b_2r^3 + 6dr^3 + 8b_0r}{128} \Rightarrow \tag{14}$$

$$F(r) = \frac{r(5b_6r^6 + 8b_4r^4 + 2b_2r^2 + 6dr^2 + 8b_0)}{128}$$

Temos que $r = 0$ é uma das raízes deste polinômio. Para encontrar as demais raízes, precisamos igualar $5b_6r^6 + 8b_4r^4 + 2b_2r^2 + 6dr^2 + 8b_0$ a zero. Tomando $r^2 = t$, temos

$$5b_6t^3 + 8b_4t^2 + 2b_2t + 6dr + 8b_0 = 0$$

A equação acima possui, no máximo, três soluções positivas. Assim, $F(r)$ possui no máximo três zeros positivos e, portanto, o sistema (11) com $n_2 = 6$ possui $\max\{[2,1]\}$, confirmando o resultado que já era esperado pelo Teorema (5.3.1).

Exemplo 5.3.3. Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x - \epsilon[(-1 + -\frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^6)y - \frac{7}{6}y^3]\end{aligned}$$

Neste caso, temos $b_0 = -1$, $b_2 = 0$, $b_4 = -\frac{7}{4}$, $b_6 = \frac{1}{5}$ e $d = -\frac{7}{6}$. Então, por (14), o polinômio $F(r)$ é dado por

$$F(r) = \frac{r^7 - 14r^5 + 56r^3 - 64r}{128} = \frac{r(r^6 - 14r^4 + 56r^2 - 64)}{128}$$

As raízes deste polinômio são $r = 0$, $r = \pm 2$, $r = \pm\sqrt{2}$ e $r = \pm 2\sqrt{2}$, ou seja, $F(r)$ tem exatamente três raízes positivas ($r = 2$, $r = \sqrt{2}$ e $r = 2\sqrt{2}$) e, portanto, o sistema possui três ciclos limites.

Conclusão

A primeira parte do projeto, focada no estudo teórico conforme descritos ao longo do relatório, foi de fundamental importância e serviu como base para o estudo do Método de Averaging*. No desenvolvimento da segunda etapa, ao efetuar os estudos da Teoria de* Averaging *viu-se como uma excelente ferramenta para obter o número máximos de ciclos limites em sistemas planares perturbados por uma classe específica de sistemas diferenciais polinomiais de kukles. Concluimos que o número máximo nessas condições podem ser* $\max\{[\frac{n_2}{2}], 1\}$ *como mostrado no Teorema 5.3.1. Além disso, o projeto serviu como complemento de estudo para a graduação pois contempla conteúdos que não foram abordados na formação. Outro fator importante foi o desenvolvimento e aprendizagem na utilização dos softwares LaTeX e Mathematica que são ferramentas fundamentais para elaboração de relatórios, gráficos e cálculos númericos.*

Referências

[1] CASTRO JUNIOR, A. A., *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias. 1. ed., 2009. 253p.*

[2] LLIBRE, J. MEREU, A. C. O., *Limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems. Nonlinear Analysis, v. 74, p. 1261-1271, 2011.*

[3] SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1979.*