UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Giovana Amelini Faria

EXPLORANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA DE MATERIAIS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE DOBRADURA

Sorocaba - São Paulo

2023

Giovana Amelini Faria

EXPLORANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA DE MATERIAIS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE DOBRADURA

Monografia de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba.

Orientação: Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior

Giovana Amelini Faria Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior

Sorocaba – São Paulo

2023

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 5/2023/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GIOVANA AMELINI FARIA

EXPLORANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA DE MATERIAIS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO-SE DE DOBRADURA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 06 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior
Membro da Banca 1	Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Membro da Banca 2	Profa. Dra. Graciele P. Silveira

Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira**, **Docente**, em 06/04/2023, às 16:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Pompeu Junior**, **Docente**, em 07/04/2023, às 18:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina de Oliveira Mereu**, **Docente**, em 07/04/2023, às 19:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1003458** e o código CRC **0D26BAF3**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.015715/2020-57

SEI nº 1003458

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTO

Gostaria de começar agradecendo primeiramente à Deus, o qual esteve ao meu lado durante essa jornada. À minha família: Tânia Margarete Amelini Faria (Mãe), José Alves Faria (Pai) e Amanda Amelini Faria (Irmã), que nunca me deixaram desistir dessa caminhada e desse sonho de concluir a graduação. Hoje estou vivendo um momento que sonhei por anos e eu não seria capaz de completar essa jornada sem o apoio de cada um. Pais vocês sempre serão minha inspiração e meu exemplo, agradeço a educação que me proporcionaram.

Me lembro de todas as vezes que estava desanimada e vocês me encorajavam a ir além, a não desistir e permanecer firme na caminhada. Se hoje eu posso realizar esse sonho é totalmente graças a vocês. Minha eterna gratidão e meu eterno amor, meus queridos pais.

Agradeço à Raul Moreira Lozano, que foi um companheiro fundamental nessa jornada final de minha graduação, sempre me apoiando e me incentivando a ir atrás dos meus sonhos.

Ao querido Professor Geraldo Pompeu Junior, por acreditar em mim, por me incentivar, pela orientação, pela amizade e por toda dedicação para que esse trabalho se realizasse. Estendo meu agradecimento a todos os professores do departamento de Matemática, o qual contribuíram para minha formação e construção do conhecimento.

À todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse onde estou, meu muito obrigada.

RESUMO

AMELINI, Giovana. Explorando o Teorema de Pitágoras: uma análise crítica de materiais didáticos e uma proposta de ensino utilizando-se dobradura. Monografia de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba. Sorocaba, 2023.

A Geometria é um ramo da matemática que tem importância fundamental para a formação intelectual dos estudantes. O objetivo central dessa pesquisa foi propor um plano de aula para o ensino do Teorema de Pitágoras através de dobraduras. Os objetivos secundários foram realizar uma análise crítica sobre a abordagem da Geometria, especialmente do Teorema de Pitágoras, nos materiais didáticos do Governo do Estado de São Paulo. Além disso, realizei uma análise sobre a abordagem do Teorema de Pitágoras e das dobraduras nos materiais propostos pela Olímpiada Brasileira de Matemática (OBMEP). Baseando-se nesses dois materiais propus um plano de ensino, preocupando-se com o uso da metodologia lúdica e dobraduras. Sabe-se que o Teorema de Pitágoras está presente em diversos assuntos da matemática como em questões dos vestibulares brasileiros e, portanto, devemos proporcionar o ensino significativo deste tema para tornar a jornada dos alunos mais relevante. Portanto, torna-se também compromisso principal desse trabalho a responsabilidade com a educação matemática de nossos alunos, criar possibilidades para que sejam protagonistas na construção do seu conhecimento. Esse trabalho foi uma análise e proposta teórica, não sendo aplicado em ambiente escolar, portanto, os resultados colhidos são, meramente, de caráter técnico e analítico. Pode-se concluir que os materiais da OBMEP apresentam os conteúdos demonstrando a importância do formalismo matemático, além de propor atitudes lúdicas para trabalhar com os alunos. Os materiais do Estado de São Paulo apresentam um número expressivo de exercícios, no entanto, não há a sugestão de atividades lúdicas. Os materiais da OBMEP serviram de inspiração para a elaboração dos planos de ensino.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teorema de Pitágoras. Dobraduras. Ensino lúdico.

ABSTRACT

AMELINI, Giovana. Exploring Pythagoras' theorem: a critical analysis of didactic materials from the state of São Paulo and a teaching proposal using folding. Monograph of completion of a bachelor's degree in Mathematics - Federal University of São Carlos, Sorocaba Campus. Sorocaba, 2023.

Geometry is a branch of mathematics that is of fundamental importance for the intellectual formation of students. The main objective of this research was to propose a lesson plan for teaching the Pythagorean Theorem through folding. The secondary objectives were to carry out a critical analysis of the Geometry approach, especially the Pythagorean Theorem, in the didactic materials of the Government of the State of São Paulo. In addition, I carried out an analysis on the approach of the Pythagorean Theorem and folding in the materials proposed by the Brazilian Mathematical Olympiad (OBMEP). Based on these two materials, I proposed a teaching plan, concerned with the use of playful methodology and folding. It is known that the Pythagorean Theorem is present in several subjects of Mathematics as in questions of the Brazilian entrance exams and, therefore, we must provide the significant teaching of this subject to make the journey of the students more relevant. Therefore, the main commitment of this work also becomes the responsibility for the mathematics education of our students, creating possibilities for them to be protagonists in the construction of their knowledge. This work was an analysis and theoretical proposal, not being applied in a school environment, therefore, the results collected are merely of a technical and analytical nature. It can be concluded that the OBMEP materials present contents demonstrating the importance of mathematical formalism, in addition to proposing playful attitudes to work with students. The materials from the State of São Paulo present a significant number of exercises, however, there is no suggestion of recreational activities. The OBMEP materials served as inspiration for the preparation of teaching plans.

Keywords: Mathematics Education. Pythagoras’ Theorem. Folding. Playful Teaching.

Índice de Figura

Índice de Quadros

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Começo esse trabalho citando a Constituição Federal de 1988, na qual em seu artigo 205, reconhece a educação como direito fundamental compartilhado entre Estado, família e sociedade. Torna-se, assim, objetivo principal dessa dissertação o compromisso com a educação matemática.

> "A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1988)"

Atualmente é de grande importância reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural. Ser comunicativo, crítico, analítico, participativo, aberto ao novo e responsável exige mais do que o acúmulo de informações. Desenvolver determinadas competências é fundamental para aprender a gerir informações, cada vez mais disponível, para atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais. Saber aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades é essencial para a convivência em sociedade.

Nesse sentido, destaco a importância da escola na sociedade assim como o papel do professor na sociedade o qual é o de maior importância atualmente e a qualidade de sua formação irá impactar diretamente na sala de aula e no futuro da sociedade. No Brasil, essa profissão é pouco procurada e, muitas vezes, pouco valorizada e há o esquecimento de que o professor é o formador de todas as outras profissões, além de ser a pessoa com a qual o aluno passa a maior parte do dia. A fim de contribuir com o ambiente escolar e com a minha formação escolhi a área da educação para o desenvolvimento do meu trabalho de conclusão do curso.

Inicio com uma indagação: o que você lembra quando pensa em Grécia? Provavelmente guerras, combates, arquitetura, arte e entre outros. Mas, para os amantes de números, lembrar da Grécia é pensar em matemática, em especial, Pitágoras. Principalmente conhecido na sociedade ocidental, por nomear o famoso Teorema de Pitágoras e pela Escola Pitagórica a qual estudava a racionalidade e a busca pela perfeição na matemática. Pitágoras foi um filósofo e matemático grego que viveu no século VI a.C. Acredita-se que ele tenha nascido na ilha de Samos, na costa da Ásia Menor. Ele acreditava que a matemática era a chave para entender o universo e desenvolveu uma série de teoremas e fórmulas que ainda são estudados e aplicados hoje em dia. Além de suas contribuições para a matemática e a filosofia, a Fraternidade

Pitagórica também enfatizava a importância da ética e da moralidade, ensinando a seus seguidores a importância do autocontrole e da moderação.

Uma curiosidade interessante sobre o Teorema de Pitágoras é que existem evidências de que o teorema era conhecido pelos antigos babilônios e egípcios muito antes do tempo de Pitágoras. No entanto, Pitágoras é creditado com a descoberta do teorema porque ele foi o primeiro a provar matematicamente a sua validade. Além disso, Pitágoras e seus seguidores desenvolveram uma série de aplicações e generalizações do teorema que ajudaram a estabelecer a geometria como uma disciplina matemática.

Outra curiosidade interessante é que o Teorema de Pitágoras tem muitas aplicações práticas na vida cotidiana, como em arquitetura, construção, engenharia e design. Por exemplo, o teorema pode ser usado para calcular a distância entre dois pontos em um mapa, para encontrar o comprimento da diagonal de uma tela de televisão ou para determinar a altura de um edifício com base na sombra que ele projeta no chão.

O enunciado do teorema nos diz que "o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos" e sua primeira prova conhecida encontra-se no livro "Os elementos de Euclides", conhecido como o pai da Geometria.

Embora o Teorema de Pitágoras tenha sido proposto e demonstrado pela primeira vez há muitos anos, há, hoje, muitas demonstrações e provas diferentes para ele. No livro The "Pythagorean Proposition", a autora Elisha Scott Loomis, elenca 370 provas e demonstrações de como aplicá-lo, assim como há um documentário chamado "O legado de Pitágoras", o qual mostra as demonstrações práticas e suas aplicações diretas. Desde já, recomendo aos professores, formados e em formação, a pesquisa e o recorte de alguns episódios desse documentário para apresentação aos alunos. No decorrer desse trabalho estudaremos algumas dessas diversas aplicações e proporemos um plano de algumas aulas para a abordagem desse tema.

Portanto, este trabalho possui como base de pesquisa os materiais da "Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública" (OBMEP), visando identificar o que é proposto para o tema em questão, bem como os materiais do Estado de São Paulo, objetivando identificar as congruências e discrepâncias entre tais materiais. Ao final, ao comparar tais materiais analisados, uma proposta de trabalho para sala de aula, sobre o tema Teorema de Pitágoras através de uma abordagem baseada em dobraduras, será formalizada, em minha visão de aluna formanda do Curso de Graduação de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Campus Sorocaba.

Os planos de ensino propostos, possuem embasamento na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento elaborado pelo Ministério da Educação (MEC) que estabelece as diretrizes e objetivos da educação básica no Brasil. A BNCC define as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio. A BNCC foi aprovada em 2017 e desde então tem sido implementada gradualmente nas escolas públicas e privadas do país. Ela também serve como referência para a elaboração de currículos pelas redes de ensino e escolas particulares, que devem adaptar as suas propostas pedagógicas de acordo com as diretrizes estabelecidas pela BNCC.

Deste modo, o objetivo central deste trabalho é propor um plano de ensino, sobre o Teorema de Pitágoras utilizando-se do recurso da dobradura. Como principais questões a serem respondidas nesse TCC inclui-se: Como os materiais didáticos do Estado de São Paulo apresentam o teorema de Pitágoras? Há uma preocupação em propor atividades lúdicas aos alunos em tais materiais didáticos? É possível utilizar os materiais fornecidos pela OBMEP sobre o tema e utilizando-se de dobraduras, para a proposta de atividades didáticas?

Este trabalho apresenta no capítulo 2 a fundamentação teórica, contemplando a BNCC e o conceito de atividades lúdicas. No Capítulo 3 apresenta-se as metodologias e métodos. Já no Capítulo 4 apresenta-se os materiais analisados, incluindo o material fornecido pelo Estado de São Paulo e as apostilas fornecidas pela OBMEP. No capítulo 5 há a proposta dos planos de ensino. E, por fim, o Capítulo 6 traz as conclusões do trabalho realizado.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A “Base Nacional Comum Curricular” (BNCC) tem o objetivo de fornecer uma única Base para toda a Educação Brasileira, garantindo um conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes. A BNCC está em conformidade com o “Plano Nacional de Educação” (PNE) e é um documento aplicável exclusivamente à educação escolar definido pela “Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional” (LDB, Lei n°9394/1996). A BNCC torna-se um instrumento fundamental no que tange a garantia de acesso e permanência nas escolas, além disso na garantia de aprendizagem comum a todos os estudantes do país. Os assuntos na BNCC são apresentados através de competências e habilidades. Segundo a BNCC:

> “(...) competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), enquanto habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), são definidas como atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.” (BNCC, 2017, p. 08)

Pode-se dizer que o enfoque da BNCC é formalizar aquilo que os alunos devem saber durante a jornada escolar, através do desenvolvimento de habilidades, atitudes e valores. Utilizei a BNCC para analisar as competências e habilidade relacionadas ao Teorema de Pitágoras no ensino básico.

A BNCC apresenta as competências que devem ser trabalhadas ao longo de toda a Educação Básica. Para o Ensino Fundamental são apresentadas as áreas do conhecimento e as habilidades específicas de cada área. Já para o Ensino Médio são apresentas as áreas do conhecimento a serem trabalhadas e competências específicas para cada área do conhecimento, as competências específicas possuem um conjunto de habilidades relacionadas.

Há competências gerais estabelecidas para a área da matemática, essas competências são trabalhadas ao longo de todas as etapas da educação básica e são essenciais para o desenvolvimento de uma formação matemática sólida e de qualidade. As competências matemáticas definidas na BNCC são:

1. Utilizar o raciocínio lógico, a criatividade, a intuição e a capacidade de resolver problemas para solucionar situações cotidianas e desafios matemáticos.

2. Compreender, aplicar e relacionar conceitos matemáticos para interpretar, analisar e resolver problemas, tanto na vida cotidiana quanto em outras áreas do conhecimento.

3. Comunicar ideias e soluções matemáticas de forma clara e coerente, utilizando diferentes linguagens, como a matemática, a verbal, a visual e a digital.

4. Reconhecer e valorizar a importância da matemática para a compreensão do mundo e para a vida em sociedade, identificando as suas aplicações e as suas contribuições para outras áreas do conhecimento.

5. Desenvolver atitudes de curiosidade, investigação, rigor, perseverança e criatividade na resolução de problemas matemáticos e na construção de conhecimentos."

Com a unidade temática de geometria podemos estudar: posição e deslocamento no espaço, bem como, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais para desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Espera-se dos alunos que, ao final do Ensino Fundamental, identifiquem características das formas geométricas bi e tridimensionais, associando as figuras tridimensionais às suas planificações. Espera-se ainda que, o aluno nomeie e compare polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos.

Embora o papel relevante do estudo da geometria não deva ser questionado, ela não deve ficar restrita a aplicações de fórmulas, especialmente voltada ao Teorema de Pitágoras. Torna-se necessário novas abordagens de ensino, buscando maneiras de solucionar os problemas sem o auxílio de fórmulas prontas e enunciadas sem seus devidos "porquês".

Por fim, destaco dois temas recorrentes na BNCC, o letramento matemático e os processos matemáticos. O letramento matemático se refere à capacidade de compreender, utilizar e comunicar informações matemáticas de forma eficaz e significativa no mundo atual, onde a matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana. Para desenvolver o letramento matemático, é necessário que os estudantes aprendam a relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento e com situações cotidianas, além de compreenderem os conceitos matemáticos fundamentais e as relações entre eles. Enquanto processo matemático é o conjunto de habilidades e estratégias que uma pessoa utiliza para solucionar problemas matemáticos de forma eficiente e precisa. Esses processos envolvem diversas etapas, como compreensão, investigação, representação, cálculo, verificação e comunicação. Os processos matemáticos também são importantes para a construção do pensamento crítico, da argumentação e da comunicação clara e coerente, habilidades que são fundamentais para a participação ativa e crítica na sociedade atual.

2.2. ATIVIDADES LÚDICAS

A sociedade passou por diversas transformações ao longo dos anos, décadas e séculos, sem, no entanto, o processo de ensino e aprendizado ter-se modificado com a mesma intensidade. Desta forma, neste trabalho exemplifiquei, através de um breve plano de ensino, como o processo de ensino e aprendizagem pode se dar de forma mais lúdica e envolvente aos alunos.

Primeiramente, vou conceituar o entendimento do termo "lúdico". De acordo com o Dicionário Etimológico online o significado de lúdico é: "relativo a jogos, brinquedos ou divertimento. Relativo a qualquer atividade que distrai ou diverte. Relativo a brincadeiras e divertimentos, como instrumento educativo".

Dohme (2003, p.11) chama a atenção que uma atividade lúdica não se limita a uma atividade livre de recreação.

> "(...) o brincar não se restringe às atividades agitadas e barulhentas que acontecem, às vezes de forma desorganizada, no pátio da escola. Mas que podemos considerá-lo como todas as atividades que são espontâneas nas crianças, que lhe dão prazer, que pertencem ao seu mundo"

Ao falarmos da utilização de atividades lúdicas na matemática, não devemos voltar o olhar para um passatempo ou uma simples diversão. Devemos sim, compreender que o lúdico possibilita o entendimento de novos conteúdos, além do desenvolvimento da criatividade. O objetivo é educar e ensinar de forma prazerosa e divertida.

O recreativo é diferente do lúdico, pois o recreativo busca a diversão sem obter resultados, enquanto o lúdico se caracteriza pela existência de objetivos, em nosso contexto escolar o objetivo é o da aprendizagem. É impossível desenvolver uma fórmula mágica e tornar qualquer conteúdo mais prazeroso de ser ensinado. Este trabalho possui como fundamento a matemática lúdica.

> "(...) os jogos e as atividades lúdicas tornam-se significativas à medida que a criança se desenvolve, com a livre manipulação de materiais variados, ela passa a reconstituir reinventar as coisas, que já exige uma adaptação mais completa. Essa adaptação só é possível, a partir do momento em que ela própria evolui internamente, transformando essas atividades lúdicas, que é o concreto da vida dela, em linguagem escrita que é o abstrato" (PIAGET, 1975, p. 156).

Diante das conhecidas dificuldades do ensino da matemática, entendemos que é possível e desejável buscar, na escola, desenvolver atividades lúdicas que articulem o prazer e a diversão do aluno com a possibilidade de uma aprendizagem mais significativa. Buscando trazer uma visão, rompendo a uma crença de que a matemática é uma ciência exata, formal e abstrata e que leva a uma prática educacional desligada da realidade. Almeida (1995) define educação lúdica como “uma ação inerente na criança, adolescente, jovens e adultos (‘) surgindo(‘) sempre como uma forma transacional em direção a algum conhecimento, que se redefine na elaboração constante do pensamento individual em permutações constantes com o pensamento coletivo”. O autor ainda acrescenta que educar ludicamente “combina e integra a mobilização das relações funcionais ao prazer de interiorizar o conhecimento e a expressão de felicidade que se manifesta na interação com os semelhantes” (p.11).

O emprego de atividades lúdicas permite maior interação e desenvolvimento do aluno e sua aplicação em contextos de aprendizagem tem sido cada vez mais valorizado. A aplicação dessas atividades voltadas a matemática, proporciona ao aluno uma postura ativa na construção e significação do seu conhecimento. Desse modo, o aluno formula estratégias para a aplicação do conhecimento matemático que já detém, para então elaborar hipóteses que permitam chegar a uma conclusão.

Baseando-se no significado e nas definições de “lúdico” acima referenciados, concluo que o emprego de atividades lúdicas, em salas de aula de matemática, bem como de qualquer outra disciplina escolar, deve ser cada vez mais valorizado e nos possibilitará uma maior interação e desenvolvimento do aluno e sua aplicação em contextos de aprendizagem. Além disso, a aplicação de atividades lúdicas nas aulas de matemática proporcionará, ao aluno, uma postura ativa na construção e na significação do seu conhecimento.

3. METODOLOGIA E MÉTODOS

Neste TCC, como já pode ser observado no tópico anterior (Fundamentação Teórica) a metodologia utilizada baseou-se na análise de documentos BNCC e LDB, assim como a definição do entendimento da autora sobre o método lúdico (Atividades Lúdicas). No próximo capítulo (capítulo 4) estudei os materiais didáticos (Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e OBMEP), sistemas de avaliações estaduais e federais (SARESP, ENEM e APP).

Toda essa análise ficou restrita apenas a poucos temas da Geometria (Teorema de Pitágoras, Relações Métricas do triângulo retângulo, Número Áureo e Poliedros de Platão construídos a partir de faces triangulares), objetivando mostrar alternativas metodológicas para o processo de ensino e aprendizagem de tais temas, utilizando-se de origamis e dobraduras.

Portanto, a "Análise de Conteúdo", como uma metodologia de análise de dados da pesquisa (documentos, materiais didáticos e sistemas de avaliação de alunos) qualitativa em Educação Matemática. Consequentemente, a metodologia aqui adotada torna-se parte fundamental deste TCC, dando a ele características que determinam sua possível qualidade.

Os planos de ensino propostos no capítulo 5 buscam basear-se, de forma constante, na metodologia lúdica. O ensino do lúdico é uma abordagem pedagógica que utiliza brincadeiras e jogos como estratégia de ensino. Essa metodologia proporciona:

(1) Uma aprendizagem mais significativa: ao utilizar jogos e atividades lúdicas, os estudantes aprendem de forma mais significativa, pois as informações são assimiladas de forma mais natural e contextualizada, favorecendo a compreensão e a retenção dos conteúdos.

(2) Motivação e engajamento: as atividades lúdicas despertam o interesse e a curiosidade dos estudantes.

(3) Desenvolvimento de habilidades socioemocionais: o ensino lúdico favorece o desenvolvimento de habilidades sócio emocionais, como a cooperação, a empatia, a criatividade, a resiliência e a capacidade de lidar com desafios e incertezas, que são importantes para a formação integral dos estudantes.

(4) Inclusão e diversidade: as atividades lúdicas possibilitam a inclusão e a diversidade, pois permitem que os estudantes possam participar de forma equitativa e valorizando as diferenças individuais, como habilidades, interesses e preferências.

Portanto, o ensino lúdico é uma abordagem pedagógica relevante e efetiva para a formação integral dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento cognitivo, socioemocional e pessoal dos mesmos.

4. O TEOREMA DE PITÁGORAS NOS MATERIAIS DIDÁTICOS FORNECIDOS PELA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO E PELA OBMEP

4.1 HABILIDADES BNCC

Como mencionado anteriormente, o conhecimento em matemática é de grande importância aos alunos por sua grande aplicabilidade na sociedade contemporânea, sendo responsabilidade do professor destacar a potencialidade dessa disciplina na formação de cidadãos críticos. A matemática vai além da quantificação de fenômenos determinísticos, ela cria sistemas abstratos, que organizam e fornecem meios para a maior compreensão de fenômenos no espaço, de movimento, de formas e de números podendo ou não ser associados ao mundo físico.

No Ensino Fundamental a matemática é dividida em cinco grandes áreas: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, fornecendo o desafio de relacionar observações do mundo real e das experiências dos alunos às representações matemáticas. Ademais, capacita o aluno a resolver problemas do cotidiano.

As competências específicas de matemática, que se relacionam com o Teorema de Pitágoras, para o ensino fundamental, na BNCC são:

> "Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções." (BNCC, 2017, p. 267)
>
> "Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles." (BNCC, 2017, p. 267)

O ensino da matemática envolve, no processo de aprendizagem de um conceito, a noção de contexto, de abstrair e, depois, de aplicá-lo em outro contexto análogo. É por essa razão que as habilidades apresentadas na BNCC começam com a frase "resolver e elaborar problemas envolvendo...". Entende-se por esse objetivo que os alunos precisam refletir e questionar o que ocorreria se um dado problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada.

As habilidades que serão investigadas nesse trabalho serão descritas a seguir, seja no âmbito do conhecimento prévio por parte dos alunos, seja como de aplicação de atividades a serem propostas.

- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
- (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Para o Ensino Médio (EM) encontramos as seguintes competências específicas:

Competência específica 1 EM: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência específica 2 EM: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Competência específica 3 EM: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência específica 4 EM: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência específica 5 EM: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas

As possibilidades de organização curricular das aprendizagens propostas na BNCC de matemática são várias. Uma organização possível – e mais próxima da prática de elaboração curricular dessa área – é por unidades similares às propostas para o Ensino Fundamental. Essas unidades podem ser, entre outras, Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística, como apresentado a seguir. É importante destacar que, foram mantidos os códigos originais das habilidades (conforme apresentação no item anterior), o que permite reconhecer a competência específica à qual cada habilidade está relacionada. Assim, por exemplo, a habilidade EM13MAT402 está relacionada à competência específica 4, o que se identifica no primeiro algarismo após a sigla MAT. A sequência 02 significa que essa habilidade é a segunda da competência específica 4.

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilha mento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

4.2 MATERIAIS DIDÁTICOS FORNECIDOS PELA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO

O Caderno do Aluno é o material didático elaborado pelo governo do estado de São Paulo, por meio da Secretaria da Educação, para os estudantes da rede estadual de ensino. Ele é distribuído gratuitamente para todos os alunos matriculados, desde o ensino fundamental até o ensino médio. O Caderno do Aluno tem como objetivo auxiliar os estudantes no processo de aprendizagem, fornecendo conteúdos complementares às aulas e exercícios para que possam praticar e fixar os conhecimentos adquiridos em sala de aula.

O Caderno do Aluno é um importante recurso pedagógico para os estudantes da rede estadual de São Paulo, pois permite a ampliação dos conhecimentos, o desenvolvimento de habilidades e competências e a melhoria do desempenho escolar. Além disso, o material também é uma forma de democratizar o acesso à educação e garantir a qualidade do ensino público no estado.

O "Aprender Sempre" é um programa de formação continuada destinado aos professores da rede estadual de ensino de São Paulo. Criado em 2008, o programa tem como objetivo aprimorar a qualidade do ensino e garantir uma formação mais completa para os estudantes. O Caderno do Professor Aprender Sempre é um material didático elaborado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para auxiliar na formação dos professores.

Os Cadernos do Professor trazem conteúdos teóricos, atividades práticas, sugestões de leitura e orientações para o planejamento de aulas. Além disso, o material também apresenta sugestões de metodologias ativas, recursos tecnológicos e estratégias pedagógicas para aprimorar a prática docente e desenvolver competências e habilidades nos estudantes.

4.2.1 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

No 9° ano do Ensino Fundamental (EF) a geometria é apresentada no 4° bimestre, os seguintes conceitos matemáticos a serem trabalhados: retas paralelas cortadas por transversais, teorema de proporcionalidade e semelhanças de triângulo. Nesse tópico as habilidades contempladas são: EF09MA24, que visa identificar e calcular as relações de proporcionalidade dos segmentos determinados por retas paralelas cortadas por transversais (Teorema de Tales), e a habilidade EF09MA12, cujo objetivo é reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

O caderno do aluno incentiva o desenvolvimento das atividades considerando o protagonismo dos/as estudantes, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração entre eles. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes são percebidas como oportunidades de desenvolver habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que o objetivo é que os estudantes devem chegar ao final da sequência de atividades sendo capazes de demonstrar o Teorema de Pitágoras e identificar as fórmulas corretas para determinar os valores desconhecidos das relações métricas no triângulo retângulo. Essas sequências foram elaboradas por meio da análise dos resultados das avaliações internas e externas, que revelaram fragilidades dos estudantes com relação às habilidades EF09MA13 (Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos) e EF09MA14 (Resolver e elaborar situações-problema de aplicação do Teorema de Pitágoras).

Na sequência, descreverei as atividades propostas no caderno do aluno relacionadas ao tema do Teorema de Pitágoras.

- Atividade 1 – Aulas 1 e 2: Determinando as relações métricas no triângulo retângulo.

Objetivos das aulas: Demonstrar o Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos. Determinar as relações métricas no triângulo retângulo. Identificar a relação métrica correta para determinar o valor desconhecido no triângulo retângulo.

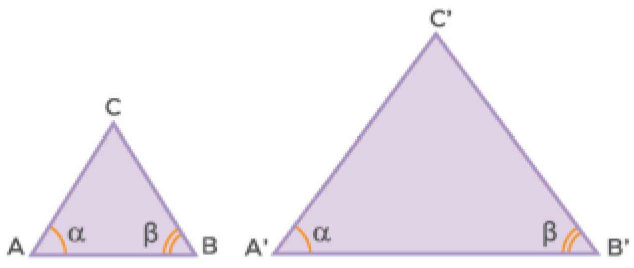
Material necessário: caderno do estudante.

Comentário ao Professor: nessa sequência de atividades, os estudantes determinarão a fórmula do Teorema de Pitágoras através da semelhança entre triângulos, determinarão as fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo e resolverão situações práticas diretamente ligadas aos conceitos do Teorema de Pitágoras e às demais fórmulas, os estudantes irão aplicar seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos. Os conhecimentos dos alunos sobre semelhança de triângulos devem ser relembrados logo na introdução das atividades, sendo uma oportunidade para que eles coloquem em prática essa propriedade da Matemática, que tem a mesma ideia de regra de três simples, de porcentagem, e outras aplicações da derivação do Teorema de Tales. Ainda nessa sequência de atividades, os estudantes terão a oportunidade de determinar as fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo e identificar a fórmula correta para de determinar as medidas desconhecidas em um triângulo retângulo.

Comentário ao aluno: Olá estudante! Iremos aplicar nessas aulas um pouco do que aprendemos anteriormente, em aulas deste ano ou de anos anteriores. Vamos aplicar o conceito de semelhança de triângulos que consiste em verificar características entre dois ângulos e classificá-los como semelhantes. Vamos relembrar a seguir:

O primeiro caso de semelhança de triângulo: AA (Ângulo-Ângulo): Consiste em ter dois ângulos correspondentes congruentes entre triângulos. Representado no Figura 1.

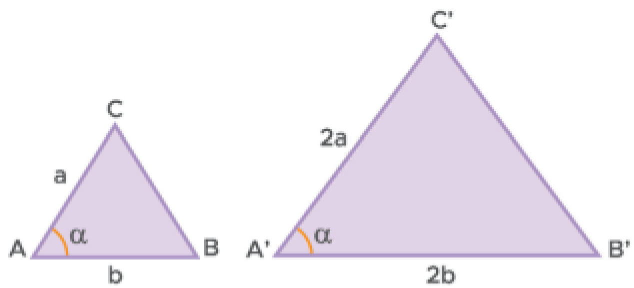
Figura 1: Triângulos utilizados para provar a semelhança da Atividade 1 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

O segundo caso de semelhança de triângulos LAL (Lado-Ângulo-Lado): Consiste em ter dois triângulos, dois lados correspondentes e o ângulo entre esses lados ser congruente.

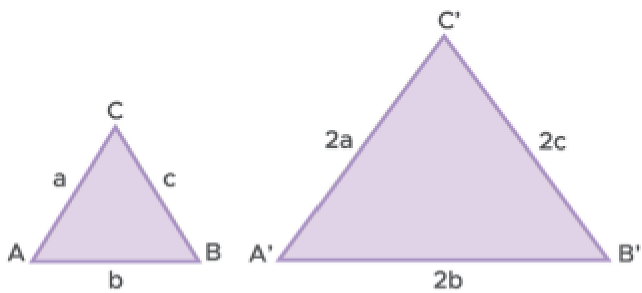
Figura 2: Triângulos utilizados para provar a semelhança da Atividade 1 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

O terceiro caso de semelhança de triângulos LLL (Lado-Lado-Lado): Consiste em ter em ter três lados correspondentes proporcionais.

Figura 3: Triângulos utilizados para provar a semelhança da Atividade 1 do 9° ano EF.

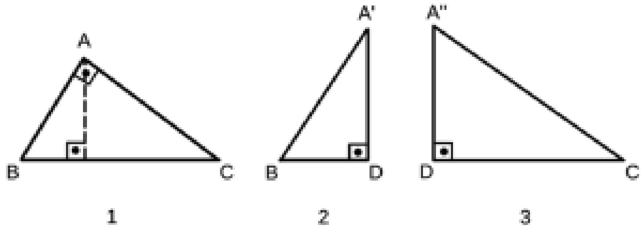


Fonte: Caderno do aluno.

Assim, é possível provar um dos famosos teoremas existentes na matemática. Esperamos que tenham muito êxito nessa sequência de atividades.

Tarefa 1: Observe o triângulo retângulo ABC. É possível separá-lo em dois triângulos semelhantes, como mostrado a seguir:

Figura 4: Triângulo retângulo partido a partir da projeção de BA em BC.



Fonte: Caderno do aluno

Justifique os casos de semelhança entre os triângulos 1 e 2, 1 e 3, 2 e 3.

Os triângulos ABC E A'BD (1 e 2) são semelhantes pelo caso AA. Isso se deve aos ângulos A ≡ D ≡ 90° e B, que é comum aos dois triângulos. Logo, os dois triângulos são semelhantes.

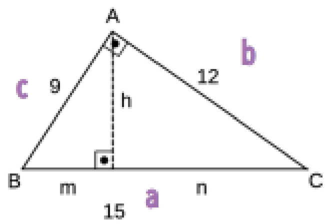
Os triângulos ABC e DAC (1e 3) são semelhantes pelo caso AA. Isso se deve aos ângulos que é comum aos dois triângulos Â ≡ D ≡ 90° e C. Logo os dois triângulos são semelhantes.

Comentário da autora: nesse caso, para que a notação e a demonstração se tornem corretas é necessário que o triângulo 3 seja referenciado de forma correta, portanto DA''C.

Os triângulos BDA' e A''DC (2 e 3) são semelhantes. Como os triângulos ABC e DA''C são semelhantes (primeira demonstração) pelo caso AA, então os ângulos correspondentes serão iguais. Nesse caso, o ângulo A ≡ D, B ≡ A''. Então nos triângulos 2 e 3, temos que o ângulo D é comum nos dois triângulos, e pela semelhança dos triângulos 1 e 3, tem-se que A'' ≡ B e, logo C ≡ A'.

Tarefa 2: Considere o triângulo ABC representado a seguir (Figura 5):

Figura 5: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 2 da Atividade 1 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Sabe-se que a medida da altura relativa à hipotenusa é desconhecida. Identifique, dentre as expressões a seguir, aquela que determinará a medida da altura relativa à hipotenusa. O objetivo é identificar a expressão que determinará o valor da altura relativa à hipotenusa.

$a)\ 15 \cdot\ h = 9 \cdot 12;$

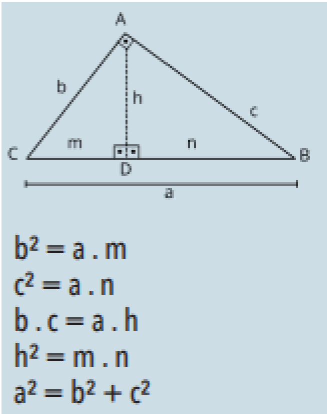
$b)\ 9^2 = m^2 + h^2\ ;$

$c)\ h^2 = 12 \cdot 9$;

$d)\ 12^2 = h^2 + (15 - n)^2$

Comentário ao professor: Na tarefa 2 (alternativa a), o estudante deve identificar a fórmula que determina a altura relativa à hipotenusa, sendo fornecido os três lados do triângulo, ficando as medidas da projeção dos catetos sobre a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa em função desses valores dados. Antes de iniciar a atividade 2 com os estudantes, demonstre por meio de semelhança de triângulo, as relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 6: Triângulo retângulo utilizado para demonstrar as relações métricas.

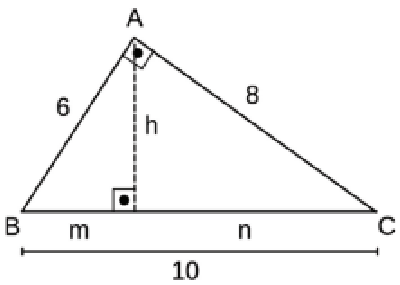


Fonte: Caderno do aluno.

Comentário da autora: essa imagem foi retirada do Caderno do Aluno e consta na seção de orientação ao professor, por essa razão o fundo difere-se das demais figuras. Destaco que, embora seja uma atividade apresentada apenas como sugestão, nos fornece a relação do Teorema de Pitágoras, tema central desse bloco de exercícios. Desse modo, recomenda-se que essa atividade se torne um tópico principal.

Tarefa 3: Considere o triângulo ABC representado a seguir (Figura 7):

Figura 7: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 3 da Atividade 1 do 9° ano EF.



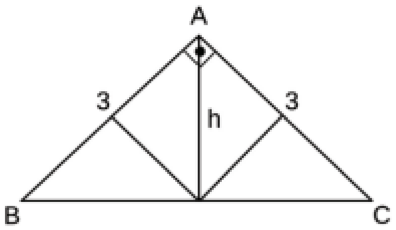
Fonte: Caderno do aluno.

Quais das expressões encontradas anteriormente poderão ser usadas para determinar o valor desconhecido de h, m e n no triângulo retângulo ABC?

Comentário ao professor: na tarefa 3 a resposta é pessoal e é proposto que os estudantes identifiquem as fórmulas para determinar as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa e a própria altura relativa à hipotenusa. Novamente, foram dados alguns valores numéricos e as respostas então em função desses valores dados.

Tarefa 4: Considere o triângulo isósceles ABC representado a seguir (Figura 8):

Figura 8: Triângulo retângulo utilizado na Tarefa 4 da Atividade 1 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Analisando o triângulo anterior, identifique qual das opções, a seguir, representa a medida da altura h.

$$a)\ h = \frac{3\sqrt{2}}{2};\quad b)\ h = \frac{\sqrt{2}}{3};\quad c)\ h = \frac{2\sqrt{2}}{23};\quad d) h = 3\sqrt{2}$$

Comentário ao professor: na tarefa 4 (alternativa a), o estudante deve determinar a medida da altura relativa à hipotenusa em uma situação problema em que o estudante nem precisará aplicar as fórmulas obtidas na tarefa 2, pois basta fazer uma observação a respeito da medida a ser determinada e usar o Teorema de Pitágoras.

- Atividade 2 – Aulas 3 e 4: Resolvendo situações problema sobre o teorema de Pitágoras

Objetivos da aula: Resolver situações problema com o Teorema de Pitágoras. Resolver situações problema com as relações métricas no triângulo retângulo. Resolver problema sobre o Teorema de Pitágoras.

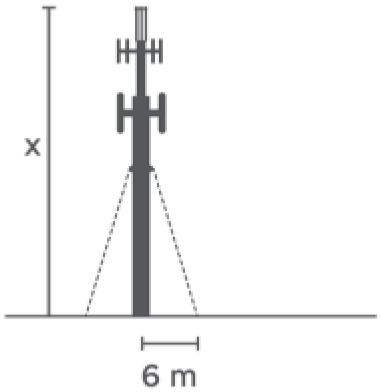
Materiais necessários: caderno do estudante.

Comentário ao professor: Nessa sequência de atividades, os estudantes irão aplicar o Teorema de Pitágoras em situações diversas, mas sempre apresentado em situações reais, situações que mostram o quanto a matemática está presente em diversos momentos do cotidiano. O intuito é mostrar aos estudantes que esse conteúdo pode ser de grande utilidade se você quiser aplicá-lo em situações práticas. Portanto, caso os estudantes se identifiquem com algum dos casos apresentados nas atividades, incentive-os a falar para todos os colegas do fato.

Comentário aos alunos: Nessa sequência de atividades, serão abordados objetos em destaque e situações recorrentes do dia a dia em que podem ser aplicadas as relações métricas do triângulo retângulo. Essa sequência de atividades irá mostrar problemas que exigirão de você atenção, leitura e resolução de situações problema. Preste atenção nas perguntas e sucesso na resolução de atividades.

Tarefa 1: Observe a Figura 9 a seguir:

Figura 9: Representação da torre de celular, utilizada para Tarefa 1 da Atividade 2 do 9° ano EF.



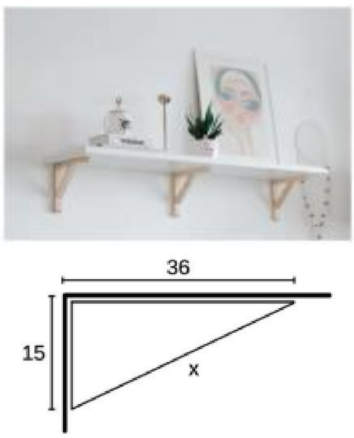
Fonte: Caderno do aluno.

A Figura 9 acima representa uma torre de telefone celular instalada em um lote próximo à casa de Carla. Para saber a altura dessa torre, ela mediu a distância da base da torre até onde os cabos que sustentam a torre foram instalados. Sabe-se que esses cabos foram presos na metade da torre, e que cada cabo mede 15,6m. Sabendo disso e adotando o Teorema de Pitágoras, Carla determinou a medida da torre. Qual é a medida que ela encontrou?

Comentário ao professor: Na tarefa 1, a proposta é que os estudantes desenvolvam cálculos utilizando o Teorema de Pitágoras na situação problema de uma torre de celular presa por cabos ao qual deseja-se determinar sua altura. A questão exige um pouco de raciocínio, portanto, caso eles apliquem a fórmula direto no problema e não consigam chegar na resposta, comente que o problema é um pouco mais complexo do que aplicá-lo direto nos valores fornecidos na questão. O valor encontrado deverá ser o de 28,8m.

Tarefa 2: A mão francesa é uma peça usada para fazer prateleiras e estantes, entre outras funções. Observe a imagem a seguir (Figura 10):

Figura 10: Representação da mão francesa, utilizada na tarefa 2 da Atividade 2 do 9° ano EF.



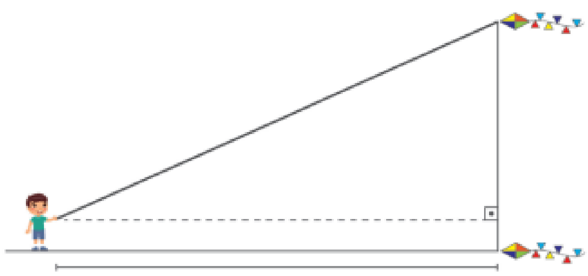
Fonte: Caderno do aluno.

Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine a medida dessa peça.

Comentário ao professor: Na tarefa 2, é proposto aos estudantes determinar a medida da hipotenusa pelo Teorema de Pitágoras. A situação-problema retrata um objeto bem comum aos estudantes, possibilitando comentar com eles a respeito de objetos e problemas que eles conhecem e nem imaginavam que poderiam resolver com o Teorema. O resultado esperado é de 39cm.

Tarefa 3: Um garoto está soltando pipa no sítio de seu avô. Em certo momento, seu carretel de linha de 100 metros está todo no ar e a projeção de sua pipa está a 80 metros dele. Sabe-se que a altura que esse garoto segura a linha está a 1,38m do solo. Qual a altura dessa pipa em relação ao chão?

Figura 11: Representação do enunciado da Tarefa 3 da Atividade 2 do 9° ano EF.

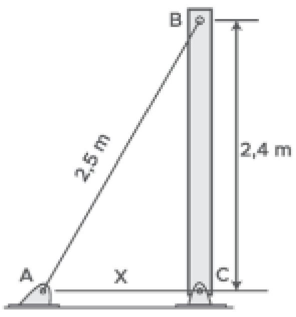


Fonte: Caderno do aluno.

Comentário ao professor: Na tarefa 3, os estudantes devem determinar a altura da pipa de um garoto, ou seja, no triângulo retângulo formado entre a linha, o solo e a altura da pipa, devem aplicar o Teorema de Pitágoras. Novamente, uma situação muito comum aos estudantes sendo tratada na forma de problema. Esse problema pode ser usado para comentar com os estudantes que é possível ter problemas relacionados a temas muito comuns a eles. Toda essa conversa tem um motivo. Nas próximas aulas a proposta será que eles elaborem situações problemas que retratam o Teorema de Pitágoras. O resultado esperado é de 60,38m.

Tarefa 4: Uma haste medindo 2,4m de altura está conectada a um cabo de 2,5 metros, como mostra a Figura 12.

Figura 12: Representação da haste enunciada na Tarefa 4 da Atividade 2 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Utilize o Teorema de Pitágoras e determine a distância, em metros, entre os pontos A e C.

Comentário ao professor: Na atividade 4, os estudantes precisam determinar, usando o Teorema de Pitágoras, medida de um dos catetos do triângulo retângulo formado por uma haste sustentada por um cabo, situação problema peculiar na disciplina de física. Apesar deste problema não ser tão usual, comente que ele está sendo retratado em uma situação concreta, com elementos da vida real. O resultado esperado é 0,7m.

Tarefa 5: Os cabos que seguram os postes que sustentam a lona de um circo medem, cada um, 6 metros. Sabe-se que a distância entre as estacas que prendem os cabos até os pés dos postes que sustentam a lona do circo mede 3,6m. Sabe-se que os postes foram instalados verticalmente com relação ao solo. Usando o Teorema de Pitágoras, determine a altura de cada um desses postes.

Comentário ao professor: Na tarefa 5, a proposta é que os estudantes determinem a medida do poste de uma estrutura de um circo, dado o comprimento dos cabos e a distância que os mesmos foram amarrados às estacas. Trata-se de uma atividade de interpretação e determinação de um dos catetos de um triângulo retângulo. O destaque nessa atividade fica por conta da ausência de imagem, fazendo com que o estudante interprete o problema e desenhe a situação-problema segundo sua interpretação. Espera-se encontrar o valor de 4,8m.

Tarefa 6: Observe a imagem a seguir (Figura 13):

Figura 13: Representação da Tarefa 6 da Atividade 2 do 9° ano EF.

Fonte: Caderno do aluno.

Esse telhado em formato de um triângulo isósceles possui a largura de um beiral ao outro igual a 7,2m. A medida da cumeeira até o beiral mede 3,9m. Nessas condições, qual é a altura h desse telhado?

Comentário ao professor: Na tarefa 6, a proposta é que os estudantes consigam determinar a medida da altura de um telhado. Basicamente, trata-se de uma atividade que retrata uma situação problema com o objetivo de determinar um cateto de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa foi dada, assim como um dos catetos. Espera-se encontrar o valor de 1,5m.

- Atividade 3 – Aulas 5 e 6: Interpretando e resolvendo situações problema

Objetivos da aula: Ler, interpretar e resolver situações problema relacionado ao Teorema de Pitágoras. Ler, interpretar e resolver situações problema relacionado as relações métricas no triângulo retângulo. Identificar a relação métrica necessária para resolver o problema.

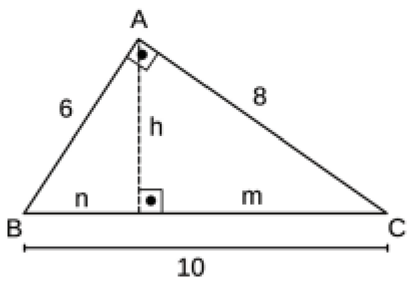
Materiais necessários: Caderno do estudante.

Comentários ao professor: Nessa sequência de atividades, a proposta é que o estudante, leia, interprete e resolva situações problema. Essas questões foram elaboradas com o objetivo de desenvolver as habilidades de trabalhar com os números decimais, tendo em vista a grande dificuldade que os estudantes apresentam diante deste objeto de conhecimento. Caso necessário, recomenda-se o uso da calculadora, principalmente para se obter a raiz quadrada de números decimais. Algumas questões são apresentadas e suas imagens auxiliarão o entendimento das questões; entretanto algumas questões apresentam apenas o texto base, assim, o estudante precisará ler e interpretar o problema, e, ocasionalmente, precisará representar os problemas através de desenhos.

Comentário ao estudante: As tarefas que irão resolver nessas duas aulas, são situações problema que retratam a aplicação do Teorema de Pitágoras e situações envolvendo o uso de relações métricas no triângulo retângulo, ou seja, as fórmulas para determinar a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Tarefa 1: Marcos está resolvendo um exercício de matemática em que é pedido para determinar as projeções dos catetos, no caso, m e n no triângulo retângulo.

Figura 14: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 1 da Atividade 3 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Sendo fornecida a hipotenusa e seus catetos como mostra a figura acima, quais as relações métricas a serem usadas para determinar as medidas desconhecidas?

$a)\ 10h = 6 \times 8; 6^2 = h^2 + n^2; m = 10 - n$ $\quad c)\ h^2 = 8^2 - m^2; 10h = m \times n; n = 10 - m$

$b)\ h^2 = 6 \times 8; 6^2 = h^2 + n^2;\ m = 10 - n$ $\quad d)\ 10h = 6 \times 8; 8^2 = h^2 + n^2; m = 10 - n$

Comentário ao professor: Na tarefa 1, a proposta é que os estudantes identifiquem as fórmulas para determinar as medidas que são desconhecidas na questão. Essas fórmulas seguem uma ordem para serem determinadas, pois ao determinar uma medida, esta pode ser usada para determinar outras medidas desconhecidas. O correto é a alternativa a.

Tarefa 2: A professora Marta pediu que os estudantes de sua sala construíssem um triângulo, 24cm e 25cm. A professora pediu para os estudantes determinarem a medida do terceiro lado, sabendo que a professora forneceu, entre os valores dados, a medida da hipotenusa.

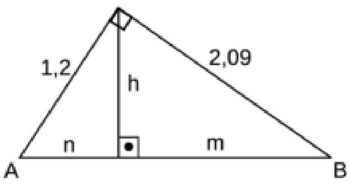
Comentário ao professor: Na tarefa 2, os estudantes precisam determinar a medida do cateto desconhecido em uma situação em que é dado um problema e o estudante deve ler e interpretá-lo. Uma observação dada no problema pode ser usada para fazer comentários com os estudantes. Nessa questão é informado uma das medidas é a hipotenusa. Portanto, o outro cateto mede 7cm.

Tarefa 3: um poste com 11,7m de altura e perpendicular ao solo possui, no alto de sua ponta, uma corda amarrada a ele que está tocando o chão. Marcelo segurou a ponta que tocava o chão e a esticou totalmente, colocando a ponta da corda no chão após ter se afastado 4,4m do pé desse poste. Qual o tamanho dessa corda, considerando que essa corda não se esticou?

Comentário ao professor: Na tarefa 3, a proposta é que os estudantes determinem a medida da hipotenusa em uma situação problema. Nesse caso, é informado como deverá ser construído o triângulo com as informações dadas. O tamanho da corda é de 12,5m.

Tarefa 4: Um escoteiro armou a estrutura de sua barraca, conforme as medidas dos triângulos apresentadas a seguir:

Figura 15: Representação da estrutura da barraca utilizada para a Tarefa 4 da Atividade 3 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Considerando as medidas em metros, determine:

a. A medida do segmento AB, que representa a parte em que o escoteiro irá dormir. Esperado encontrar o valor de 2,41.

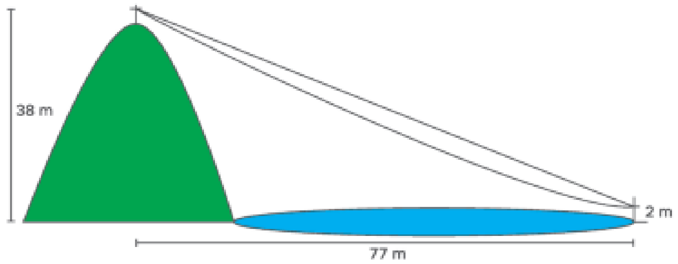
b. A medida da altura dessa barraca. Esperado encontrar o valor de 1,04.

c. A medida de “m” e “n”. Esperado encontrar o valor de m=1,81 e n=0,60.

Comentário ao professor: Na tarefa 4, os estudantes devem determinar medidas em um triângulo retângulo. A questão é uma situação problema em que se deseja encontrar a medida da hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. As medidas atribuídas à questão são números decimais e pode ser necessário um pouco mais de atenção a essa questão, com possibilidade de uso da calculadora para realizar os cálculos.

Tarefa 5: Uma tirolesa situada no alto de um morro de 36m de altura possui um cabo de aço totalmente esticado, preso a um poste de 2m de altura. Este cabo é esticado até a parte de baixo do morro, onde está preso a outro poste de 2m de altura. Sabendo que esse cabo está totalmente esticado, e que a distância horizontal entre os pontos que este cabo está preso é de 77m, qual o comprimento do cabo?

Figura 16: Representação da tirolesa utilizada para a Tarefa 5 da Atividade 3 do 9° ano EF.

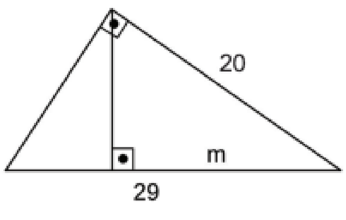


Fonte: Caderno do aluno.

Comentário ao professor: Na tarefa 5, a proposta é que os estudantes determinem a medida da hipotenusa em uma hipotética situação problema em que é dado os catetos e, consequentemente, pede-se para determinar a hipotenusa. O comprimento do cabo será de 85m.

Tarefa 6: Um triângulo cuja hipotenusa mede 29cm está como base desse triângulo. Sabe-se que um dos catetos possui 20cm. Qual a medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa?

Figura 17: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 6 da Atividade 3 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Comentário ao professor: Na tarefa 6, os estudantes devem determinar a medida da hipotenusa da altura relativa à hipotenusa e das projeções desses catetos sobre a hipotenusa. O valor de m é de aproximadamente 13,79cm.

- Atividade 4 – Aulas 7 e 8: Interpretando e resolvendo situações problema.

Objetivos da aula: Elaborar situações-problema sobre o Teorema de Pitágoras. Elaborar situações problema sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Elaborar e resolver situações problema relacionados a relações métricas no triângulo retângulo.

Materiais necessários: Caderno do estudante.

Comentários ao professor: Nessa sequência de atividades, a proposta é que os estudantes elaborem situações problema que peçam para determinar diversas medidas do triângulo retângulo, sejam elas os catetos, a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa. O professor que pode sugerir aos estudantes algumas ternas pitagóricas, que consiste em um grupo de três números que obedece ao Teorema de Pitágoras, pois esses valores poderão auxiliá-los na elaboração das atividades. Uma escolha de valores arbitrários poderá resultar em cálculos que necessitarão desenvolver fatoração, radiciação etc. Nessas aulas, uma proposta é induzir os estudantes a construírem algumas figuras que ajudarão na interpretação e elaboração da atividade. Existem também algumas situações problema que, além de elaborar solicitam ao estudante encontrar a solução após a elaboração. Ou seja, o intuito é fazer com que os estudantes não elaborem determinadas situações que sejam impossíveis de serem resolvidas ou que não respeitam as características de uma situação problema referente ao tema estudado.

Comentário aos alunos: O objetivo da elaboração de situações problema é dar a você a oportunidade de colocar seus conhecimentos em prática. Tente usar os conhecimentos que você aprendeu nas aulas anteriores e aqui aplicá-los em situações problema. Elaborem problemas que tragam para você o enriquecimento em sua aprendizagem. Com relação aos valores que serão informados na elaboração da situação problema, tenha o cuidado em escolher valores inteiros, que possam gerar respostas inteiras, pois caso a atividade peça para informar a altura de um objeto, espera-se que o resultado seja um número inteiro como resposta.

Tarefa 1: Elabore uma situação-problema, se possível produzindo uma imagem, em que são dadas as medidas dos catetos e pergunte o valor da hipotenusa.

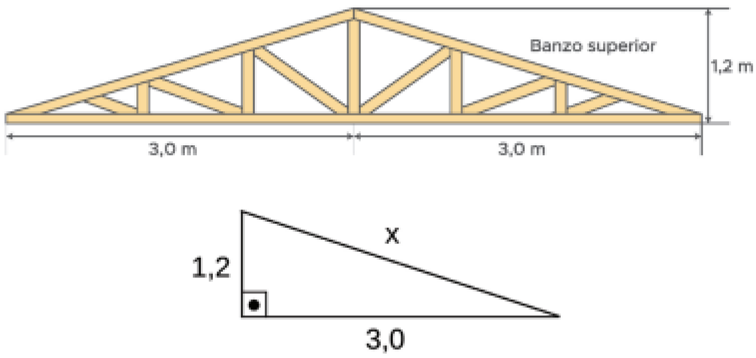
Comentário ao professor: Na tarefa 1, a proposta é que os estudantes elaborem uma situação-problema em que se deseja determinar a hipotenusa de um triângulo, sendo informado as medidas dos catetos. Converse com os estudantes para que eles possam elaborar essas situações problema em circunstâncias que sejam comuns ao convívio deles. Caso necessário, levante mais situações com eles, para que seja possível abranger muitas possibilidades.

Tarefa 2: Elabore uma situação problema que, dada a medida de um cateto e da hipotenusa, seja determinada a medida do outro cateto. Após a elaboração, faça uma figura que represente a situação problema.

Comentário ao professor: Na tarefa 2, os estudantes precisam elaborar uma situação problema em que se deseja determinar a medida de um dos catetos, sendo fornecida a medida do outro cateto e da hipotenusa.

Tarefa 3: Observe a figura a seguir (Figura 18):

Figura 18: Representação utilizada para a Tarefa 3 da Atividade 4 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Elabore uma situação problema em que se deseja determinar a medida do banzo superior, valor desconhecido na estrutura de um telhado.

Comentário ao professor: Na tarefa 3, a proposta é que os estudantes elaborem e não respondam uma situação problema na qual seja pedido para determinar a medida desconhecida na treliça de madeira sugerida na questão.

Tarefa 4: Elabore uma situação problema envolvendo uma situação em que se deseja determinar a altura relativa à hipotenusa,

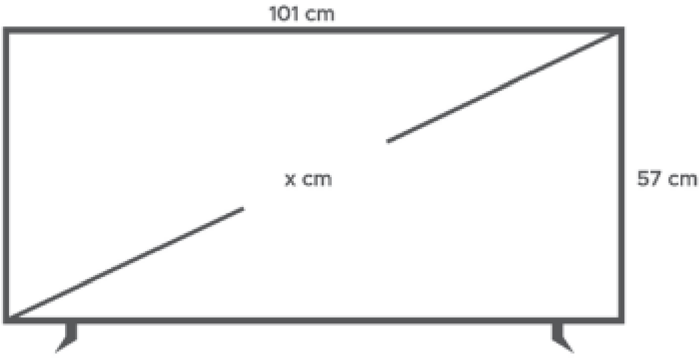
Comentário ao professor: Na tarefa 4, os estudantes devem elaborar uma situação problema em que deve ser pedido para determinar a altura relativa à hipotenusa.

Tarefa 5: Determine uma situação-problema em que se deseja determinar as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Comentário ao professor: Na tarefa 5, a proposta é que os estudantes consigam elaborar uma situação problema, em que deve ser pedido para determinar as projeções dos catetos sobre à hipotenusa.

Tarefa 6: Elabore uma situação problema baseada na figura a seguir (Figura 19):

Figura 19: Figura utilizada para a Tarefa 6 da Atividade 4 do 9° ano EF.

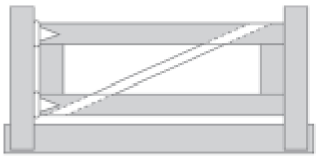


Fonte: Caderno do aluno.

Comentário ao professor: Na tarefa 6, os estudantes devem elaborar uma situação problema em que se deseja determinar a diagonal de uma TV, ou seja, a hipotenusa de um triângulo. A imagem em que os estudantes irão elaborar o problema está vinculado às medidas sugeridas na imagem.

Tarefa 7: Elabore uma situação problema em que se deseja instalar uma trave de madeira na diagonal de uma porteira, como apresentado a seguir:

Figura 20: Representação da trave de madeira utilizada para Tarefa 7 da Atividade 4 do 9° ano EF.



Fonte: Caderno do aluno.

Estabeleça as medidas do comprimento e da altura dessa porteira para poder determinar a medida da diagonal.

Comentário ao professor: Na tarefa 7, a proposta é que os estudantes elaborem uma situação problema para determinar a diagonal de um retângulo, nesse caso, uma porteira de madeira cujas medidas dessa imagem não são sugeridas. Fica para os estudantes, neste caso, a necessidade de informar essas medidas e pedir para que possam determinar a medida de madeira que representa a hipotenusa no triângulo retângulo.

Finalizando: Para finalizar, destine alguns minutos da aula para a socialização das atividades entre todos os estudantes. Você pode perguntar aos estudantes o que eles acharam das atividades, quais foram as atividades mais difíceis, qual foi o maior desafio encontrado, entre outras perguntas. Pergunte também se, para resolução das atividades dessas aulas, se as atividades anteriores foram importantes? Assim eles perceberão que os objetos de conhecimento das aulas são interligados, precisando sempre recorrer ao que já foi estudado para dar continuidade nos próximos objetos de conhecimento.

Essas atividades foram planejadas para a duração de 8 horas/aula.

Comentário da autora: Destaco que os comentários realizados, foram baseados em minha visão de aluna formanda no curso de Licenciatura em Matemática. Não identifiquei nas atividades propostas a presença de atividades lúdicas, ou a preocupação com a utilização de diferentes recursos pedagógicos. No entanto, há a preocupação em sugerir atividades que levam a uma demonstração matemática, como por exemplo, na atividade 1 desta seção. A demonstração é de extrema importância na matemática, pois é através dela que se garante a validade de um resultado matemático. Uma demonstração matemática permite não apenas estabelecer a validade de um resultado, mas também compreender a estrutura lógica subjacente ao resultado. Por meio de demonstrações, os matemáticos podem explorar as implicações lógicas dos axiomas e teoremas já estabelecidos e descobrir novas conexões e relações entre eles. Em resumo, a demonstração é fundamental para a matemática, pois garante a validade dos resultados, permite compreender a estrutura lógica subjacente e é uma ferramenta para o desenvolvimento de novas teorias e resultados.

4.2.2 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

- **4° bimestre do 1° ano do Ensino Médio**
- Atividade 1 – Aulas 1 e 2: O triângulo retângulo e seus elementos

Objetivo da aula: Reconhecer o triângulo e seus elementos.

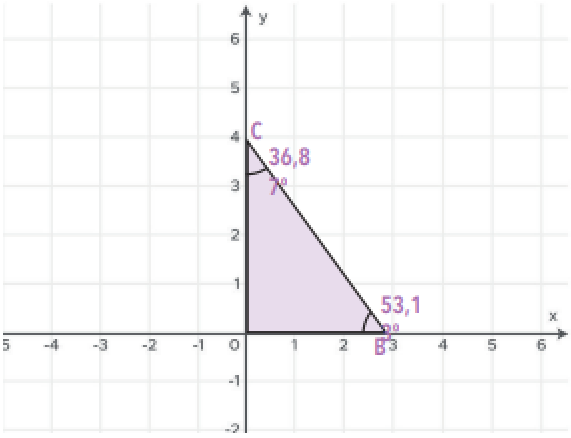
Comentário ao professor: Inicie uma conversa com os estudantes explicando quais são os objetivos das aulas 1 e 2, ou seja, reconhecer que o triângulo retângulo é um polígono que possui dois ângulos agudos e um ângulo reto. Apresente à turma algumas informações relacionadas à classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos e sobre a soma de seus ângulos internos. Discuta sobre a importância de se ter contato sobre esse tema como conhecimento prévio para introdução do Teorema de Pitágoras. Lembre-se de falar dos triângulos quanto a seus ângulos, do quão é importante reconhecer um triângulo retângulo tanto pela construção geométrica da figura, como pelos ângulos internos. Investigue o que os alunos sabem sobre o tema. Questione, por exemplo, se conhecem termos como lados, vértice, ângulo reto, cateto, hipotenusa, entre outros.

Tarefa 1: No plano cartesiano a seguir (Figura 21), vamos construir um triângulo e marcar os seus elementos.

a. Vértices: marque três pontos distintos, ponto A (0,0), ponto B (3,0) e ponto C (0,4).

b. Lados: trace um segmento de reta entre os pontos A e B, B e C, A e C. Nomeie os lados da figura. Lado “a” oposto ao vértice A. Lado “b” oposto ao vértice B. Lado “c” oposto ao vértice C.

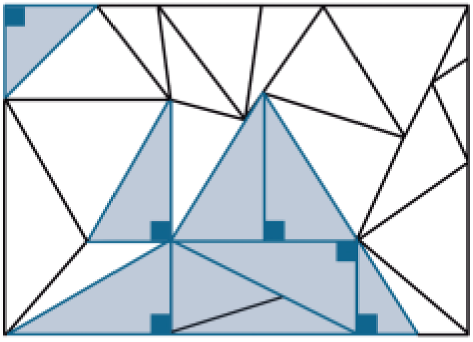
Figura 21: Triângulo retângulo utilizada para a Tarefa 1 da Atividade 1 do 1° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 2: No mosaico a seguir (Figura 22), pinte somente os triângulos retângulos.

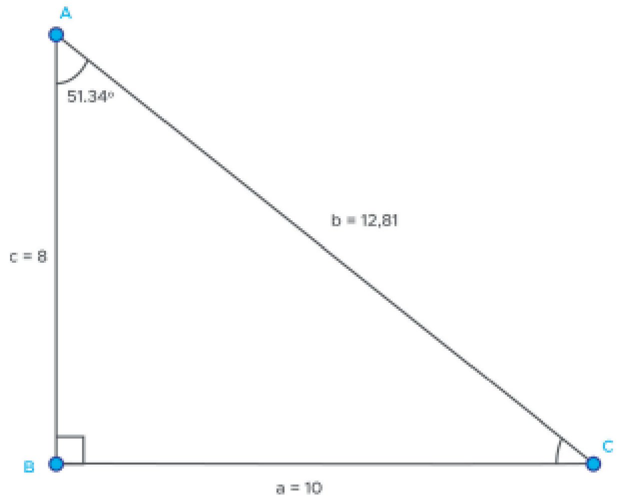
Figura 22: Representação do mosaico utilizado para a Tarefa 2 da Atividade 1 do 1° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 3: Dados os triângulos a seguir, preencha os quadros 1 e 2 referentes ao triângulo ABC (Figura 23) e quadros 3 e 4 referentes aos triângulos DEF (Figura 24).

Figura 23: Triângulo ABC utilizado para a Tarefa 3 da Atividade 1 do 1° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Quadro 1: Medidas dos ângulos e lados do triângulo ABC.

Triângulo	Medidas dos ângulos			Medidas dos Lados		
	Ângulo $\hat{A}$	Ângulo $\hat{B}$	Ângulo $\hat{C}$	Lado a	Lado b	Lado c
ABC	51,34°	90°	38,66°	10	12,81	8

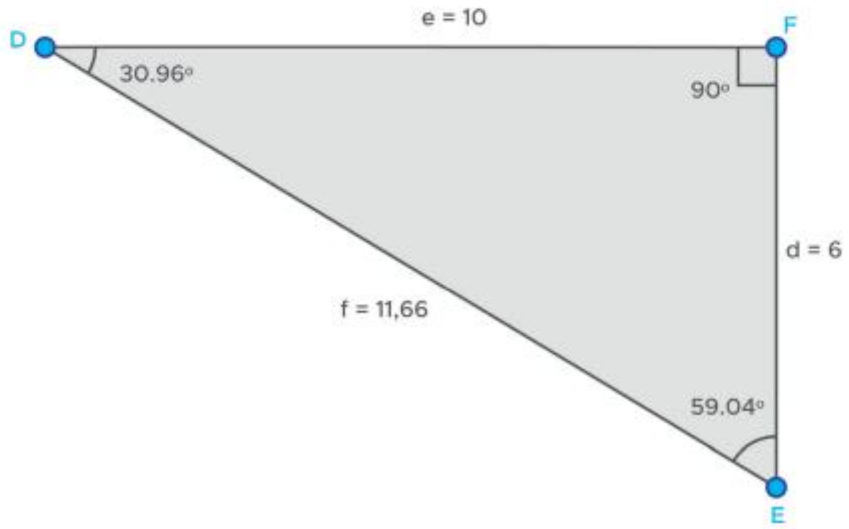
Fonte: Caderno do aluno.

Quadro 2: Medidas e soma dos ângulos do triângulo ABC.

Triângulo	Medidas dos ângulos		
	Ângulo $\hat{A}$	Ângulo $\hat{C}$	Soma das medidas dos ângulos
ABC	51,34°	38,66°	90°

Fonte: Caderno do aluno.

Figura 24: Triângulo DEF utilizado para a Tarefa 3 da Atividade 1 do 1° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Quadro 3: Medidas dos ângulos e lados do triângulo DEF.

Triângulo	Medidas dos ângulos			Medidas dos Lados		
	Ângulo $\hat{D}$	Ângulo $\hat{E}$	Ângulo $\hat{F}$	Lado d	Lado e	Lado f
DEF	30,96°	59,04°	90°	6	10	11,66

Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 4: hipotenusa do triângulo DEF.

No triângulo DEF.

Qual é o maior lado?

Qual o lado que fica oposto ao maior ângulo?

Então, o lado que representa a hipotenusa é:

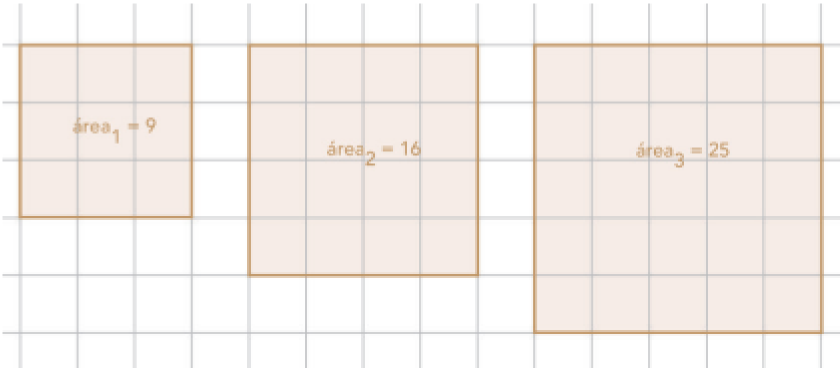
- Atividade 2 – Aulas 5 e 6: Teorema de Pitágoras

Objetivo das aulas: Demonstrar o Teorema de Pitágoras a partir do conceito de área em quadriculados.

O Teorema de Pitágoras relaciona o comprimento dos lados do retângulo (triângulo com ângulo de 90°) da seguinte maneira: a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa.

Tarefa 1: Na malha quadriculada a seguir (Figura 25), cada quadrado representa uma unidade. Construa três quadrados de lados 3, 4 e 5, respectivamente.

Figura 25: Malha quadriculada utilizada para a Tarefa 1 da Atividade 2 do 1° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Adotando cada quadradinho como uma unidade da área.

a. Determine a medida da área do quadrado de lado 3.

b. Determine a medida da área do quadrado de lado 4.

c. Determine a medida da área do quadrado de lado 5.

Tarefa 2: No plano cartesiano, construa um triângulo retângulo e marque os seus vértices por meio dos três pontos distintos: ponto A (0,0), ponto B (3,0) e ponto C (0,4).

a. Qual a medida do cateto (lado AB)?

b. Reproduza os quadrados da tarefa 1 no plano cartesiano do início da atividade sobre os lados do triângulo retângulo construído da seguinte maneira: O lado do quadrado de lado 3 sobre o cateto (lado AB) do triângulo. O lado do quadrado de lado 4 sobre o (lado AC) do triângulo. O lado do quadrado de lado 5 sobre a hipotenusa (lado BC) do triângulo.

c. Agora, complete o seguinte quadro referente às áreas dos quadrados.

Quadro 4: Área dos quadrados.

Área do quadrado 1 construído sobre o cateto $\overline{AB}$	Área do quadrado 2 construído sobre o cateto $\overline{AC}$	Área do quadrado 3 construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$	Soma das áreas dos quadrados 1 e 2 construídos sobre os catetos
9	16	25	25

Fonte: Caderno do aluno.

d. Escreva uma expressão matemática entre as medidas das áreas dos quadrados.

e. Complete o seguinte quadro referente aos lados do triângulo ABC.

Quadro 5: Lados do triângulo.

Medida do cateto $\overline{AB}$	Medida do cateto $\overline{AC}$	Medida da hipotenusa $\overline{BC}$
3	4	5

Fonte: Caderno do aluno.

f. Explique, com suas palavras, como calculou a medida da hipotenusa BC do triângulo ABC.

g. De acordo com a resposta anterior, podemos dizer que, num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado, cujo lado corresponde à medida da hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados cujo lados correspondem às medidas dos catetos?

Cada atividade foi planejada para a duração de 2 horas/aula.

Comentário da autora: nesta seção, há a sugestão de atividades de investigação. A atividade de investigação na matemática é extremamente importante porque permite aos alunos explorar a matemática de maneira ativa e criativa, descobrir novas ideias e relações, e desenvolver habilidades essenciais, como a capacidade de formular e testar hipóteses, resolver problemas, justificar argumentos e comunicar resultados. A investigação matemática também é uma forma eficaz de ajudar os alunos a compreender e apreciar a matemática de maneira mais profunda e significativa, permitindo que eles desenvolvam um entendimento mais abrangente dos conceitos e procedimentos matemáticos, em vez de simplesmente memorizar fórmulas e regras. Embora o lúdico não se faça presente, a atividade de investigação é de grande importância.

4.2.3 2° ANO DO ENSINO MÉDIO

- **1° bimestre do 2° ano do Ensino Médio**

Comentário da autora: Aqui, o Teorema de Pitágoras aparece em uma atividade cujo objetivo é ensinar produtos notáveis. O Teorema de Pitágoras aparece nessa atividade apenas como forma de recordação. Importante destacar que o conteúdo anterior a esse é a observação de formas geométricas espaciais e planificação desta forma tridimensional. Como o presente trabalho visa o ensino do Teorema de Pitágoras através das dobraduras, torna-se importante destacar o momento no qual os alunos se familiarizam com as formas tridimensionais.

- Atividade 1 – Dois quadrados interessantes (2horas/aula)

Tarefa 1: Em um triângulo retângulo, foi definido o Teorema de Pitágoras, que é: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Chamando de “a” para a hipotenusa e “b” e “c” para os catetos, escreva a expressão que representa esse Teorema.

Comentário ao professor: promova uma discussão sobre o enunciado correto do Teorema de Pitágoras.

As demais tarefas não envolvem o Teorema estudado nesse trabalho.

- Atividade 2 – SARESP (Sistema de Avaliação de rendimento escolar do estado de São Paulo), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e AAP (Avaliação de Aprendizagem em Processo)

Promova, junto aos alunos, a leitura coletiva dos textos introdutórios, que trazem informações sobre as relações métricas dos triângulos retângulos. Informe também que as atividades previstas para essas aulas são itens do SARESP e do ENEM que relacionam contextos que envolvem cálculos com triângulos retângulos, em particular, as suas relações métricas. Oriente que a leitura dos enunciados deve ser realizada com atenção para a compreensão do problema e a percepção dos dados referentes ao contexto. Ademais, atentem para a relação métrica adequada para facilitar a resolução de cada problema. Propomos que as atividades para as aulas 1 e 2 sejam realizadas em dois blocos.

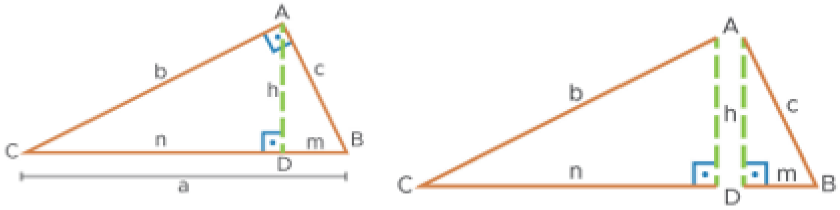
Bloco 1:

Para o primeiro bloco, os estudantes devem realizar as tarefas de 1 a 4. Depois de resolverem o referido bloco, disponibilize um momento para a correção com participação dos estudantes, que poderão ir à lousa realizar seus cálculos e explicar seu raciocínio aos demais. Nesse momento é importante o envolvimento de todos. Após essa etapa promova a realização do segundo bloco, que consiste em solucionar as atividades de 5 a 7. Nas duplas, os estudantes irão aplicar as relações métricas nos triângulos retângulos para buscar a solução de cada problema. Sugerimos novamente a socialização na lousa.

O estudo dos triângulos retângulos: Desde os gregos, cálculos utilizando triângulos retângulos são realizados, em particular, para a determinação de medidas inacessíveis. Raio da terra, distância da terra à lua, largura de rios e altura de árvores, montanhas ou prédios são exemplos de situações em que tais aplicações são possíveis.

Cálculos com triângulos retângulos: Dentre os cálculos envolvendo triângulos, existem algumas relações entre as medidas desse polígono que muito podem auxiliar na resolução de problemas. Observe a Figura 26:

Figura 26: Triângulo retângulo utilizado para Atividade 2 do 2°ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Nesse triângulo retângulo temos que:

a = hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto)

b,c = catetos (lados que formam o ângulo reto)

m,n = projeção dos catetos sobre a hipotenusa

h = altura do triângulo referente à hipotenusa

A partir dos triângulos retângulo semelhantes ACD e ABD, temos as seguintes relações métricas:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a \cdot n \ (1)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a \cdot m \ (2)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow a.h = b \cdot c \ (3)$$

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \rightarrow h^2 = m \cdot n \ (4)$$

Além dessas, temos o Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$, obtida somando-se as relações (1) e (2), bem como sabendo que a=m+n.

Tarefa 1: (SARESP, 2011) Aninha foi visitar suas amigas. Ela dirigiu seu automóvel do ponto x, onde fica sua casa, até a casa de Roseli, no ponto y, percorrendo 12 km. Em seguida, ela dirigiu mais 9km até a cada de Milena, no ponto z, conforme a figura. Quantos quilômetros Aninha teria percorrido, em linha reta, se fosse direto de sua cada para a casa de Milena?

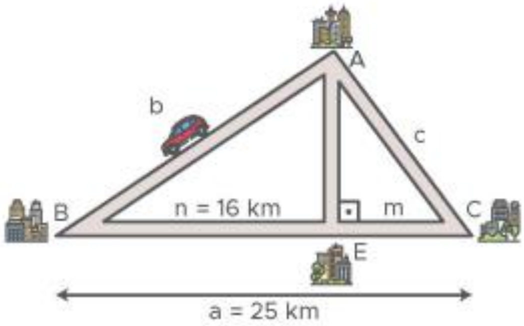
a) 36 km b) 24 km c) 15 km d) 39 km e) 21 km

Figura 27: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 1 da Atividade 2 do 2° ano EM.

Fonte: Questão do SARESP presente no Caderno do aluno.

Tarefa 2: (SARESP, 2018) Um motorista vai da cidade A até a cidade E passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Quanto ele percorreu?

Figura 28: Representação do enunciado da Tarefa 2 da Atividade 2 do 2° ano EM.

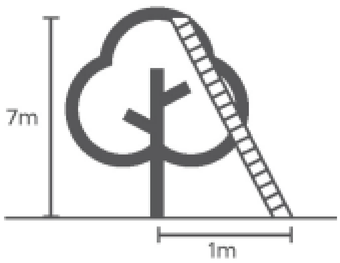


Fonte: Questão do SARESP presente no Caderno do aluno.

Tarefa 3: (SARESP, 2005) Altura de uma árvore é 7m. Será fixada uma escada a 1m de sua base para que um homem possa podar os seus galhos. Qual o menor comprimento que esta escada deverá ter?

$$a)\ 2\sqrt{2}m\ ; b)\ 4\sqrt{2}m\ ; c)\ 5\sqrt{2}m\ \ ; d)\ 7\sqrt{2}m$$

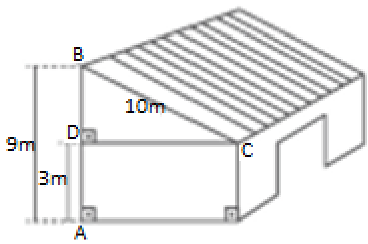
Figura 29: Representação do enunciado da Tarefa 3 da Atividade 2 do 2° ano EM.



Fonte: Questão do SARESP presente no Caderno do aluno.

Tarefa 4: (SARESP, 2013) Para sustentar o telhado de um galpão cuja parede tem 3 metros de altura, João colocou um conjunto de vigas, medindo cada viga 10 metros de comprimento. Na figura, uma delas aparece apoiada nos pontos B e C. A altura máxima do telhado, isto é, a distância AB é igual a 9 metros. Pode-se concluir que a medida CD da parede do galpão mede, em metros:

Figura 30: Representação do enunciado da Tarefa 4 da Atividade 2 do 2° ano EM.



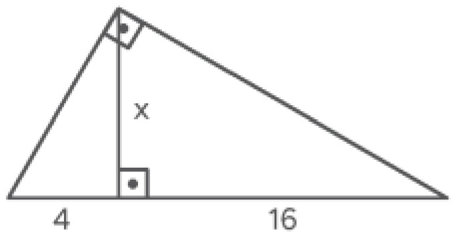
Fonte: Questão do SARESP presente no Caderno do aluno.

a) 6 b) 8 c) 10 d) 11

Bloco 2:

Tarefa 5:(Caderno do aluno) A figura seguinte (Figura 31) mostra um triângulo retângulo e informa as medidas de alguns de seus elementos. Observando com atenção os valores fornecidos, qual é o valor de x?

Figura 31: Triângulo retângulo utilizado para a Tarefa 5 da Atividade 2 do 2° ano EM.



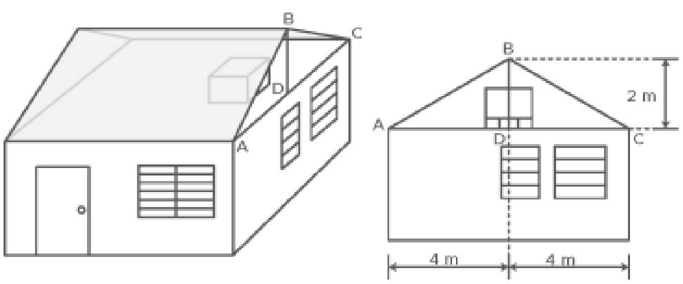
Fonte: Caderno do aluno.

a) 10 b) 8 c) 6 d) 4

Tarefa 6: (SARESP, 2010) Na casa ilustrada a seguir, a estrutura de madeira que sustenta o telhado apoia-se na laje. Devem-se dispor de caibros (peças de madeira) na vertical, indo da laje ao ponto mais alto do telhado, como a peça BD da ilustração. Devido à presença da caixa d’água, essas peças são cortadas com dois metros de comprimento e postas a meia distância das extremidades A e C da laje. Assim, ABD é um triângulo retângulo de catetos quatro metros e dois metros.

O comprimento da peça de madeira com extremidades em A e em B é, aproximadamente de:

Figura 32: Representação do enunciado da Tarefa 6 da Atividade 2 do 2° ano EM.



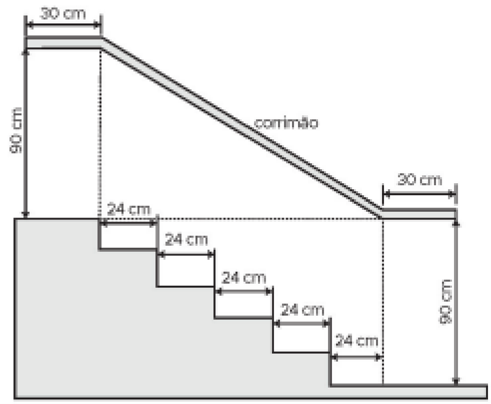
$\sqrt{2} \cong 1,41;\ \sqrt{3} \cong 1,71;\ \sqrt{5} \cong 2,24$

Fonte: Questão do SARESP presente no Caderno do aluno.

a) 5 metros b) 7,05 metros c) 5,19 metros d) 4,48 metros

Tarefa 7: (ENEM 2006) Na figura que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

Figura 33: Representação do enunciado da Tarefa7 da Atividade 2 do 2° ano EM.



Fonte: Questão do ENEM presente no Caderno do aluno.

a) 1,8m b) 1,9m c) 2,0m d) 2,1m e) 2,2m

Esse bloco foi planejado para a duração de 2 horas/aula.

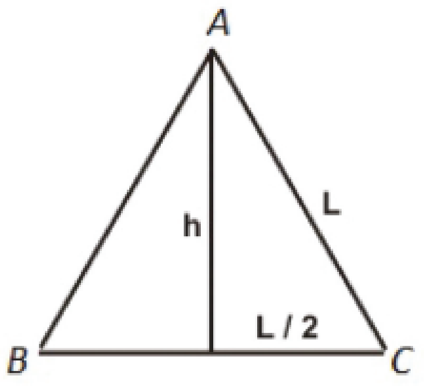
- **2° bimestre do 2° ano do Ensino Médio**

No 2° bimestre não há um tópico voltado para o Teorema de Pitágoras, no entanto há tarefas que utilizam seus conceitos.

Tarefa 1: (Caderno do aluno) (Números irracionais em medições de raízes) Na casa da família Duarte, há um portão de madeira com 2m de comprimento e 2m de altura. Com o passar do tempo, a família tem percebido que o portão tem iniciado um processo de deformação. Para resolver a situação, pensaram em acrescentar uma barra na diagonal. Para garantir o controle desse problema, qual deve ser o comprimento dessa barra? Faça um esboço desse portão e represente a barra que será acrescentada nele. Além disso, justifique sua resposta. Resposta esperada $2\sqrt{2}$.

Tarefa 2: (Caderno do aluno) (Frações com denominadores irracionais) uma estudante do ensino médio informou para um colega que conseguiria representar a medida da altura de qualquer triângulo equilátero por meio de uma expressão algébrica. O colega duvidou e disse que só acreditaria se ela realizasse todas as operações detalhadamente na sua frente. A menina aceitou o desafio, mas informou que ela realizaria os cálculos e ele teria que explicar cada passo. Feito esse combinado, a garote fez os seguintes passos:

Figura 34: Triângulo utilizado para a Tarefa 2 do 2°bimestre do 2° ano EM.



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Fonte: caderno do aluno.

Observe as etapas que a menina seguiu e descreva o passo a passo que o colega deve ter explicado a ela.

- **3° bimestre do 2° ano do Ensino Médio**
- Atividade 1 – A trigonometria no triângulo retângulo.

Objetivos da aula: entender o que é a trigonometria. Conhecer as principais razões trigonométricas no triângulo retângulo. Resolver e elaborar problemas com as principais razões trigonométricas no triângulo retângulo.

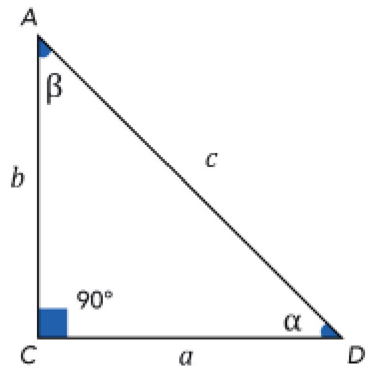
Comentários ao professor: Professor, sugerimos a apresentação do caderno do estudante e um diálogo sobre as ideias centrais das tarefas dessa sequência. Destaque que estudaremos funções periódicas e que partiremos de importantes conceitos relacionados à trigonometria. Ressalte que, na proposta inicial, o importante é que entendam as razões trigonométricas, especialmente, seno, cosseno e tangente.

Ao longo dos estudos da matemática, especificadamente da Geometria plana, desde os primórdios, o triângulo foi sempre considerado uma das principais figuras. Especial atenção sempre foi dada ao estudo do triângulo retângulo.

A trigonometria é a área da matemática, dentro da Geometria, que analisa as relações existentes entre os ângulos de um triângulo e o comprimento de seus lados.

Observe a figura a seguir (Figura 35):

Figura 35: Triângulo retângulo utilizado para demonstrar razões trigonométricas da Atividade 1 do 2° ano EM 3° bimestre.



Fonte: caderno do aluno

O triângulo retângulo é formado pelos catetos, que são os lados que formam o ângulo reto, chamados de cateto adjacente e cateto oposto, e pela hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto, sendo o maior lado do triângulo retângulo. No triângulo ABC acima, a e b são os catetos e c a hipotenusa. As razões trigonométricas foram criadas considerando que dois triângulos retângulos que possuem um segundo ângulo congruente são semelhantes, pois, entre eles, as medidas dos lados são proporcionais e as medidas dos ângulos são congruentes. Logo, tomando um ângulo agudo de um triângulo retângulo, a razão entre seus lados terá o mesmo resultado. Essa constatação possibilitou o desenvolvimento das razões trigonométricas inicialmente em triângulos retângulos, mas depois para triângulos quaisquer. As razões trigonométricas principais são o seno, o cosseno e a tangente, definidas na sequência:

Para o Ângulo β:

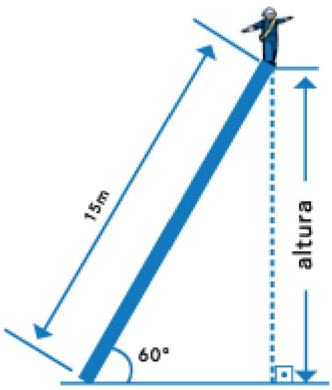
$$sen\beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa};\ cos\beta = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa};\ tg\beta = \frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta}$$

Para o ângulo α:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa};\ cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa};\ tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Tarefa 1: (SARESP, 2021, adaptado) um bombeiro sobe uma escada de 15m de comprimento que forma um ângulo de 60° com o solo. Encontre a altura aproximada que o bombeiro está do solo, quando chega ao topo da escada. Use sen α = 0,87.

Figura 36: Representação do enunciado da Tarefa 1 Atividade 1 do 2° ano EM 3° bimestre.



Fonte: Caderno do professor.

Comentário ao professor: A tarefa 1 consiste na resolução de uma situação problema que envolve a razão trigonométrica seno. Para que os estudantes entendam o processo, é necessário que seja feita a introdução ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Professor, você pode, nesse momento da aula, recordar sobre a importância do estudo dos triângulos nas diversas áreas e situações do cotidiano. Relembre com os estudantes a classificação dos triângulos, e em especial, fale sobre o triângulo retângulo. Apresente situações do dia a dia que esse polígono aparece. Fale sobre as relações métrica e trigonométricas, que resolvem uma série de problemas, com enfoque nas relações trigonométricas, objeto de estudo dessas aulas.

No estudo das razões trigonométricas, existem alguns ângulos que utilizamos com frequência, por esse motivo os chamamos de ângulos notáveis. São eles os ângulos de 30°, 45° e 60°. Sendo assim, é importante conhecer os valores do seno, cosseno e tangente desses ângulos. Confira o quadro a seguir:

Quadro 6: Quadro das relações métricas.

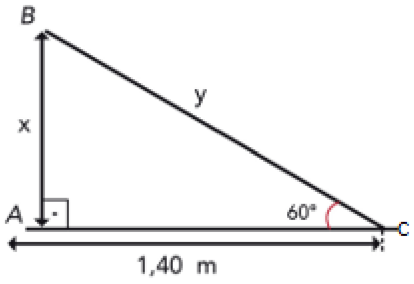
	30°	45°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Caderno do aluno

Agora, com esses valores, vocês podem fazer todas as tarefas que envolvem tais ângulos. Para os demais ângulos, os dados encontrados na tabela trigonométrica, acessível em livros e em plataformas digitais.

Tarefa 2: Observe o triângulo ABC a seguir (Figura 37) e encontre os valores de x e y.

Figura 37: Triângulo ABC utilizado para a Tarefa 2 Atividade 1 do 2° ano EM 3° bimestre.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 3: (SARESP,2019) um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação ao solo. Após percorrer 9km em linha reta, sua altura em relação ao solo será de quanto? Considere sen 30° = 0,5.

Comentários ao professor: nas tarefas 3 e 4 é preciso que os estudantes saibam identificar qual a razão trigonométrica é mais indicada para resolver as tarefas. Também é importante dar ênfase aos valores dos ângulos notáveis, por serem muito utilizados, ficando mais fácil caso os estudantes saibam seus valores.

Tarefa 4: Agora é a sua vez de elaborar uma situação problema que pode ser resolvida utilizando a razão trigonométrica cosseno, de um ângulo de 45°. Após elaborar, troque com um colega da sala vocês resolverem a situação problema do outro e depois socializem a turma.

Comentário ao professor: na tarefa 4, é solicitado aos estudantes que elaborem uma situação problema, com algumas dicas para facilitar a elaboração. Nesse momento, é importante os estudantes estarem em duplas, para trocarem suas atividades.

Essa atividade foi planejada para a duração de 2 horas/aula.

Comentário da autora: observa-se na tarefa 1 da atividade 1 do 3° bimestre a apresentação do valor de um ângulo da seguinte forma: “sen α = 0,87”, no entanto, não aparece “α” no enunciado do exercício e na imagem fornecida pelo exercício, uma possível correção seria substituir o “α” pelo valor do ângulo dado no enunciado, facilitando a compreensão dos alunos. Além disso, observa-se que no 2° do ano do Ensino Médio há uma série de exercícios parecidos. A atividade de repetição na matemática é importante por várias razões. Em primeiro lugar, a repetição é fundamental para a fixação de habilidades básicas, como o cálculo, a álgebra e a geometria. Através da prática repetitiva, os alunos se tornam mais proficientes em resolver problemas matemáticos e em aplicar as regras e fórmulas corretamente. A repetição também pode ajudar a fortalecer a confiança dos alunos em suas habilidades matemáticas, o que pode levar a uma maior motivação e engajamento na disciplina. Embora a atividade de repetição tenha importância e relevância, relembro que o objetivo desse trabalho é apresentar uma abordagem através de dobraduras e do lúdico para o ensino do tema em questão: o Teorema de Pitágoras.

4.2.4 3° ANO DO ENSINO MÉDIO

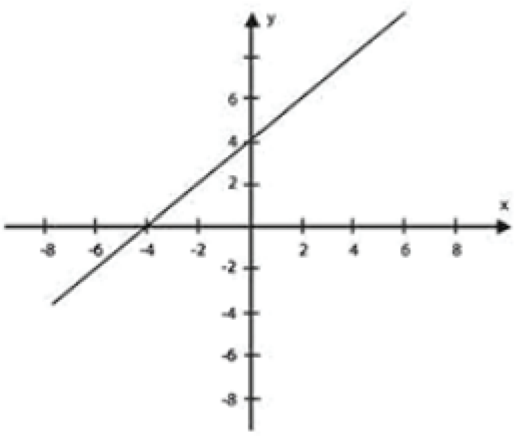
- **1° Bimestre do 3° ano do Ensino Médio**

Neste ano e bimestre o Teorema de Pitágoras é utilizado apenas na resolução de exercícios. Veremos a seguir os exercícios propostos no caderno do aluno que utilizam do Teorema de Pitágoras em sua resolução.

Tarefa 1: (Aula: distâncias) (ENEM, 2011 – adaptado). Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com suas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação, descrita no gráfico (Figura 38), representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5,5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou, ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5km.

Desejando atender ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso poderia ser satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação em algum dos pontos (0,4), (3,1) e (2,6). Qual desses pontos seria o mais conveniente para ser instalada a estação do metrô? Justifique sua resposta.

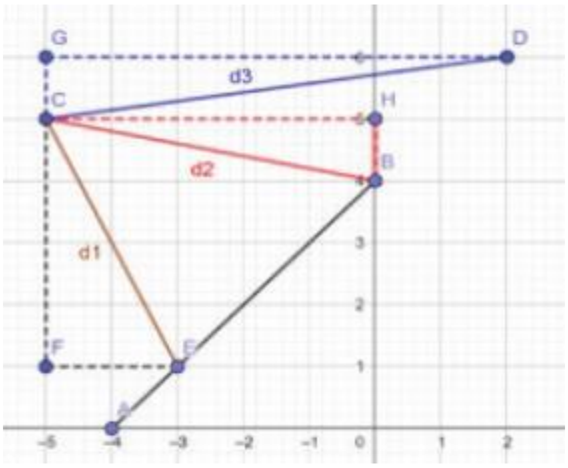
Figura 38: Gráfico utilizado para a Tarefa 1 do 3° ano EM 1° bimestre.



Fonte: Caderno do aluno

Após identificar os pontos dados, os alunos utilizarão o Teorema de Pitágoras para calcular as distâncias.

Figura 39: Representação das distâncias utilizadas na Tarefa 1 do 3° ano EM 1° bimestre.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 2: (Aula: perímetro das figuras planas) O triângulo equilátero possui todos os lados congruentes, isto é, todos os lados do triângulo possuem a mesma medida. O triângulo isósceles possui, pelo menos, dois lados congruentes, ou seja, possui dois lados iguais e um diferente. O triângulo escaleno possui todos os seus lados diferentes, ou seja, cada lado tem uma medida diferente.

Considere o triângulo de vértices A (7,3), B (-4,3) e C (-4,-2). O triângulo ABC é retângulo?

Nessa tarefa o aluno precisa calcular a distância entre os vértices. Identificar a maior distância e supor que essa é a hipotenusa. Então, aplicar o Teorema de Pitágoras e identificar se a soma dos quadrados dos catetos será igual ao quadrado do valor da suposta hipotenusa.

Tarefa 3: (Aula: perímetro das figuras planas) (ENEM, 2014) Um construtor pretende murar um terreno e, para isso, precisa calcular o seu perímetro. O terreno está representado no plano cartesiano, conforme a figura, no qual foi usada a escala 1:500 cm. Use 2,8, como aproximação para $\sqrt{8}$. De acordo com essa informação, o perímetro do terreno, em metros, é:

a) 110.

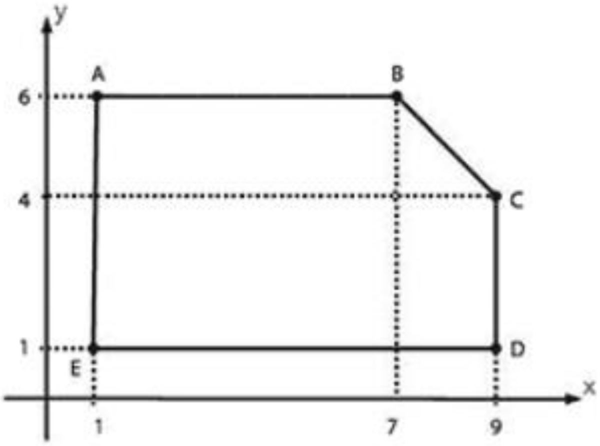
b) 120.

c) 124.

d) 130.

e) 144.

Figura 40: Representação do enunciado da Tarefa 3 do 3° ano EM 1° bimestre.



Fonte: Caderno do aluno.

Nesse exercício o Teorema de Pitágoras será usado para calcular a distância do segmento BC. E então, conseguir finalizar a soma do perímetro.

- **2° bimestre do 3° ano do Ensino Médio**

No 2° bimestre há uma sequência de atividades que tem por objetivo o estudo do triângulo retângulo. Veremos as tarefas propostas no caderno do aluno.

- Atividade 1 – Estudo do triângulo retângulo

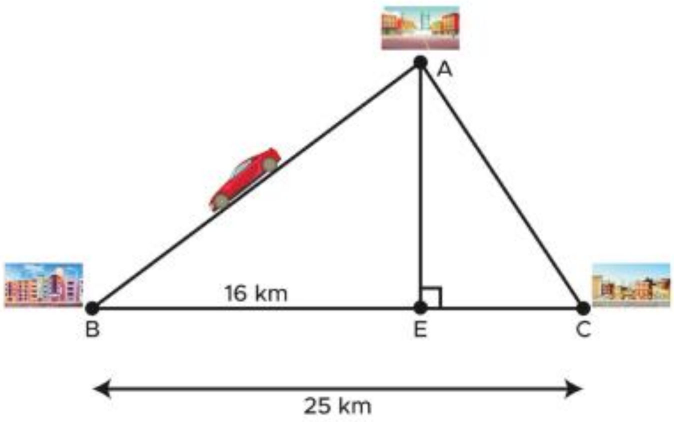
Comentário ao professor: Professor, com as carteiras organizadas em duplas é interessante começar uma conversa com os estudantes informando que, nas próximas aulas, estudarão sobre triângulo retângulo, com o destaque para as atividades iniciais requerem observação de algumas figuras desse triângulo e anotação dos seus elementos e relações. É interessante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto a importância do estudo do triângulo retângulo para o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à aplicação do Teorema de Pitágoras, bem como pelo recorrente uso deste em diversas situações, como por exemplo, a logística e o desenvolvimento cotidiano no setor de transportes. Após essa breve introdução, os estudantes receberão o caderno do estudante para leitura coletiva.

Objetivos da aula: Identificar os elementos do triângulo retângulo, associando cada um à sua medida. Estabelecer relações métricas no triângulo retângulo a partir da semelhança de triângulos envolvendo os catetos, suas respectivas projeções sobre a hipotenusa, a hipotenusa e a altura relativa à hipotenusa.

Tarefa 1: (SARESP, 2020) um motorista vai da cidade A até a cidade E, passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Quantos km ele percorreu?

Comentário ao professor: Na Tarefa 1, sugerimos que discuta com os estudantes as outras relações métricas do triângulo retângulo, revisando o conteúdo.

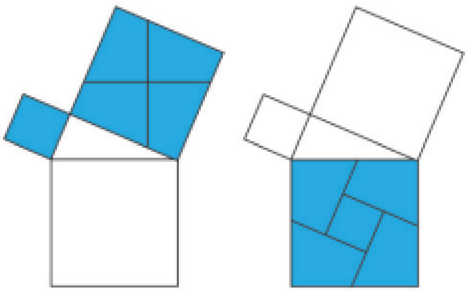
Figura 41: Representação do enunciado da Tarefa 1 da Atividade 1 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno

Tarefa 2: Utilizando o quebra cabeça, use as peças para montar os dois quadrados menores e, em seguida, tente montar o quadrado maior utilizando as mesmas peças. Qual relação é possível estabelecer entre as áreas das figuras?

Figura 42: Quebra cabeça utilizado para a Tarefa 2 da Atividade 1 do 3° ano EM.

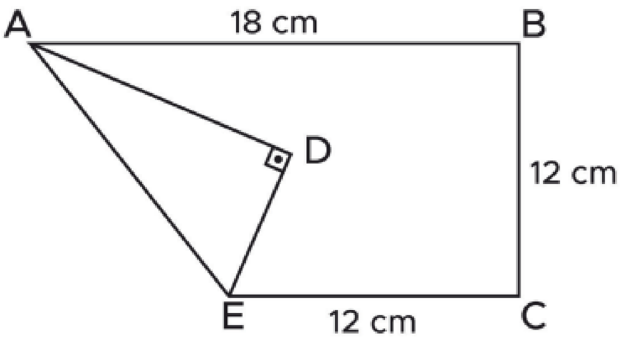


Fonte: Caderno do aluno

Comentários ao professor: Na tarefa 2 comente que devido a um recorte impreciso pode ser que as peças não se encaixem perfeitamente no quadrado da hipotenusa.

Tarefa 3: (ENEM, 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami. Que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne com a técnica do origami, utilizando-se uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura 43.

Figura 43: Representação do enunciado da Tarefa 3 da Atividade 1 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é de:

$$a)\ 2\sqrt{22}c\ m;\ b)\ 6\sqrt{3}\ cm;\ c)\ 12\ cm;\ d)\ 6\sqrt{5}\ cm;\ e) 12\sqrt{2}\ cm$$

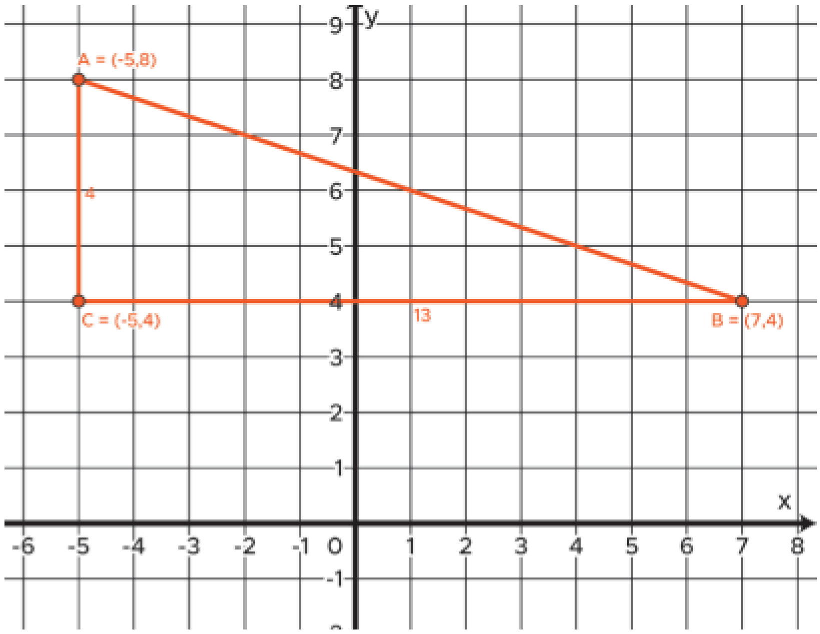
Comentário ao professor: para começar essas tarefas, pode-se definir um triângulo como sendo uma figura geométrica plana formada por três pontos não colineares, que são chamadas de vértice. Retome o conceito de aresta e comente que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre será 180°. Os estudantes terão a oportunidade de relembrar os tipos de triângulo e estudar um caso particular, o triângulo retângulo. Aproveite, este momento para comentar sobre a presença de um ângulo medindo 90°, chamado de ângulo reto, cujo lado oposto a ele recebe o nome de hipotenusa e os outros dois lados são denominados catetos. Oriente os estudantes a desenharem um triângulo retângulo traçando a altura relativa à sua hipotenusa. Com isso, é possível estabelecer suas relações métricas utilizando o conceito de semelhança. Essas relações contribuirão para resolver a tarefa 1 e, portanto, os alunos já estarão prontos para respondê-la. Para a tarefa 2, oriente os estudantes sobre o uso da caneta para pintar, da tesoura sem ponta e cola para a montagem do quebra-cabeça. Com o quebra-cabeça montado é possível realizar uma boa discussão sobre a relação entre as áreas dos quadrados. Será um momento pertinente para demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma empírica para, posteriormente, generalizar a sua fórmula. Os estudantes terão a oportunidade de argumentar sobre suas ideais, percepções e conhecimentos sobre o assunto. A discussão até chegar à fórmula generalizada do Teorema de Pitágoras, contribuirá para a realização da tarefa 3 que diz respeito à aplicação desse teorema.

- Atividade 2 – Estudo do triângulo retângulo no plano cartesiano e aplicação do Teorema de Pitágoras.

Objetivos da aula: reconhecer os conceitos relacionados a localização de um ponto no plano cartesiano através de “deslocamentos” horizontais e verticais, bem como localizar pontos a partir de um ponto dado. Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da altura do triângulo equilátero em situações problema. Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal de um quadrado em situações problema.

Tarefa 1: Localize os pontos A = (-5,8) e B = (7,4) no plano cartesiano e calcule a distância entre eles.

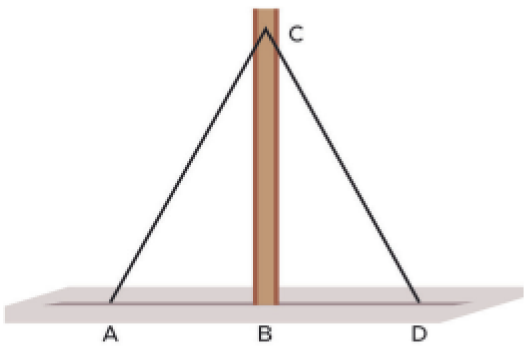
Figura 44: Representação do enunciado da Tarefa 1 da Atividade 2 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno

Tarefa 2: Um poste na vertical é preso a dois fios de cabo de aço fixos no chão de um terreno plano horizontal. Sabendo que o comprimento dos fios é de 30m, e que a distância entre eles relativa ao chão também é de 30m, calcule o comprimento do poste.

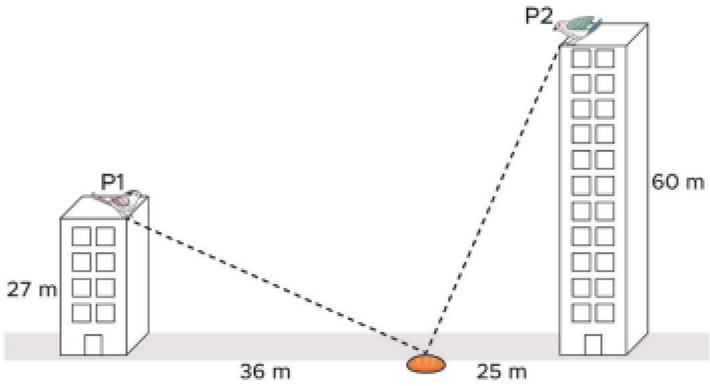
Figura 45: Representação do enunciado da Tarefa 2 da Atividade 2 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 3: (AAP, 2013) Dois pássaros, identificados por P1 e P2, encontram-se no alto de dois prédios e enxergam um pedaço de pão no chão. Eles partem no mesmo instante em direção ao pão, voando em linha reta e à mesma velocidade. Qual pássaro chegará primeiro ao pão?

Figura 46: Representação do enunciado da Tarefa 3 da Atividade 2 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 4 Utilize o Teorema de Pitágoras para deduzir a fórmula da diagonal e qualquer quadrado de lado “l”.

Tarefa 5: Carlos está ajudando seu avô a construir um galinheiro no sítio da família. Na entrada do galinheiro haverá um portão feito com tiras de madeira. O portão terá 0,90m de comprimento e de largura. Porém, para sustentar essas tiras de madeira, será preciso colocar um reforço diagonal no portão. Qual deve ser o comprimento da madeira que Carlos colocará para reforçar o portão?

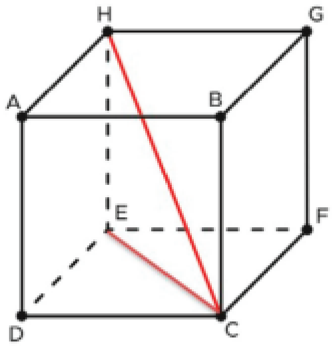
- Atividade 3 – Cálculo da diagonal do prisma

Objetivos da aula: Utilizar o Teorema de Pitágoras para deduzir a medida das diagonais de um cubo, em função da medida do lado. Utilizar o mesmo teorema para deduzir a medida das diagonais de um paralelepípedo, em função da medida dos lados. Resolver e elaborar situações problema de aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo do comprimento das diagonais do cubo e do paralelepípedo.

Comentários ao professor: sugerimos que comente com os estudantes que é possível utilizar o Teorema de Pitágoras em diversas situações, inclusive para deduzir algumas fórmulas. Professor. Se possível, leve para a aula embalagens/objetos em formato de cubo e paralelepípedo reto retângulo. Como exemplos, sugerimos: caixa de creme dental e caixa de presente no formato de cubo. Faça uma retomada sobre as características para um sólido ser classificado como prisma: aresta, face, vértice, diagonal da base e diagonal do prisma.

Tarefa 1: O cubo a seguir tem as arestas medindo 5cm. Determine a medida da diagonal interna (CH) desse cubo.

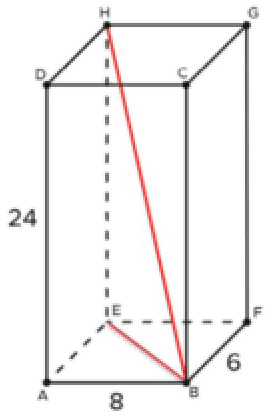
Figura 47: Representação do enunciado da Tarefa 1 da Atividade 3 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 2: Uma caixa tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo com 8cm de comprimento, 6 de profundidade e 24 de altura, conforme a figura a seguir. Encontre a medida do segmento BH, também chamado diagonal do prisma.

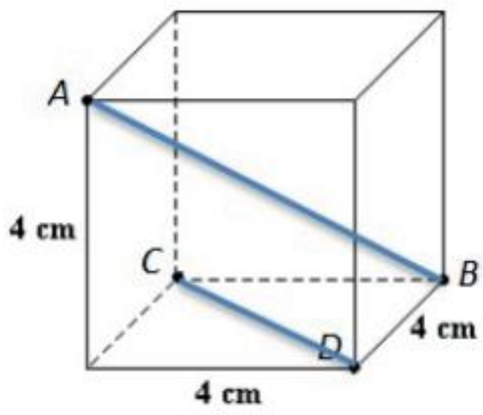
Figura 48: Representação do enunciado da Tarefa 2 da Atividade 3 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno

Tarefa 3: Observe a figura a seguir (Figura 49):

Figura 49: Representação utilizada para a Tarefa 3 da Atividade 3 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Calcule as diagonais AB e CD.

Comentários ao professor: Após relembrar algumas propriedades dos prismas e com os estudantes organizados em duplas pode-se questionar sobre a possibilidade de se calcular a medida da diagonal de um cubo e de um paralelepípedo reto retângulo aplicando o Teorema de Pitágoras. Se necessário, relembre a fórmula da diagonal do quadrado. Recomendamos que disponibilize um tempo, combinado previamente, para os estudantes resolverem a tarefa 1. É importante que os estudantes façam registros das suas resoluções e compartilhem no momento da correção. Aproveite para deduzir a medida da diagonal do cubo em função da medida do lado. Questione os estudantes sobre qual era a medida da aresta e qual foi o resultado final. Com isso, espera-se que eles percebam a relação entre a medida do lado e o cálculo da diagonal do cubo. Sugerimos que faça o mesmo com a tarefa 2.

- Atividade 4 – Aplicação do Teorema de Pitágoras

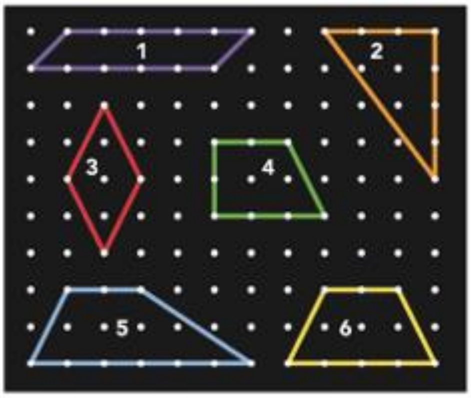
Objetivos da aula: Utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar os perímetros de triângulos e quadriláteros no Geoplano, no plano cartesiano e em malhas quadriculadas. Determinar a distância da linha horizontal a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras e do conhecimento sobre circunferência.

Comentários ao professor: Para essas atividades, propomos uma retomada sobre os principais conceitos tratados no decorrer dessa sequência de tarefas. Desse modo, sugerimos três atividades que serão aplicadas nos estudos já realizados. Assim, o início pode ser por meio de um diálogo com informações sobre a proposta. Além disso, consideramos interessante esclarecimentos quanto às atividades que serão desenvolvidas nas aulas desse dia.

As próximas atividades propõem a sistematização do que foi estudado sobre as figuras espaciais. Sendo assim, leia com clareza os enunciados e busque resgatar os conhecimentos já desenvolvidos nas aulas anteriores. A partir da tarefa 4, você irá se deparar com oito questões que são itens do ENEM e SARESP.

Tarefa 1: Considerando que a distância entre dois pontos é de 1 unidade de medida, determine o perímetro das figuras a seguir (Figura 50).

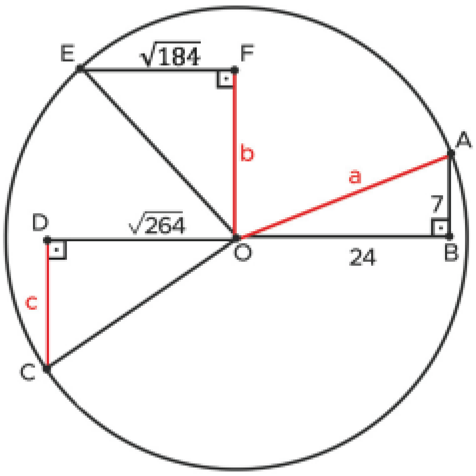
Figura 50: Representação utilizada para a Tarefa 1 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 2: Determine a medida de AO, FO, CD.

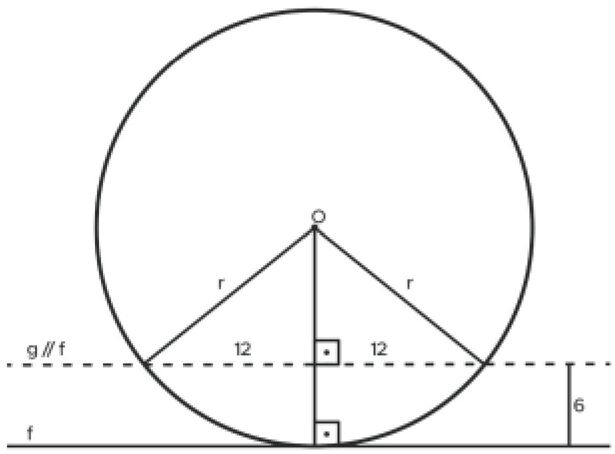
Figura 51: Representação utilizada para a Tarefa 2 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 3: Determine o raio da circunferência a seguir (Figura 52):

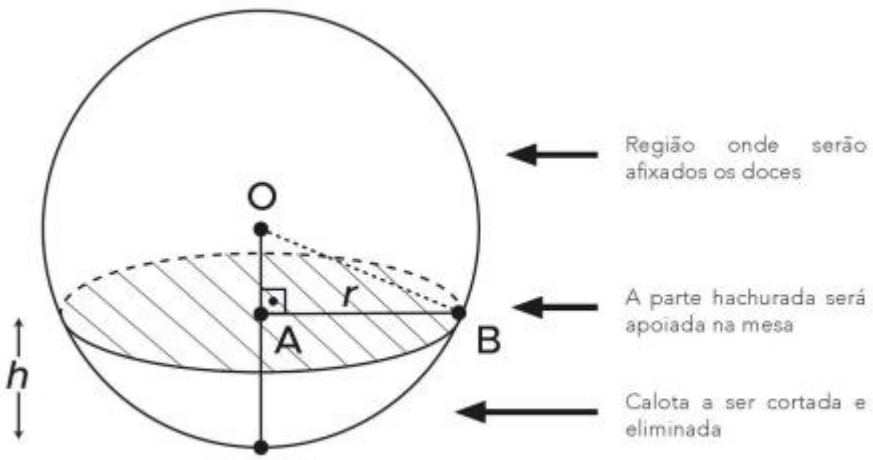
Figura 52: Representação utilizada para a Tarefa 3 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 4: (ENEM, 2017) Para decorar uma mesa de festa infantil um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão fixados os doces.

Figura 53: Representação utilizada para a Tarefa 4 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetros, igual a:

$$a)\ 5-\sqrt{\frac{91}{2}};\quad b)\ 10-\sqrt{91};\quad c)\ 1;\quad d)\ 4;\quad e)\ 5$$

Tarefa 5: (ENEM, 2016) A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura a seguir ilustra um bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado um bocha, de raio 5cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2cm.

Figura 54: Representação utilizada para a Tarefa 5 da Atividade 4 do 3° ano EM.

Fonte: Caderno do aluno

Considere o ponto C como o centro do bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

$$a)\ 1; \quad b)\ 2\sqrt{2}; \quad c)\sqrt{5}; \quad d)\ 2; \quad e)\ \sqrt{10}$$

Tarefa 6: (ENEM, 2014) Diariamente, uma residência consome 20160Wh. Esse relógio possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6cm x 8cm. Cada uma das tais células produz, ao longo doa dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.

b) Retirar 40 células.

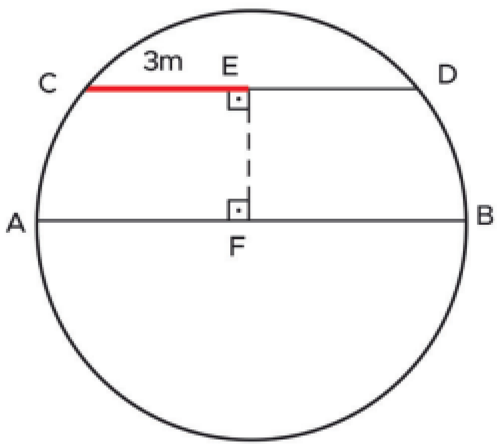
c) Acrescentar 5 células

d) Acrescentar 20 células.

e) Acrescentar 40 células.

Tarefa 7: Marcos possui em sua empresa um tanque cilíndrico cujo topo mede 8 metros de diâmetro e 4 metros de profundidade. Sabendo que o círculo abaixo representa o topo no tanque, encontre a medida do segmento EF. Note que é o centro da circunferência e que os segmentos CD e AB são paralelos.

Figura 55: Representação utilizada para a Tarefa 7 da Atividade 4 do 3° ano EM.



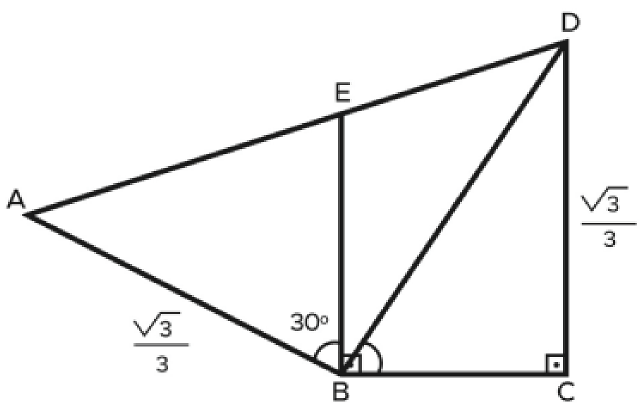
Fonte: Caderno do aluno

Tarefa 8: Paula mora no bairro Juca Floriano e sua escola fica localizada no bairro Constantina. Na figura abaixo a casa de Paula é representada pelo ponto A e para concluir uma pesquisa, ela necessita descobrir a medida de AD, onde D é a sua escola. Sabendo que Paula conhece apenas as medidas e graus representados na imagem, encontre a medida de AD em km.

Dados 4/3=1,3 e 1/3=0,3.

A medida do segmento BC é igual a 1 e o segmento BE é perpendicular ao segmento AD.

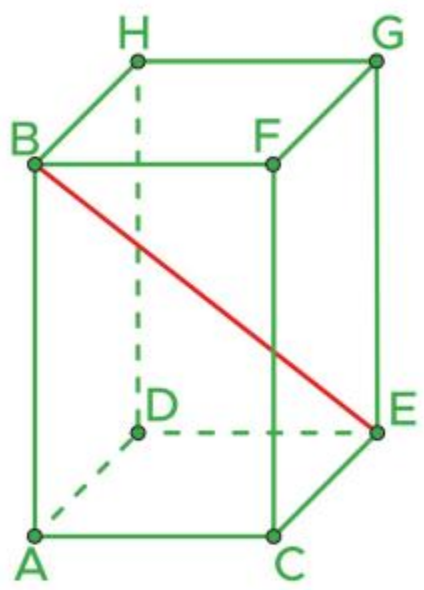
Figura 56: Representação utilizada para a Tarefa 8 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 9: a figura abaixo é um bloco retangular de base quadrada, onde sua altura mede 8cm e o lado de sua base mede 4cm. Qual a medida da diagonal BE deste bloco retangular?

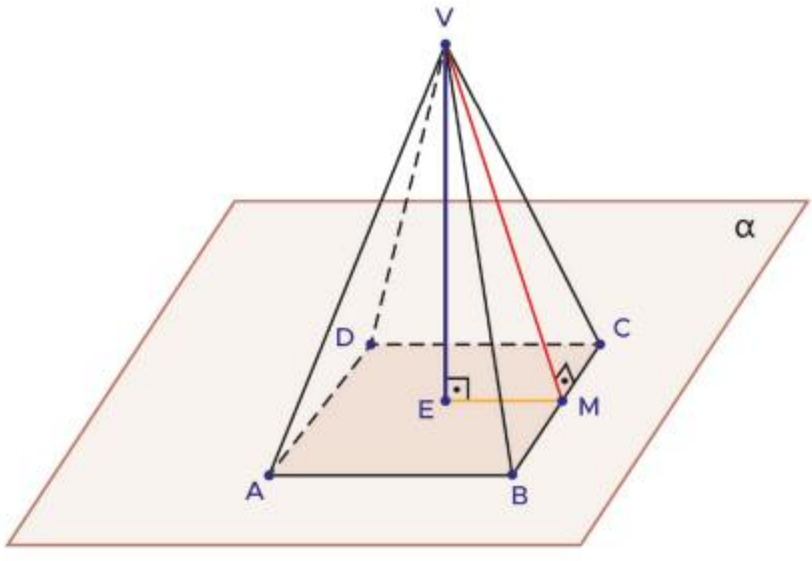
Figura 57: Representação utilizada para a Tarefa 9 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Tarefa 10: A pirâmide possui uma base quadrada com medida de 8cm. Sabendo que a medida de VC é de 10cm, encontre a altura VE da pirâmide.

Figura 58: Representação utilizada para a Tarefa 10 da Atividade 4 do 3° ano EM.



Fonte: Caderno do aluno.

Comentário da autora: na seção referente ao 3° ano do Ensino Médio, não há a presença de atividades lúdicas e, sim, diversos exercícios de vestibulares. Os exercícios de matemática de vestibular são importantes por várias razões. Em primeiro lugar, eles permitem que os alunos pratiquem a aplicação dos conceitos matemáticos que aprenderam ao longo do ensino médio em situações concretas e contextualizadas. Isso é fundamental, pois muitas vezes os problemas do vestibular envolvem situações do cotidiano e exigem uma boa capacidade de interpretação e resolução de problemas. Além disso, os exercícios de matemática de vestibular são uma forma eficaz de preparar os alunos para a prova, já que muitas vezes os testes de vestibular envolvem questões complexas e desafiadoras. A prática com exercícios de vestibular ajuda os alunos a se familiarizarem com o tipo de questões que podem ser apresentadas na prova, e a desenvolverem uma boa estratégia para resolvê-las.

4.3 APOSTILA OBMEP

4.3.1 TEOREMA DE PITÁGORAS E ÁREAS

O Teorema de Pitágoras é um dos temas de maior importância na Geometria, esse assunto é abordado, geralmente, no 9° ano do Ensino Fundamental, no entanto diversos tópicos da matemática utilizam esse teorema e, portanto, torna-se um assunto frequente no Ensino Médio. Embora seja um assunto frequente, é pouco aprofundado e os alunos perdem a oportunidade de conhecer as surpreendentes aplicações desse teorema.

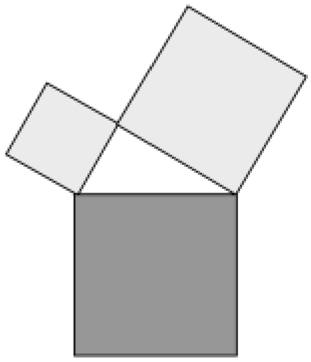
Pitágoras nasceu na ilha de Samos e foi um grande responsável pelas ideias iniciais da matemática como ciência. Foi um grande viajante, observando em diferentes culturas o desenvolvimento do conhecimento matemático. Em Crotona, onde hoje é a Itália, Pitágoras fundou uma sociedade secreta dedicada ao estudo de matemática e filosofia, hoje chamaríamos de escola. Um fato histórico curioso é que todos os documentos da época se perderam e sua escola secreta era comutaria, ou seja, as descobertas eram comuns e pertenciam a todos. Por essa razão, Pitágoras é uma figura obscura na história e nem se sabe ao certo se ele foi o responsável por definir o teorema que recebe o seu nome, mas ele recebe o nome no teorema pois naquela época todo crédito era dado ao mestre. Acredita-se que a demonstração original deva ter sido usando áreas.

O enunciado do Teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os seus catetos.

Considerando “a” a medida da hipotenusa e “b” e “c” a medida dos catetos, podemos afirmar pelo enunciado do Teorema de Pitágoras que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 59: Imagem utilizada para demonstrar o Teorema de Pitágoras material OBMEP.



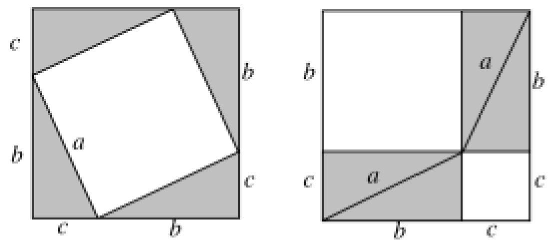
Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Utilizando-se do recurso da imagem (Figura 59), conclui-se que a área sombreada em tom mais claro é igual à área escura. Esse fato é misterioso e intrigante, para que possamos nos convencer dessa verdade tomemos algumas demonstrações.

- **A demonstração clássica**

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa “a” e catetos “b” e “c”, considere o quadrado cujo lado é “b + c”.

Figura 60: Imagem utilizada para realizar a demonstração clássica do Teorema de Pitágoras do material da OBMEP.



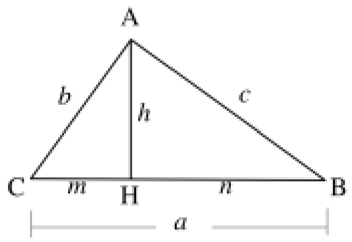
Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Na figura 60, figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado “b + c” quatro triângulos retângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a. Na figura 60, figura da direita, retiramos também do quadrado de lado “b + c” os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado “b” e outro de lado “c”. Logo, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem “b” e “c”.

- **A demonstração que usa semelhança**

Seja o triângulo ABC (Figura 61), onde Â = 90°, “m” e “n” as projeções verticais dos catetos “b” e “c” sobre a hipotenusa “a” e “h” a altura do triânuglo ABC em relação a hipotenusa “a”.

Figura 61: Triângulo utilizado para demonstrar o Teorema de Pitágoras por semelhanças do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

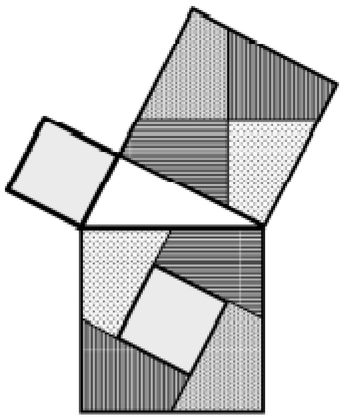
Da semelhança de triângulos AHC e ABC, demonstrado anteriormente, temos “b^2=a.m” e, da semelhança de triângulos AHB e ABC, também já demonstrado, temos c^2=na. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = axa = a^2$$

Essa demonstração é frequente feita nas escolas, pois permite a demonstração do Teorema de Pitágoras e permite encontrar as métricas importantes do triângulo retângulo.

- **A demonstração de Perigal**

Figura 62: Imagem para demonstrar o Teorema de Pitágoras por Perigal do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

A demonstração de Perigal parte do traçado, sobre o quadrado construído sobre o maior cateto, de duas retas perpendiculares entre si, passando pelo centro desse quadrado e, uma delas, paralela à hipotenusa do triângulo dado. Com isso, o quadrado construído sobre o maior cateto ficará dividido em quatro partes congruentes. Essas quatro partes mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa, o que demonstra o Teorema de Pitágoras.

- **A recíproca do Teorema de Pitágoras**

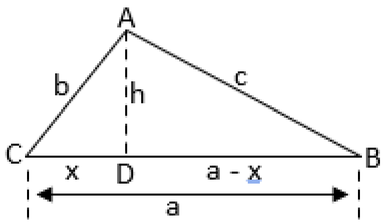
A pergunta é: se “a”, “b” e “c” são reais positivos com “$a^2=b^2+c^2$” será o triângulo de lados “a”, ”b” e “c” retângulo?

Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, vamos demonstrar. Considere então triângulo ABC com BC = a, CA = b e AB = c.

1° caso: Se Â < 90°

Tomemos b ≤ c. Assim, o ponto D, projeção de A sobre BC, cai no interior do lado BC. Sejam AD = h e CD = x. Consequentemente BD = a - x

Figura 63: Imagem utilizada para provar a recíproca do Teorema de Pitágoras do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

No triângulo retângulo ACD temos que: $b^2 = h^2 + x^2$ (1).

No triângulo retângulo ABD temos que: $c^2 = h^2 + (a - x)^2$ (2).

De (2) temos: $c^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2.a.x$ (3).

Substituindo (1) em (3) temos que:

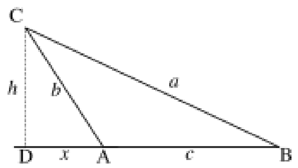
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.x \rightarrow a^2 = c^2 - (b^2 + 2.a.x) \leq b^2 + c^2$$

Ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$ que contradiz a condição inicial.

2° caso: A > 90°

Agora, o ponto D fica fora do lado AB

Figura 64: Imagem utilizada para provar a recíproca do Teorema de Pitágoras do material OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Utilizando os mesmos cálculos do caso anterior, teremos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

Ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que:

$$A < 90° \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90° \rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que A=90°.

- **Ternos pitagóricos**

O triângulo de lados 1, 3 e $\sqrt{10}$ é retângulo? Sim, pois tomando o maior desses números $(\sqrt{10})$como sendo a possível hipotenusa, temos:

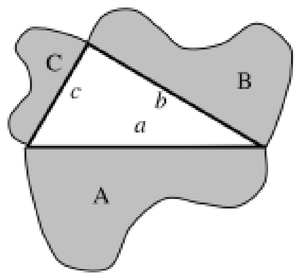
$$\left(\sqrt{10}\right)^2 = 1^2 + 3^2$$

Até hoje busca-se encontrar triângulos cujos lados são medidos por lados inteiros. O triângulo de lados 3 ,4 e 5 é retângulo, mas o triângulo de lados 372, 925 e 997 também é retângulo. Este é o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1000. Faz-se a seguinte pergunta: Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?

- **Generalizando o Teorema de Pitágoras**

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído a partir da medida hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos a partir das medidas dos catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados dos triângulos.

Figura 65: Imagem utilizada para generalizar o Teorema de Pitágoras do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Sejam A, B e C as áreas dessas figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura 65. Sabendo que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, então:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

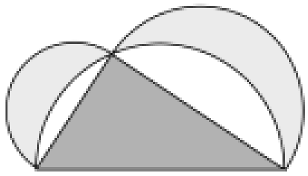
$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 ou \ \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

Pela propriedade transitiva das proporções, pelo fato do triângulo dado ser retângulo, temos que $a^2 = b^2 + c^2$ e, consequentemente A=B+C. Isto quer dizer que, se as figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída a partir da medida da hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Generalizando, assim, o Teorema de Pitágoras.

Após a apresentação dessa definição há diversos problemas a serem propostos, dos quais vale a leitura do professor para selecionar alguns para os alunos. Um problema que me chamou a atenção pelo fato de sair da generalização dos quadrados comumente apresentado foi o problema de Hipócrates:

Problema: o problema de Hipócrates. A figura a seguir (Figura 66) mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros dos semicírculos. Mostre que a soma das áreas das duas lúnulas sombreadas é igual à área do triângulo.

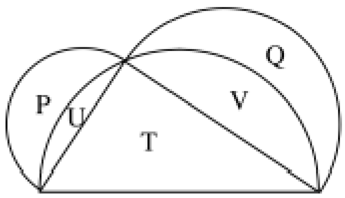
Figura 66: Imagem utilizada no problema de Hipócrates do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Solução: Sejam: T a área do triângulo, P e Q as áreas das lúnulas e U e V as áreas das outras duas regiões.

Figura 67: Imagem utilizada para resolver o problema de Hipócrates do material da OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Teorema de Pitágoras e áreas.

Como a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos temos T + U + V = P + U + Q + V, ou seja, T = P + Q, como queríamos mostrar.

4.3.2 OFICINA DE DOBRADURAS

O uso de dobraduras no ensino vem se tornando cada vez mais reconhecido como um instrumento pedagógico interessante e muitas vezes eficaz por dois motivos, pelo seu caráter lúdico e pela sensação de descoberta que muitas vezes provoca. A dobradura no material da OBMEP é dividida em duas partes. Na primeira, são sugeridos e ilustrados alguns procedimentos, sem haver a preocupação de justificativa. Na segunda parte, faz-se uma discussão sobre a geometria das dobraduras e apresenta-se as justificativas do problema.

Este material foi estudado para basear esse trabalho e fundamentar o plano de aula proposto. No entanto, fica como sugestão de leitura à professores que desejam aplicar esse método em suas aulas. Iremos explorar com mais detalhes o material sobre Origamis.

4.3.3 EXPLORANDO A GEOMETRIA COM ORIGAMIS

É muito comum as pessoas associarem o origami com dobraduras de animais, flores e outras formas, mas quase nunca à Geometria. Por este motivo, talvez, seja pouco usada no ensino. O que torna o método uma importante opção de trabalho em sala de aula é o fato de atrair a atenção de crianças, jovens e adultos.

As primeiras aplicações da Geometria que se tem notícia apareceram em problemas relacionados com divisão de terras e astronomia. Desde então é constante o uso da Geometria e se faz presente desde os primeiros anos escolares. No entanto, é notório a dificuldade no aprendizado e a falta de motivação no estudo dessa área. A aplicação do origami pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um pedaço de papel.

O origami, é de origem desconhecida e tem etimologia japonesa o qual significa dobrar (ori) papel (kami). Relacionar geometria e origami possibilita o trabalho de sala de aula no estudo da geometria elementar, com o uso de uma técnica milenar, concreta e divertida, além de acessível a qualquer pessoa.

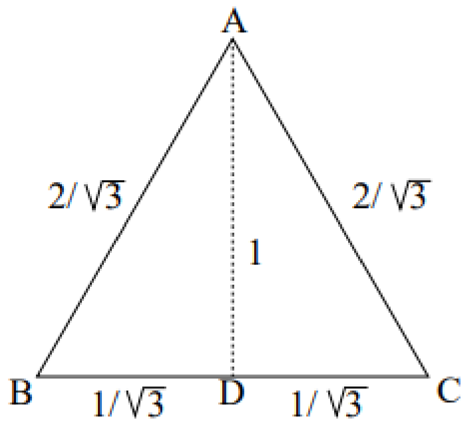
Vamos analisar os poliedros de Platão de faces triangulares propostos no material da OBMEP, uma vez que o presente trabalho busca novas formas de ensino no mundo da Geometria e dos triângulos.

Entre os cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão, três deles são constituídos de faces triangulares: tetraedro, octaedro e icosaedro.

- **Triângulos equiláteros de lados medindo $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$**

A construção da unidade básica (1) passa pelo trabalho com triângulos equiláteros e retângulos de proporções especiais. Trabalhando inicialmente com as razões $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sobre os lados de um triângulo equilátero, de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e dois triângulos retângulos obtidos pela construção da altura relativa a um dos lados, a unidade básica aparece naturalmente, visto que: $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$.

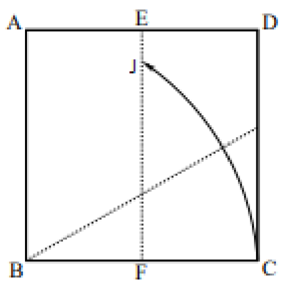
Figura 68: Triângulo equilátero de lados $1/\sqrt{3}$ e $2/\sqrt{3}$ material OBMEP.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Seja um papel quadrado ABCD de lado 1. Encontre EF, onde E e F são pontos médios de AD e BC, respectivamente. Fixando o ponto B, leve-o até C em EF, como se suas mãos funcionassem como um compasso, determinando o ponto J.

Figura 69: Representação da dobradura C à J.

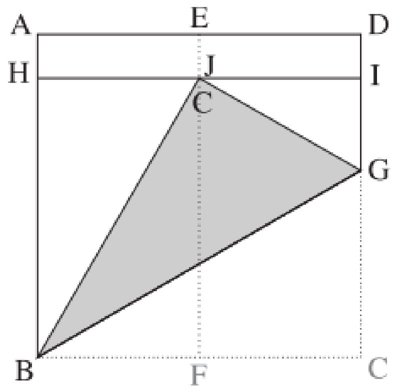


Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Pelo ponto J em EF, dobre a perpendicular HI em relação a EF. Teremos, para o segmento HB que:

$$(HB)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow HB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 70: Representação da dobradura, construção do segmento HB.

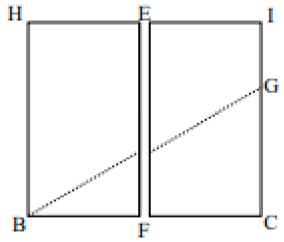


Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Teremos agora, dois casos.

O primeiro caso, a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Corte por HI e EF da figura 70. Obteremos duas peças, cujas proporções dos lados são de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ em cada peça. $\frac{BF}{HB} = \frac{FC}{IC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

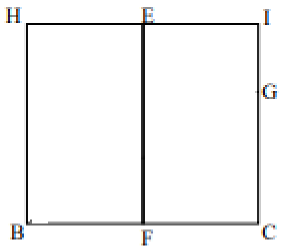
Figura 71: Representação da dobradura peças de lado 1/√3.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

No segundo caso a razão $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Corte somente por HI. Sem cortar por EF, teremos um retângulo com a seguinte proporção: $\frac{BC}{HB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

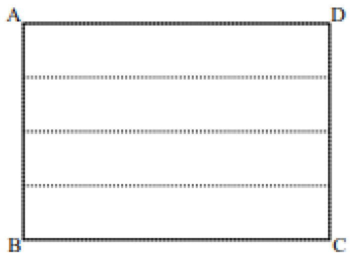
Figura 72: Representação da dobradura do retângulo de proporção 2/√3.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Seja um papel A4 com os vértices ABCD. Dobre pelo lado menor ao meio e depois ao meio novamente, obtendo assim, três vincos, dividindo o papel em 4 partes iguais.

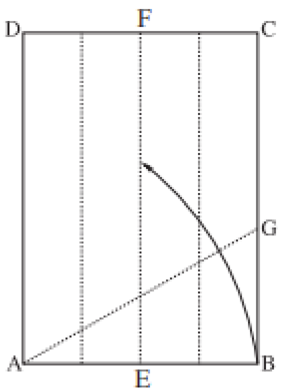
Figura 73: Representação da dobradura papel A4 em 4 partes iguais.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Rotacionando 90°, no sentido anti-horário a Figura #, se fixarmos o ponto A, leve o vértice B até o segmento EF ("vinco" central"), rotacionando em torno do eixo AG (novo "vinco").

Figura 74: Representação da dobradura novo vinco AG.

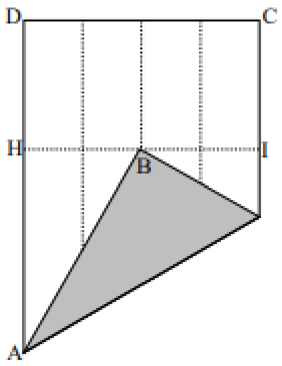


Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Pelo ponto obtido em EF marque o segmento HI perpendicular a AD.

$$\frac{\frac{AH}{2}}{\frac{AB}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Figura 75: Representação da dobradura do segmento HI.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

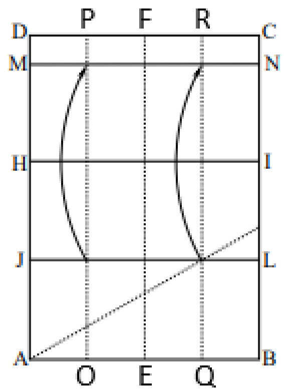
Pelo que vimos anteriormente, a altura AH equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se considerarmos AB=1, isto é, $\frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se dividirmos $\overline{AB}$ em 4 partes iguais, formando os segmentos de retas $\overline{OP}, \overline{EF}$ *e* $\overline{QR}$ e $\overline{AH}$ em 2 partes iguais, formando os segmentos de retas $\overline{HI}$ *e* $\overline{JL}$, temos que:

$$\sqrt{3} = \frac{\overline{AH}}{AB} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AJ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$

Traçando um segmento de reta ($\overline{MN}$) paralelo a $\overline{HI}$, sendo as medidas dos segmentos de retas $\overline{AJ},\ \overline{JH}$ *e* $\overline{HM}$ iguais.

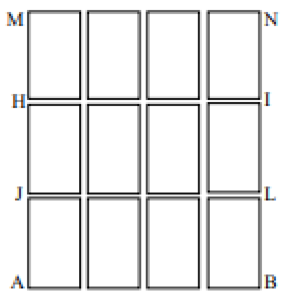
Figura 76: Representação da dobradura segmentos AJ, JH e HM.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

O resultado é a obtenção de 12 peças com a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Figura 77: Representação da dobradura 12 peças para dobradura.



Fonte: material OBMEP: Explorando a geometria com origamis.

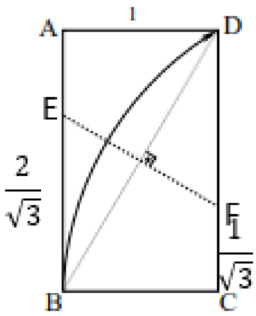
- **Construção das unidades A e B dos poliedros de Platão de faces triangulares**

Construiremos agora os módulos, que chamaremos de "unidades" A e B dos poliedros de faces triangulares. Para isto, será necessário a utilização de retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, como as 12 peças obtidas do papel A4, visto anteriormente. Estas unidades formam triângulos equiláteros, que ao se encaixarem, produzirão os poliedros.

Unidade A

Com uma peça retangular ABCD, respeitando as proporções, leve o vértice B ao ponto D. Ao levar B a D, surge um eixo de rotação EF.

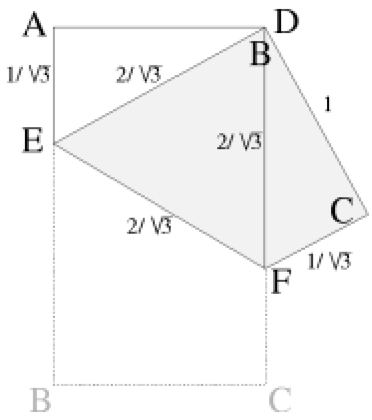
Figura 78: Representação da dobradura construção eixo EF.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

EF é a mediatriz de BD. Os ▲EFD e ▲EFB são equiláteros de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

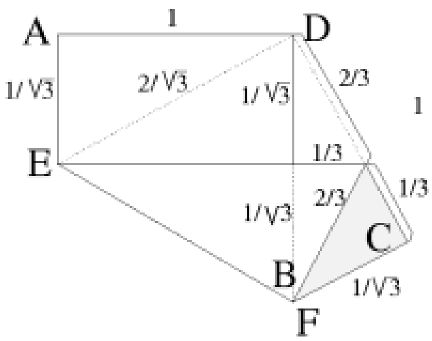
Figura 79: Representação da dobradura triângulos equiláteros de lado 2/√3.



Fonte: material OBMEP: Explorando a geometria com origamis.

Leve o vértice B ao ponto F. A nova dobra ($\overline{ED}$) é paralela a $\overline{FC}$.

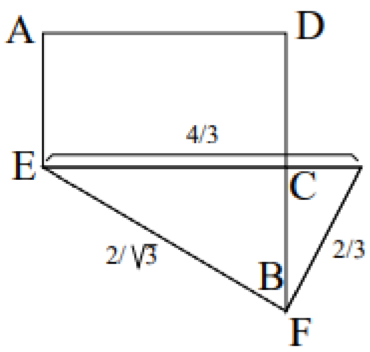
Figura 80: Representação da dobradura ED//FC.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve o vértice C sobre DF.

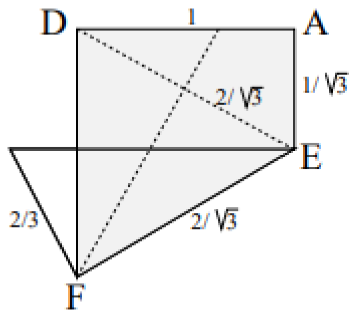
Figura 81: Representação da dobradura construção segmento DF.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Gire a peça 180°, horizontalmente, de modo que a parte de trás fique para frente.

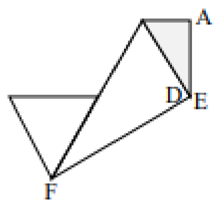
Figura 82: Representação da dobradura peça rotacionada em 180°.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve o vértice D ao ponto E.

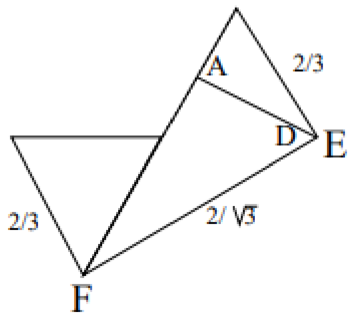
Figura 83: Representação da dobradura vértice D ao ponto E.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Mova o vértice A dobrando segundo o eixo que passa pelo ponto E.

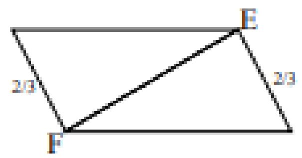
Figura 84: Representação da dobradura da construção do segmento AE.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Desfaça a dobra feita a partir do eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.

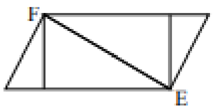
Figura 85: Representação da dobradura constrói-se o paralelogramo.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Gire a peça 180°, verticalmente, de modo que a parte oculta volte-se para frente.

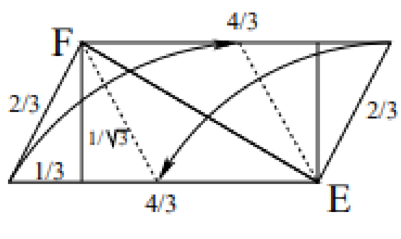
Figura 86: Representação da dobradura paralelogramo rotacionado em 180°.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.

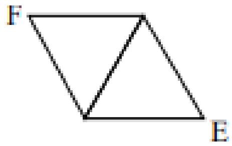
Figura 87: Representação da dobradura marcação dos triângulos equiláteros.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Obtém-se um losango, cujos lados e a diagonal menor medem $\frac{2}{3}$.

Figura 88: Representação da dobradura losango.

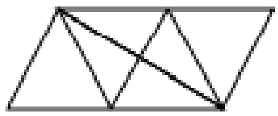


Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Da Figura 87 dada, temos que a base do paralelogramo é $\frac{4}{3}$, ou seja, cabem dois da figura anterior, cujo lado mede $\frac{2}{3}$.

Temos ainda que, na Figura 87, no paralelogramo apresentado, há um triângulo retângulo com cateto menos medindo $\frac{1}{3}$, cateto maior (altura) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e hipotenusa medindo $\frac{2}{3}$. Esses valores satisfazem as medidas do triângulo equilátero citado no início deste estudo sobre a construção dos poliedros de Platão de faces triangulares. Abra o losango para obter a unidade A, que é composta por quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{2}{3}$.

Figura 89: Representação da dobradura completa da unidade A.



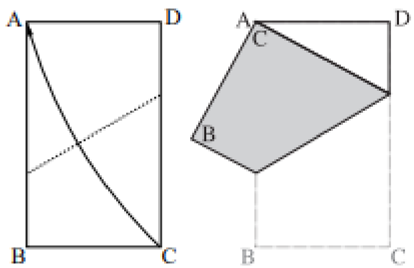
Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Unidade B

A construção segue os mesmos procedimentos da unidade A, com a diferença do lado pelo qual inicia-se a dobra.

Com uma peça retangular ABCD, respeitando as proporções, leve o vértice C ao A. O eixo de rotação será chamado de EF.

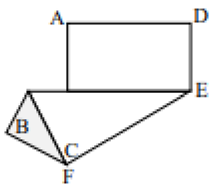
Figura 90: Representação da dobradura vértice C ao vértice A.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve o vértice C ao ponto F.

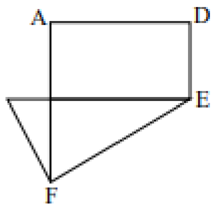
Figura 91: Representação da dobradura vértice C ao vértice F.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve o vértice B sobre AF.

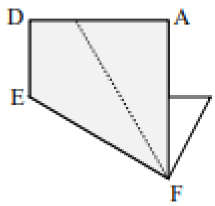
Figura 92: Representação da dobradura vértice B sobre o segmento AF.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.

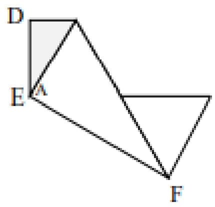
Figura 93: Representação da dobradura peça rotacionada.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve o vértice A ao ponto E.

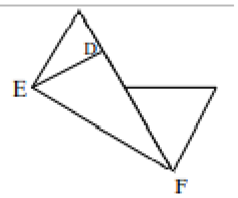
Figura 94: Representação da dobradura vértice A ao ponto E.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Gire o vértice D sobre o eixo que passa pelo ponto E.

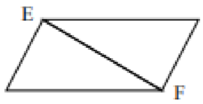
Figura 95: Representação da dobradura construção do segmento DE.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Desfaça a dobra pelo eixo EF, de modo que apareça um paralelogramo.

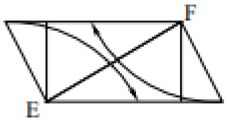
Figura 96: Representação da dobradura do paralelogramo.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando vértices com ângulos obtusos.

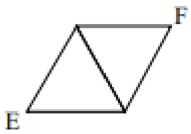
Figura 97: Representação da dobradura marcação dos triângulos equiláteros.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Obtém-se um losango.

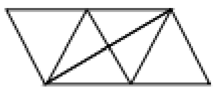
Figura 98: Representação da dobradura do losango.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Abrindo, tem-se a unidade B.

Figura 99: Representação da dobradura construção da unidade B.

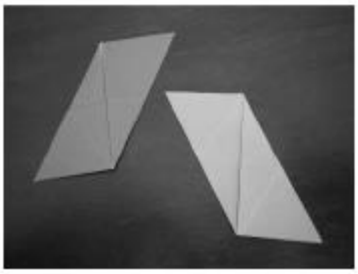


Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

- **Montagem do Tetraedro**

Para a construção do tetraedro são necessários dois módulos da unidade A e uma da unidade B. Tome uma unidade de cada módulo (A e B), como mostra a Figura 100.

Figura 100: Representação da dobradura peças de Unidade A e B.



Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Note que em cada unidade temos quatro triângulos equiláteros e os triângulos das pontas não possuem corte. Os cortes, que devem atingir o ponto médio dos lados dos triângulos equiláteros interno das unidades A e B, formam aberturas para se encaixarem nos triângulos das pontas, os quais ficarão no lado externo do poliedro.

Encaixe a unidade A em um dos cortes da unidade B (ou B em A).

Figura 101: Representação da dobradura encaixe das peças.

Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Encaixe a segunda unidade da unidade A, com os cortes feitos de maneira análoga, nesses dois paralelogramos encaixados como mostra a Figura 101.

Dobre os lados dos triângulos equiláteros dando a forma de um tetraedro, encaixando todas as pontas.

Figura 102: Representação da dobradura do tetraedro.

Fonte: material OBMEP: Explorando a Geometria com origamis.

Esse material nos auxiliará na proposta de planos de aula a seguir.

Após a construção do tetraedro de Platão, recomenda-se que o professor assista ao vídeo no link: https://www.youtube.com/watch?v=3Aocrid5uGQ. A sugestão é realizar a montagem do octaedro de Platão utilizando-se dos mesmos processos apresentados no vídeo. Esse vídeo não consta nos materiais da OBMEP e é uma sugestão da autora. Nos materiais da OBMEP apresenta-se a sugestão para construir um octaedro utilizando-se das unidades A e B construídas, no entanto o processo não é trivial, pois o material propõe a construção de duas pirâmides de base quadrada e as peças A e B construídas possuem somente triângulos equiláteros. Recomenda-se ao professor utilizar o processo apresentado no vídeo para melhor entendimento dos alunos.

5. PROPOSTAS DE DOIS PLANOS DE ENSINO

5.1 PLANO DE ENSINO 1

Objetivos do Plano de Ensino 1: Mostrar que a demonstração do Teorema de Pitágoras não se aplica somente quando usamos quadrados de lados iguais aos catetos e a hipotenusa. Mas podemos demonstrar utilizando qualquer tipo de figura, desde que sejam semelhantes entre si.

Público-alvo: Alunos do 9° ano do ensino fundamental.

Habilidades (Ensino Fundamental II) a serem trabalhadas: Tendo como base as Habilidades especificadas anteriormente na seção 4.1, neste 1º Plano de Ensino são desenvolvidas as seguintes:

- EF09MA13: Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando inclusive a semelhança de triângulos.
- EF09MA14: Resolver e elaborar situações problema de aplicação do Teorema de Pitágoras.

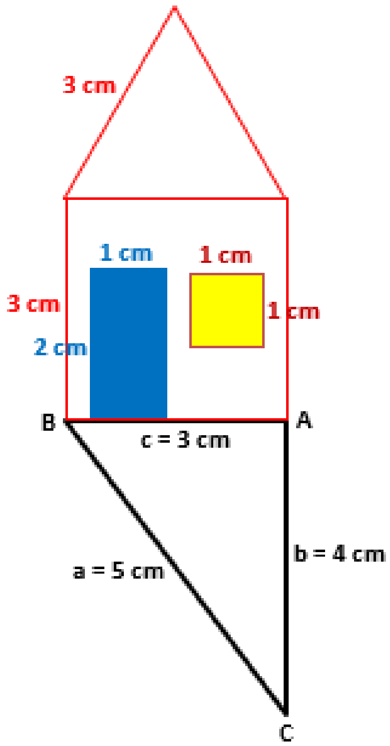
Materiais necessários: ao menos 2 (duas) folhas quadriculadas para cada aluno, canetas ou lápis de ao menos 4 (quatro) cores diferentes, régua, lápis e borracha. A apresentação do conteúdo será feita em lousa e utilizando-se de data show.

Tempo das atividades em sala de aula: 4 (quatro) horas-aula, dividida em dois blocos de 2 (duas) horas-aula cada.

Pré-requisitos necessários ou a serem trabalhados neste Plano de Ensino 1: a sugestão nesse Plano de Ensino é que o professor trabalhe o conteúdo de Geometria segundo o que foi descrito na seção 2.3.3 (Explorando a Geometria com Origamis), no qual os alunos terão a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos em triângulos, nesse caso em específico, equiláteros e construir um tetraedro através de dobraduras. Após introduzir os conceitos geométricos, a sugestão é prosseguir com o descritivo presente na seção 2.3.1 (Teorema de Pitágoras e áreas), no qual os alunos conhecerão um pouco da história e as principais demonstrações desse teorema. Dessa forma, terão os pré-requisitos necessários para realizar o problema proposto, demonstrar e validar o Teorema de Pitágoras através de uma figura desenhada sobre um cateto.

Problema do Plano de Ensino 1: Verificar a veracidade do Teorema de Pitágoras, considerando-se um triângulo retângulo básico, de lados inteiros, (Terna Pitagórica: 3 cm, 4 cm, 5 cm), onde, sobre a base do cateto menor é desenhado a frente de uma casa, conforme figura 103:

Figura 103: Representação do problema proposto.



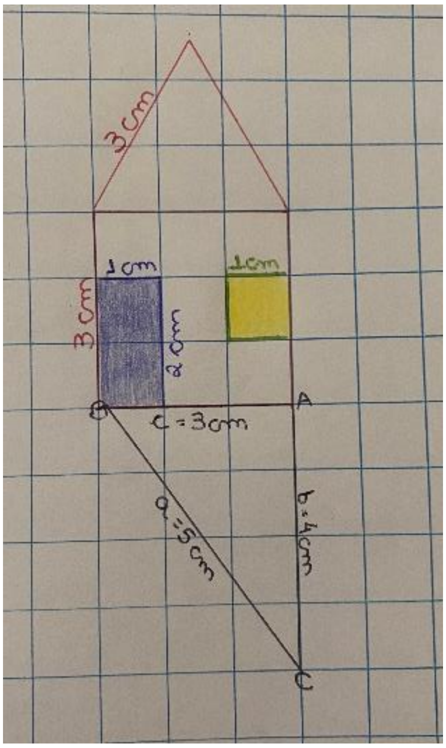
Fonte: feita pela autora.

Descrição do procedimento a ser utilizado em sala de aula: O professor irá recordar os conceitos estudados sobre o Teorema de Pitágoras na aula anterior. Devidamente preparado, irá expor o enunciado do problema central a ser proposto, utilizando-se de slide no software Power Point, ou similar, e apresentar o problema aos alunos. Após a apresentação do problema, o professor irá questionar os alunos sobre possíveis ideias para começar a resolver o problema. Acredita-se que para a resolução do problema serão necessárias 2 horas/aulas. Recomenda-se o uso de 2horas/aula para apresentação e resolução dos exercícios propostos. De modo que o aluno tenha oportunidade de fixar os conteúdos apresentados.

Resolução do problema:

1° Passo) Reproduzir esse desenho no papel quadriculado. Nessa etapa o professor pode perguntar aos alunos qual a melhor forma de visualizar os desenhos. Questioná-los se já utilizaram o papel quadriculado e identificar possíveis dificuldades para reproduzir o desenho.

Figura 104: Reprodução do desenho na malha quadriculada.



Fonte: produzido pela autora.

2° Passo) Calcular a área da casa apresentada no cateto AB = 3 cm. Nesse passo da resolução o professor pode relembrar com os alunos qual a definição do Teorema de Pitágoras, para que faça sentido calcular a área da figura.

A área da casa será dada pela soma da área do quadrado somado a área do triângulo equilátero que representa o telhado da casa. Importante destacar que antes de iniciar o conteúdo do Teorema de Pitágoras, como pré-requisitos, introduzimos o conceito de geometria através de dobraduras e apresentando o triângulo equilátero. Portanto, essa parte será para relembrar os conceitos e propriedades estudadas.

Seja um triângulo equilátero de lados “l”, sabemos que a área de um triângulo é dada por:

$$\acute{A}rea\ tri\hat{a}ngulo = \frac{base \times altura}{2}$$

No caso do triângulo equilátero, teremos que usar o Teorema de Pitágoras para definir a altura.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea\ tri\hat{a}ngulo\ equil\acute{a}tero = l \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

A área do quadrado é dada pela multiplicação de seus lados, desta forma:

$$Área\ casa\ (AB) = l^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \rightarrow 3^2 + \frac{3^2\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{18 + 9\sqrt{3}}{2}$$

3° Passo) Desenhar uma casa semelhante a casa dada, mas agora com base no cateto AC = 4 cm. Nessa etapa o professor pode questionar: o que vocês entendem por semelhança? Como construir uma figura semelhante a outra? É possível observar algum padrão utilizando os quadrados do papel quadriculado?

O primeiro passo é encontrar uma razão de semelhança, que nesse caso será a razão:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

Para sabermos o valor das laterais da casa basta aplicar a semelhança:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow = x = 4, sendo\ x\ as\ laterais\ do\ quadrado.$$

Como o triângulo é equilátero e sabemos que sua base mede 4 cm, pois é a mesma medida do lado do quadrado. Portanto todos os lados desse triângulo terão 4 cm.

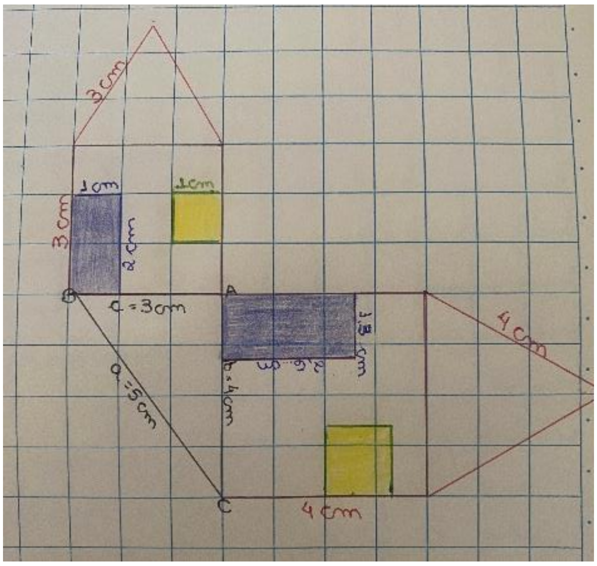
A porta e a janela são apenas distrações, no entanto, os alunos precisarão calcular para desenhar na mesma proporção.

$$Altura\ da\ porta \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{8}{3} = 2{,}66 \ldots$$

$$Largura\ da\ porta \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{4}{3} = 1{,}33 \ldots$$

Importante observar que a janela respeita a mesma proporção da largura da porta, não havendo a necessidade de novos cálculos. A representação desses cálculos está na Imagem 105.

Figura 105: Casa semelhante no cateto AC.



Fonte: produzido pela autora.

Usando o raciocínio análogo ao usado no 2° Passo, vamos calcular a área da casa sobre o cateto AC.

$$Área\ casa\ (AC) = l^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = 4^2 + \frac{4^2\sqrt{3}}{2} = \frac{16 + 16\sqrt{3}}{2} = 16 + 8\sqrt{3}$$

4° Passo) Desenhar uma casa semelhante sobre a hipotenusa BC = 5 cm. E calcular sua área.

Usaremos raciocínio análogo ao usado no passo 3. A razão de semelhança será:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{3}{5}$$

Para sabermos o valor das laterais da casa basta aplicar a semelhança:

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{x} \rightarrow x = 5, sendo\ x\ as\ laterais\ do\ quadrado.$$

Como o triângulo é equilátero os lados do triângulo serão iguais a 5 cm.

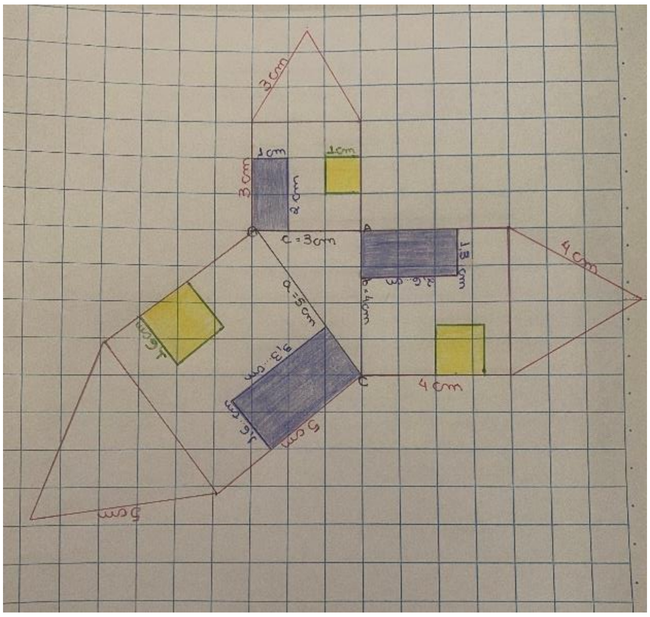
Calculando as dimensões da porta e consequentemente da janela.

$$Altura\ da\ porta \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{10}{3} = 3{,}33\ ...$$

$$Largura\ da\ porta \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{5}{3} = 1{,}66\ ...$$

A representação desses cálculos está na Imagem 106.

Figura 106: Casa semelhante no cateto BC.



Fonte: produzido pela autora.

De forma análoga aos passos anteriores, vamos cálculos a área dessa casa.

$$Área\ casa\ (BC) = l^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = 5^2 + \frac{5^2\sqrt{3}}{2} = \frac{50 + 25\sqrt{3}}{2}$$

5° Passo) Comparar os valores da soma das áreas das casas desenhadas sobre os catetos com a área da casa desenhada sobre a hipotenusa. O que você tem a observar?

Ou seja,

$$Área\ casa\ (AB + AC) = \frac{18 + 9\sqrt{3}}{2} + 16 + 8\sqrt{3} \rightarrow \frac{18 + 9\sqrt{3} + 32 + 16\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{50 + 25\sqrt{3}}{2}$$

Podemos então dizer que o Teorema de Pitágoras é válido para figuras semelhantes e diferentes de quadrados, como inicialmente provamos.

Sugestões de exercícios após a resolução do problema proposto no Plano de Ensino

1. Partindo do mesmo triângulo ABC, o aluno deverá agora, propor um outro desenho, tendo como base o lado b = 4 cm e, verificar a veracidade do Teorema de Pitágoras com o desenho semelhante e, obviamente, diferente de fachadas de casa, a ser proposto por ele.

Comentário: O grau do problema pode ser mais ou menos elevado a depender das medidas que o aluno escolherá para medidas dos lados do triângulo retângulo. Importante ressaltar que serão propostos diferentes desenhos, por essa razão é de grande importância que o professor peça aos alunos para apresentar seu desenho e desenvolvimento dos cálculos aos demais.

2. Proponha um desenho, partindo de um triângulo retângulo cujas medidas são números racionais. Peça aos alunos para verificar a veracidade do Teorema de Pitágoras através desse novo triângulo.

Comentário: nesse exercício busca-se identificar a capacidade de trabalhar com cálculos matemáticos que possuem um maior grau de dificuldade numérica. Espera-se que o aluno nesse desafio tenha compreendido a dinâmica da problemática proposta, nesse plano de aula, no qual deverão calcular as áreas dos desenhos sobre os catetos, determinar sua soma e identificar se essa soma tem o mesmo resultado da área do desenho sobre a hipotenusa. Nesse problema é importante o professor questionar os alunos sobre a adequação ou não do uso de papel quadriculado para obter sua solução. Espera-se que a abstração dos alunos e a capacidade de resolver problemas sem o uso do papel quadriculado fique evidenciado.

Processo de avaliação do aprendizado dos alunos: nesse Plano de Aula proposto, não há sentido a avaliação do aprendizado dos alunos ser algo simplesmente pontual. Na realidade, os alunos deverão ser avaliados pelo professor em relação a sua participação e suas colaborações para com a resolução dos problemas propostos e, obviamente, em relação ao desenvolvimento de seu raciocínio matemático. Particularmente nesse aspecto da avaliação, o professor, ao final das atividades programadas deve propor um problema o qual sugerimos alguns anteriormente. A resolução de tal problema deverá esperar que os alunos apliquem, ao menos em boa parte, os conhecimentos matemáticos desenvolvidos no Plano de Ensino 1, o professor deverá passar aos alunos um questionário que investigue os entusiasmos com que eles se envolveram no trabalho, o que mais gostaram e o que menos gostaram nele e quais as possíveis sugestões que teriam a fazer sobre o trabalho realizado, bem como, a condução implementada pelo professor.

5.2 PLANO DE ENSINO 2

Objetivo: Mostrar que a dobradura não se aplica somente a construção de triângulos, entre eles os triângulos retângulos, e propor a determinação do Número Áureo utilizando-se dessa ferramenta.

Habilidades (Ensino Fundamental I) e Competências (Ensino Médio) a serem trabalhadas: Tendo como base as Habilidades e Competências especificadas na seção 4.1, neste Plano de Ensino são desenvolvidas as seguintes:

(EF08MA15) construir, utilizando instrumentos de desenho (em nosso caso dobradura) ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Competências a serem desenvolvidas:

Competência específica 1 EM: Utilizar estratégias (em nosso caso dobradura), conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência específica 3 EM: Utilizar estratégias (dobradura), conceitos, definições (Número Áureo) e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos (Pentágono regular) e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência específica 5 EM: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Público-alvo: Alunos do 2° ano do Ensino Médio.

Tempo das atividades em sala de aula: 10 (dez) horas-aula, divididas em 5 (cinco) blocos de 2 (duas) horas-aula cada. Esse tempo deve somente ser definido ao final do planejamento do Plano de Aula e é relativo segundo as habilidades dos estudantes e de seu envolvimento em sala de aula.

Materiais necessários: Texto sobre a definição, curiosidades e aplicações de Número Áureo; Canetas ou Lápis de ao menos 3 (três) cores diferentes; Régua numerada, Compasso e, ao menos 10 (dez) folhas de papel A4 brancas para cada aluno. O professor deverá ter, além de todo material acima especificado para uso na lousa, deverá também ter a sua disposição um Datashow, bem como, o texto a ser apresentado aos alunos, preparado em slides.

Pré-requisitos necessários ou a serem trabalhados antes da apresentação do problema central a ser proposto: Construção, utilizando-se de dobraduras, de uma reta perpendicular à outra reta dada ($\overleftrightarrow{AB}$) e que passa por um ponto (C), fora da reta, também fornecido; Construir, utilizando-se de dobradura, a reta mediatriz de um segmento de reta ($\overline{AB}$) dado; Construir, utilizando-se de dobradura, a reta bissetriz de um ângulo ($A\hat{V}B$) dado; Construir, utilizando-se de dobradura, as alturas de um triângulo (▲ABC) dado e determinar seu ortocentro; Construir, utilizando-se de dobradura, um triângulo equilátero (ANEXO II).

Problema central do Plano de Ensino: Determinar o valor do Número Áureo (Φ) a partir do procedimento de dobradura e identificar os triângulos retângulos construídos ao longo da resolução desse problema. (Competência Específica 5 EM) (ANEXO I).

Descrição do procedimento a ser utilizado em sala de aula:

O professor, tendo preparado antecipadamente, deve, inicialmente, expor o enunciado do problema central a ser proposto, utilizando-se de slide produzido através do software Power Point, ou similar, e apresentado em sala de aula com o uso de um Datashow (ANEXO I). Feito essa apresentação e novamente através slides preparados antecipadamente, o professor vai recordar, ou mesmo ensinar, as construções, através de dobraduras, dos pré-requisitos dos conceitos geométricos necessários à resolução do problema central proposto (ANEXO II). Finalmente, o professor apresentará aos alunos a definição de Número Áureo, letra grega que o representa, algumas curiosidades sobre esse número e, algumas, aplicabilidades dele (ANEXO III).

O professor deve observar que todo Plano de Ensino busca trabalhar as Habilidades e Competências acima indicadas. Para deixar claro quais Habilidades e Competências estão sendo trabalhadas em cada problema ou situação problema especificadas nos ANEXOS I, II e III. Em cada um deles está indicada qual delas deverá/ão ser enfatizada(s) durante a aplicação das atividades propostas. Tal indicação não há necessidade de aparecer nos slides preparados para serem apresentados em sala de aula, mas também não há mal alguma delas serem apresentadas e discutidas também com os alunos.

Processo de avaliação do aprendizado dos alunos

Em um trabalho como o aqui proposto, não há sentido da avaliação do aprendizado dos alunos ser algo simplesmente pontual. Na realidade, os alunos deverão ser constantemente avaliados pelo professor em relação a sua participação e envolvimento nas atividades propostas, suas colaborações para com a resolução dos problemas propostos e, obviamente, em relação ao desenvolvimento de seu raciocínio matemático. Particularmente nesse aspecto da avaliação, o professor, ao final das atividades programadas deve propor um problema aplicável do conceito de Número Áureo (Problema Proposto no Plano de Ensino 2), preferencialmente, de forma contextualizada. A resolução de tal problema deverá esperar que os alunos apliquem, ao menos em boa parte, os conhecimentos matemáticos desenvolvidos no Plano de Ensino, em especial do conceito de Número Áureo. Finalmente, o professor deverá passar aos alunos um questionário que investigue o entusiasmo com que eles se envolveram no trabalho, o que mais gostaram e o que menos gostaram nele e quais as possíveis sugestões que teriam a fazer sobre o trabalho realizado, bem como, a condução implementada pelo professor.

6. CONCLUSÃO

A orientação deste trabalho ocorreu em busca de responder as questões apresentadas na introdução: Como os materiais didáticos do Estado de São Paulo apresentam o Teorema de Pitágoras? Há uma preocupação em propor atividades lúdicas aos alunos em tais materiais didáticos? É possível utilizar os materiais fornecidos pela OBMEP sobre o tema e utilizando-se de dobraduras, para a proposta de atividades didáticas a ser realizada?

Com o objetivo de tornar o ensino da Matemática, especialmente o Teorema de Pitágoras, mais atraente e significativo aos alunos, este trabalho foi elaborado sob a perspectiva de desenvolver um trabalho de dobraduras e elementos lúdicos para tornar mais participativo e instigar, aos alunos, a construção desse conceito. Apesar desse trabalho não ter sido aplicado em sala de aula, o propósito primordial foi apresentar o Teorema de Pitágoras de modo a colaborar para que os estudantes desenvolvam habilidades de resolução de problemas, de investigação e de comunicação matemática, para que possam utilizar a matemática de forma efetiva na resolução de problemas do mundo real. Desse modo, orienta-se que as demonstrações e generalizações não sejam omitidas nas aulas, para que os alunos percebam o raciocínio matemático e suas aplicações em problemas do cotidiano.

Na seção 2.2 do trabalho é possível observar como o Teorema de Pitágoras é abordado no material fornecido pelo Estado de São Paulo. Nota-se pouca preocupação em sugerir atividades lúdicas e pouca preocupação com demonstrações matemáticas. Na atividade 1 do 9° ano do ensino fundamental, por exemplo, podemos observar que não há uma definição para triângulos semelhantes e triângulos congruentes, assim como não está especificado a diferença entre cada um. Para tornar o processo de aprendizagem mais significativo e interessante, perguntas como: Triângulos congruentes são sempre semelhantes? Triângulos semelhantes são sempre congruentes? Quais propriedades matemáticas (área, perímetro, medida de lados, medida de ângulo) são preservadas nos triângulos congruentes e nos triângulos semelhantes? Torna-se fundamental a explicação sobre o que significa a constante de proporcionalidade (k) e o seu valor no caso de triângulos congruentes.

Na atividade apresentada na seção 3.2.1 através da imagem 6 deste trabalho, poderia ter uma metodologia diferente. Ao invés de propor que o professor demonstre todas as relações métricas, o professor pode fazer a primeira demonstração por semelhança de triângulos e propor um desafio aos alunos de encontrar outras possíveis relações através do mesmo método.

Na tarefa 3 da atividade 1° do 9° ano, pode-se propor ao professor que, caso existam 2 ou mais respostas diferentes aos problemas propostos, o professor deverá discutir com seus alunos as diferenças entre as respostas e qual, matematicamente falando, seria a melhor resposta. Ou seja, aquela que leva ao resultado correto com o menor número de operações/etapas. Na tarefa 4 da atividade 1 do 9° ano do fundamental. Com relação ao comentário apresentado ao professor nessa tarefa, há um equívoco, pois o Teorema de Pitágoras foi demonstrado na tarefa 2.

Na tarefa 5 da atividade 2 do 9° ano não foi possível chegar no valor esperado pelo caderno do aluno. Através de duas figuras diferentes e de diferentes interpretações, é possível chegar aos valores de 3,75m e 1,8m. É necessário que o enunciado do problema proposto seja melhorado e/ou apresente mais informações.

Essas são algumas observações referente as atividades propostas no material do Estado de São Paulo. Pode-se concluir que a preocupação com o lúdico não é algo presente em tais materiais. Predomina-se o modelo convencional de apresentação do conteúdo e a apresentação de diversos exercícios semelhantes. A escola é o lugar do conhecimento e no qual o aluno passa a maior parte do dia, portanto, deve ser um lugar no qual ensina-se o aluno a pensar, a questionar!

Nos materiais apresentados na seção 2.3, referente aos materiais da OBMEP, pode-se observar uma preocupação com a demonstração dos conceitos matemáticos, assim como, com um ensino baseado em atividades lúdicas. Tais materiais foram utilizados para elaboração do Plano de Ensino proposto no trabalho. Acredita-se que a abordagem utilizada nesses materiais se aplica em sala de aula. O processo de dobraduras, além de ser fascinante para os alunos é inclusivo. Trabalhar com Origamis e materiais palpáveis pode ser uma técnica importante para alunos com deficiência visual, no qual conseguem sentir a matemática, muitas vezes apresentada como algo apenas abstrato.

Sugere-se a pesquisa e a investigação sobre a construção do octaedro e do icosaedro com as peças das unidades A e B apresentadas na seção 2.3.3 deste trabalho. Da mesma forma, sugere-se como investigação a construção do tetraedro sem a utilização de peças e, sim, com um único papel para executar a dobradura conforme vídeo apresentado na seção 3.3.2.

A inovação nos métodos de ensino é uma necessidade, o aluno precisa se sentir protagonista no Processo de Ensino e Aprendizagem. Além do ensino de geometria através de dobraduras, é possível aplicar dobraduras no ensino de frações. Fica como sugestão de pesquisa e possíveis aplicações em planos de ensino futuros.

A dobradura é uma técnica de modelagem tridimensional que tem importância na matemática por várias razões. Em primeiro lugar, ela é uma forma visual e tangível de ensinar conceitos matemáticos abstratos, como, por exemplo, da geometria. Através da dobradura, os alunos podem ver e manipular formas tridimensionais, o que pode ajudar a tornar esses conceitos mais concretos e compreensíveis. Além disso, a dobradura pode ser usada como uma ferramenta para ensinar a geometria plana, já que muitas vezes as formas tridimensionais podem ser desdobradas em suas formas bidimensionais correspondentes. Isso pode ajudar os alunos a visualizar as relações entre formas tridimensionais e bidimensionais e a entender melhor a geometria como um todo. No entanto, é uma técnica fora do contexto tecnológico. Com os avanços da tecnologia, deixo o questionamento: será que essa prática pedagógica deixará de fazer parte das salas de aula?

Destaco a importância do papel do professor na realização de transformações e no desenvolvimento do aluno. É necessário que o professor busque sempre novas formas de ensino. Há situações adversas enfrentadas no exercício da profissão como, por exemplo, salas superlotadas, falta de recursos mínimos, sobrecarga de trabalho e baixa remuneração. No entanto, tais dificuldades devem ser enfrentadas e superadas e não apenas menosprezadas, como geralmente ocorre.

7. BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**: técnicas e jogos pedagógicos. São Paulo: Loyola, 1995.

BRASIL. Constituição (1988**). Constituição da República Federativa do Brasil**. Disponível https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf. Acesso em 05 out 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 01 out 2022.

Carneiro, Mário J. D. & Spira, M. **Oficina de Dobraduras**, Rio de Janeiro, IMPA, 2015. ISBN 978-85-244-0338-5. Disponível em: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296659.o. Acesso em 19 mar. 2023.

CAVACAMI, Eduardo. KIOKO, Yolanda**.. Explorando Geometria com Origami**. Rio de Janeiro, IMPA, 2010. Disponível http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf. Acesso em 25 set.2022.

CUNDY, H. Martyn. ROLLETT, A.P**. Mathematical Models**. Oxford University Press, 1961.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **APRENDER SEMPRE**. Volume 1. Parte 1. 1ª à 3° Série Ensino Médio. MATEMÁTICA 2022. Disponível: https://cadernodoaluno.org/. Acesso em 17 set. 2022.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **APRENDER SEMPRE**. Volume 1. Parte 2. 1ª à 3° Série Ensino Médio. MATEMÁTICA 2022. Disponível: https://cadernodoaluno.org/. Acesso em 17 set. 2022.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **APRENDER SEMPRE**. Volume 1. Parte 3. 1ª à 3° Série Ensino Médio. MATEMÁTICA 2022. Disponível: https://cadernodoaluno.org/. Acesso em 17 set. 2022.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **APRENDER SEMPRE**. Volume 1. Parte 4. 1ª à 3° Série Ensino Médio. MATEMÁTICA 2022. Disponível: https://cadernodoaluno.org/. Acesso em 17 set. 2022.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **APRENDER SEMPRE**. Volume 1. Parte 4. 6ª ao 9° Ano Ensino Fundamental. MATEMÁTICA 2022. Disponível: https://cadernodoaluno.org/. Acesso em 17 set. 2022.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO (Brasil). **Currículo Paulista**. Secretária da Educação. Disponível: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/#ensino-medio. Acesso em: 25 jun. 2022.

PEREIRA, Arthur Zallio Alvez. **A Matemática lúdica de Leon Battista** Alberti: viabilizando caminhos para o ensino da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. 2020. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Disponível http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/Ensino_ArthurZallioAlvesPereira_8643.pdf. Acesso em 01 out. 2022.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2 reimpr. Rio de Janeiro: interciência, 1995,

Vídeo (3 min. E 43 segundos), "**Phi ratio - Sequência de Fibonacci - Proporção Áurea**". Disponível em: https://www.youtube.com/embed/2VuS8JOkr7s?rel=0&showinfo=0. Acesso em 1 mar. 2023.

Vídeo (7min E 30 segundos); "**Origami Octahedron Decoration Box Tutorial – Paper Kawaii**" Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3Aocrid5uGQ. Acesso em 3 fev. 2023.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015. Disponível http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf. Acesso em 25 set. 2022.

8. BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA

Dicionário Brasileiro da Língua Brasileira. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/ludico/. Acesso em 27 abr.2023.

FREIRE, P. **PEDAGOGIA DA AUTONOMIA** – saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2003.

DHOME, Vânia**. Atividade lúdica na educação**: o caminho de tijolos amarelos do aprendizado. Rio de Janeiro: Vozes, 2003.

PIAGET, Jean**. A Teoria de Piaget.** In: MUSSEN, P. H. (org). Psicologia da criança. Desenvolvimento Cognitivo. São Paulo: E.P.U. 1975. Vol. 4.

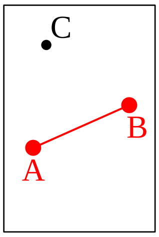
ANEXO I: PROBLEMA PROPOSTO PARA O PLANO DE ENSINO 2

Determinar o valor do Número Áureo (representado pela letra grega maiúscula Φ = Phi) a partir do procedimento de dobradura e identificar os triângulos retângulos construídos ao longo da resolução desse problema. (Competência Específica 5 EM)

Fonte: Orientador Prof. Dr. Geraldo Pompeu Jr., 2023.

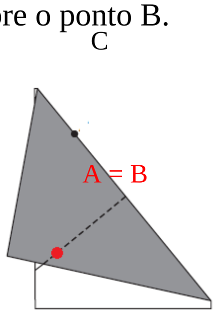
ANEXO II: PRÉ-REQUISITOS PARA O PROBLEMA DO PLANO DE ENSINO 2

1º Pré-requisito: Construção, utilizando-se de dobraduras, de uma **reta perpendicular à outra reta dada ($\overleftrightarrow{AB}$) e que passa por um ponto (C), fora da reta**, também fornecido. (Habilidade EF08MA15)

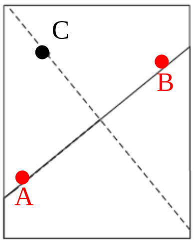


Procedimentos:

1. Usando uma dobra que passa em C, fazendo uma dobradura que leve o ponto A, da reta ($\overleftrightarrow{AB}$), sobre o ponto B.



2. Desdobre.

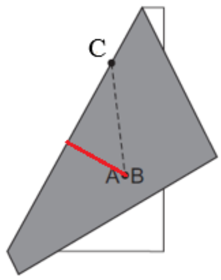


3. Como obter a perpendicular no caso em que C pertence à reta?
4. Defina, com suas próprias palavras, o significado de retas perpendiculares entre si.

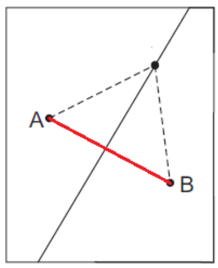
2º Pré-requisito: Construção, utilizando-se de dobraduras, a **reta mediatriz de um segmento de reta** ($\overline{AB}$) dado. (Habilidade EF08MA15)

Procedimentos:

1. Usando uma dobra que passa em C, faça uma dobradura de modo que o ponto A se sobreponha ao ponto B, da reta ($\overleftrightarrow{AB}$).



2. Desdobre.

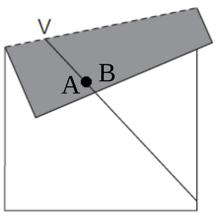


3. Defina, com suas próprias palavras, o significado de reta mediatriz a um segmento de reta ($\overline{AB}$) dado.

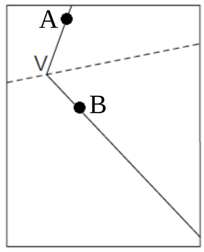
3º Pré-requisito: Construir, utilizando-se de dobradura, a **reta bissetriz de um ângulo** ($A\widehat{V}B$) dado. (Habilidade EF08MA15)

Procedimentos:

1. Dobre uma das semirretas do ângulo $\overrightarrow{VA}$ de modo que se sobreponha sobre o outro $\overrightarrow{VB}$.



2. Desdobre.

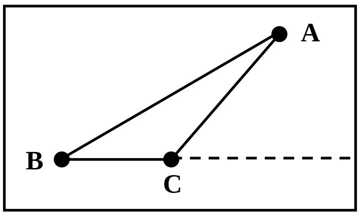


3. Fazendo uma pesquisa na internet, defina o significado e as propriedades da reta bissetriz de um ângulo ($A\widehat{V}B$) dado.

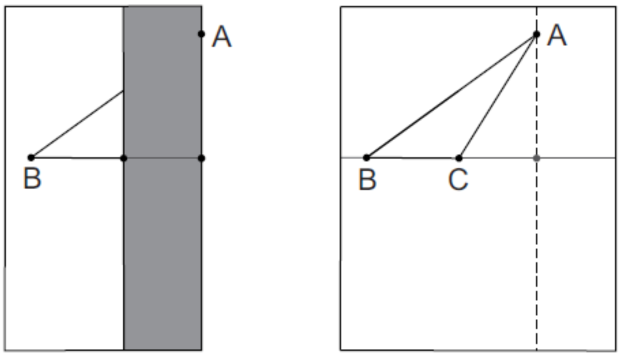
4º Pré-requisito:	Construir, utilizando-se de dobradura, as **alturas de um triângulo (▲ABC) dado e determinar seu ortocentro**. (Habilidade EF08MA15 e Competência Específica 3 EM)

Procedimentos:

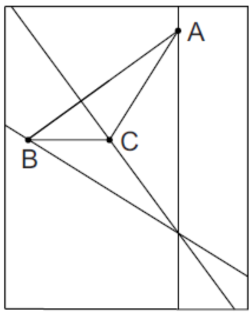
1. No caso de triângulo obtusângulo, use dobradura para prolongar o lado do ângulo obtuso cuja projeção vertical, do vértice oposto a esse lado, atinja o prolongamento desse ângulo obtuso.



2. Dobre determinando a perpendicular a semirreta $\overrightarrow{BC}$ que passa pelo ponto A (altura do ▲ ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$).



3. Dobre determinando as alturas do ▲ ABC dado, relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.



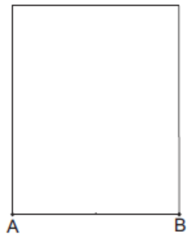
4. Utilizando-se de dobraduras, determine as alturas relativas aos lados e os ortocentros de triângulos acutângulos e retângulos.
5. Pesquise na internet o significado, as propriedades e uma aplicação do ortocentro dos triângulos.

5º Pré-requisito: Construir, utilizando-se de dobradura, um **triângulo equilátero**. (Habilidade EF08MA15 e Competência Específica 3 EM)

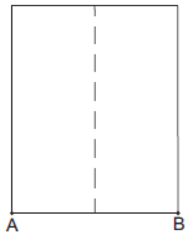
.

Procedimentos:

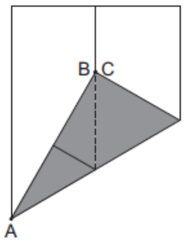
1. O lado do triângulo é igual ao lado menor da folha de papel, denote por A e B os extremos do segmento.



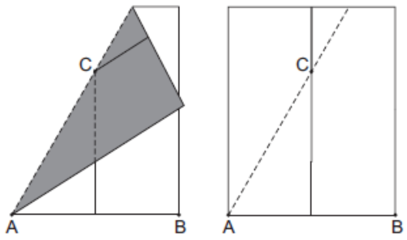
2. Dobre a folha ao meio de modo a encontrar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



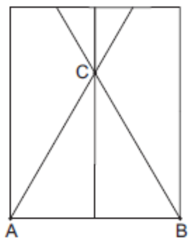
3. Dobre a folha de modo que o ponto refletido de B encontre a mediatriz (construída em 2). Marque esse ponto C.



4. Dobre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ para completar o triângulo.



5. Desdobre.



6. Defina, com suas próprias palavras, o significado de um triângulo equilátero.

Fonte: Carneiro, Mário J. D. & Spira, M. **Oficina de Dobraduras**, Rio de Janeiro, IMPA, 2015, 35 páginas, ISBN 978-85-244-0338-5. Disponível em: http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296659.o. Acesso em 19 mar. 2023.

ANEXO III: DEFINIÇÃO DE NÚMERO ÁUREO, LETRA GREGA QUE O REPRESENTA, CURIOSIDADES E APLICAÇÕES, PLANO DE ENSINO 2

Apresentação: Poema "O misterioso número de ouro", autor: Vasco Graça Moura (1942 – 2014). Do livro: "Camões e a Divina Proporção (Competência Específica 1 EM).

Do número nasce a proporção……..
Da proporção se segue à consonância ……..
A consonância causa deleitação ……..
A nenhum sentido apraz a dissonância ……..
Unidade, igualdade e semelhança ……..
São princípios do contentamento……..
Em todos os sentidos o experimento……..
A alma na unidade glória alcança……..
Em todas as quantidades a igualdade ……..
E a perfeição remota ou a mais chegada……..
Segundo a natural autoridade……..
E assim está nas qualidades assentada……..
Da mesma maneira a semelhança……..
Diva de ser sentida e contemplada……..

Encontrada na ciência e na natureza, em diferentes formas, na obra de artistas como Salvador Dalí, de arquitetos como Le Corbusier e na arquitetura de forma geral, a ***razão áurea*** é um dos números mais famosos da matemática. Há muito tempo – os gregos antigos já atribuíam a essa razão propriedades mágicas e usavam-na nas construções de seus edifícios.

A razão áurea é um número irracional, tal qual o famoso número π (pi), é também denotado por uma letra grega, o "phi" (pronunciamos fi). O phi maiúsculo, Φ, ou o minúsculo, ϕ.

Conhecido desde a Antiguidade, o Φ recebeu vários títulos honoríficos: "Número Áureo", "Razão Áurea", "Seção Áurea", "Proporção Áurea", "Proporção de Ouro", "Número de Ouro", "Média e Extrema Razão", "Divisão de Extrema Razão", "Razão de Phidias" e até "Proporção Divina", tal o fascínio que esse número exerceu sobre as pessoas!

Talvez seja difícil imaginar um número que apareça em situações tão diferentes – artes, ciências, natureza – embora chegue até a ser denominado de Proporção Divina.

A razão áurea é apenas um número e é uma bela oportunidade de se estudar matemática! É com esse espírito que o objeto central deste Plano de Ensino foi elaborado. Esse famoso objeto matemático aqui será tratado cercado de algumas de suas verdades e de alguns de seus mitos, já que nem tudo o que encontramos sobre esse número é verdadeiro!

Portanto, peguem papel, lápis, borracha e uma lupa, e mãos à obra.

Um problema inicial (Competência Específica 5 EM): Determinar um número positivo tal que a diferença entre seu quadrado e ele seja 1.

Qual a equação resultante da modelagem desse problema? (Competência Específica 3EM).

Após 2 ou 3 minutos para os alunos pensarem sobre o problema possível, trabalhe com eles através de questionamentos tais como:

Qual é o número procurado?

Resposta esperada: Seja "a" o número procurado. Então, $a^2 - a = 1, ou\ seja,\ a^2 - a - 1 = 0$. Assim, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,161803... ≈ 1,1618.

Um segundo problema (Competência Específica 5 EM): Sejam $\overline{AB}$ um segmento de comprimento 1 e X um ponto entre A e B. Assim, consideraremos três segmentos: o segmento menor ($\overline{XB}$), o maior ($\overline{AX}$) e o segmento todo ($\overline{AB}$).
(i) Determine a distância entre os pontos A e X de forma que a razão entre os comprimentos do menor ($\overline{XB}$) e do maior dos segmentos ($\overline{AX}$) seja igual à razão entre os comprimentos do maior ($\overline{AX}$) e do segmento todo ($\overline{AB}$). (Competência Específica 3 EM)

Resposta esperada: Sejam $\overline{AB}$ um segmento unitário e X um ponto interno desse segmento.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o maior segmento tenha comprimento x. Pelas informações do problema, temos que $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$, donde $1 - x = x^2$, ou ainda $x^2 + x - 1 = 0$. Com isso, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mas, como x é positivo, já que é representa uma distância não nula, então $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(ii) Determine a razão entre os comprimentos do maior ($\overline{AX}$) e do menor segmento ($\overline{XB}$). (Competência Específica 3 EM)

Resposta esperada: Seja "r" a razão procurada. Então, pelo item (i) podemos afirmar que:

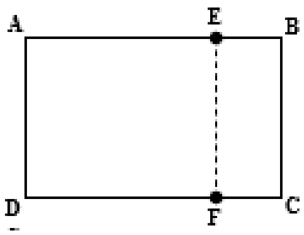
$$r = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1).(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})} = \frac{3.\sqrt{5} - 3 + 5 - \sqrt{5}}{9-5} = \frac{2.\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Então, a razão (r) entre os comprimentos do maior ($\overline{AX}$) e do menor ($\overline{XB}$) segmentos é $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Pesquise na internet: qual a definição de retângulos semelhantes. (Competência Específica 1 EM).

Um terceiro problema (Competência Específica 3 EM): Considere qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado como AEFD, o retângulo restante, EBCF, será semelhante ao retângulo original.

Figura 107: Representação do retângulo ABCD.



Fonte: feito pela própria autora.

Determinar a razão entre os lados maior e menor do retângulo inicial ABCD.

Definição de média e extrema razão de segmentos (Competência Específica 5 EM): Diz-se que um ponto X de um segmento $\overline{AB}$ divide o segmento em ***média e extrema razão*** se a razão entre os comprimentos do menor (b) e do maior (a) dos segmentos é igual à razão entre os comprimentos do maior (a) e do segmento todo (a + b).

$$\text{X divide AB em média e extrema razão} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

É claro que

- Se $\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$, então $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

e que

- Se $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, então $\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$.

Logo, poderíamos caracterizar a **média e extrema razão** por qualquer uma das duas igualdades. Independente de qual seja a igualdade utilizada para definirmos **média e extrema razão**, a próxima divisão se refere a uma razão específica, a **Razão Áurea**.

Definição de Razão Áurea (Competência Específica 5 EM): Seja X o ponto que divide um segmento $\overline{AB}$ em **média e extrema razão**.

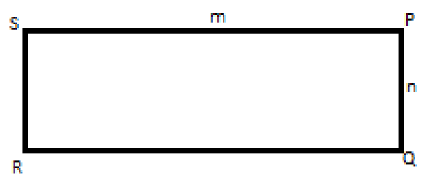
Chamamos de *razão áurea* a razão entre os comprimentos do maior (a) e do menor (b) segmentos resultantes da divisão do segmento inicial $\overline{AB}$, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Definição de Número Áureo (Competência Específica 5 EM)**:** Chamamos de ***Número Áureo*** e denotamos por Φ (Letra Grega Maiúscula, Phi), ou ainda φ (Letra Grega Minúscula, Phi) o número irracional positivo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, após apresentarmos formalmente o **Número Áureo**, apresentamos outro belo objeto matemático: o **Retângulo Áureo**!

Definição de Retângulo Áureo (Competência Específica 5 EM)**:** Um ***Retângulo Áureo*** é um retângulo cujo comprimento do seu lado maior dividido pelo comprimento do seu lado menor é igual ao número áureo.

Figura 108: Retângulo áureo.



Fonte: feito pela própria autora.

$$\text{O retângulo PQRS é um retângulo áureo} \leftrightarrow \frac{m}{n} = \varphi$$

Curiosidades e aplicações do Número Áureo

- **Na matemática**

Problema: Qual o comprimento da diagonal de um pentágono regular cujos lados medem 1? (Habilidade EF08MA15 e Competências Específicas 1, 3 e 5 EM)

Fazendo uso de um software geométrico ou o Word ou qualquer outro similar, trace uma circunferência e um pentágono regular inscrito nessa circunferência. Suponha que o lado do pentágono mede 1 unidade de medida e o raio da circunferência mede r unidades de medida (u).

Trace uma diagonal desse pentágono e nomeie os vértices do triângulo isósceles formado de A, B e C.

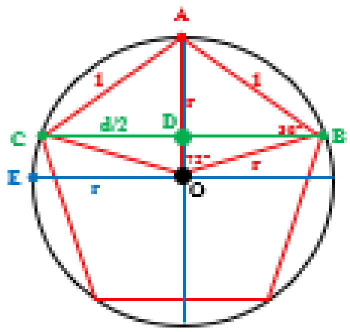
Trace dois diâmetros perpendiculares entre si tal que um deles passe pelo vértice Â e o outro pelo centro da circunferência (O). Nomeie, o ponto de intersecção do diâmetro que passe pelo vértice Â com o lado $\overline{AB}$ do triângulo isósceles ABC, de D.

Trace os três raios da circunferência que representam os segmentos $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{BO}}$ e $\overline{\mathrm{CO}}$, e nomeie de “r” os segmentos $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{BO}}$ e $\overline{\mathrm{EO}}$.

Observe que: $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = 1$; $r = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DO}}$; $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{d}{2}$; $B\hat{O}D = 72^{\circ}$ e $A\hat{B}D = 36^{\circ}$.

Feito todos os traçados e nomeações acima solicitados, vou deverá ter obtido a figura abaixo.

Figura 109: Representação da construção do pentágono regular.



Fonte: feito pela própria autora.

Aplicação envolvendo o Número Áureo:

Do problema anterior: (Competência Específica 5 EM)

No triângulo retângulo ABD, usando o Teorema de Pitágoras, determine a relação existente de $\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2$ em função de $\overline{\mathrm{AD}}^2$. Nomeie essa relação de “1”.

No triângulo retângulo ABD, usando uma calculadora científica e a razão trigonométrica do seno, determine, aproximadamente, o valor do sen (36°). Consequentemente, determine o valor de $\overline{\mathrm{AD}}$. Nomeie o valor aproximado de $\overline{\mathrm{AD}}$ de “2”.

Substituindo o valor de $\overline{\mathrm{AD}}$, encontrado em “2”, na relação nomeada de “1”, determine o valor aproximado de “d”.

Compare o valor aproximado de “d” com o valor aproximado do Número Áureo (Φ).

- **Na natureza**

Assista ao vídeo, clicando no link: https://www.youtube.com/embed/2VuS8JOkr7s?rel=0&showinfo=0.

Professor, promova um debate com os alunos sobre o vídeo assistido, enfatizando a grande aplicabilidade na natureza do Número Áureo. (Competência Específica 1 EM)

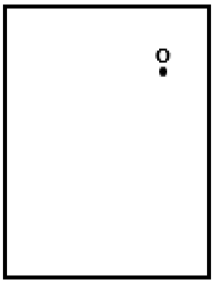
A sequência de Fibonacci é formada pelos números: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., onde sua regra de formação é: “Dado os dois primeiros termos da sequência, neste caso $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, o termo seguinte, a_3, será determinado pela soma dos dois termos anteriores”. Ou seja, $a_3 = a_1 + a_2$.

Partindo da regra de formação da sequência de Fibonacci, para n > 2 e n ϵ N, determine uma fórmula geral para “a” em função de seus dois termos anteriores. (Competência Específica 5 EM).

Problema (Competência Específica 3 EM)

Construa uma espiral, como a do “Caracol” mostrada no vídeo, marcando inicialmente, o ponto “O”, a 2,2u da lateral esquerda da folha de papel A4 e a 3,2u da lateral superior da folha de papel A4.

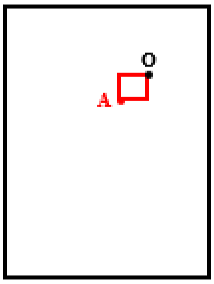
Figura 110: Marcação do ponto O.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 1u, com seu vértice superior esquerdo coincidindo com o ponto “O”. Nomeie o vértice oposto ao “O” de “A”.

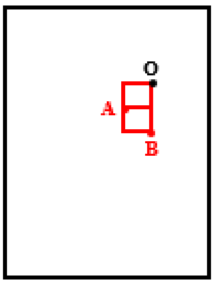
Figura 111: Construção do quadrado de lado 1u.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 1u, com seu vértice superior esquerdo coincidindo com o ponto “A”. Nomeie o vértice oposto ao “A” de “B”.

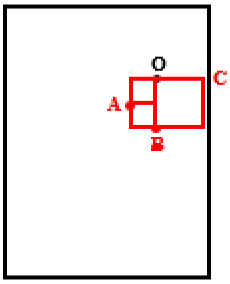
Figura 112: Construção do vértice B.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 2u, com seu vértice inferior direito coincidindo com o ponto “B”. Nomeie o vértice oposto ao “B” de “C”.

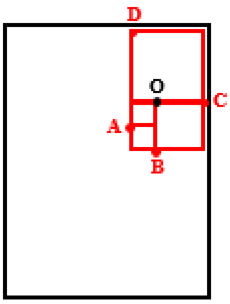
Figura 113: Construção do vértice C.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 3u, com seu vértice inferior esquerdo coincidindo com o ponto “C”. Nomeie o vértice oposto ao “C” de “D”.

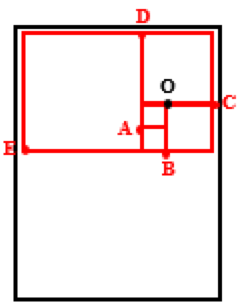
Figura 114: Construção do vértice D.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 5u, com seu vértice superior esquerdo coincidindo com o ponto “D”. Nomeie o vértice oposto ao “D” de “E”.

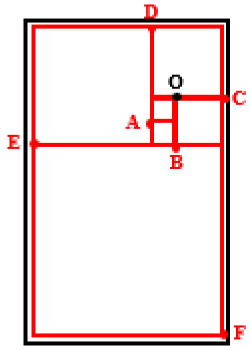
Figura 115: Construção do vértice E.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace um quadrado de lado medindo 8u, com seu vértice superior esquerdo coincidindo com o ponto “E”. Nomeie o vértice oposto ao “E” de “F”.

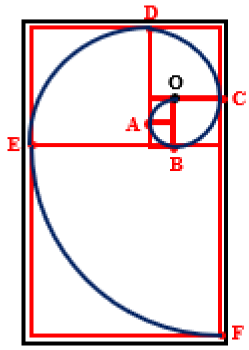
Figura 116: Construção do ponto F.



Fonte: feito pela própria autora.

Trace uma curva suave, partindo do ponto "O" e passando, na sequência, pelos demais pontos (A, B, C, D, E e F).

Figura 117: Construção da espiral sobre os pontos marcados.



Fonte: feito pela própria autora.