



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - CAMPUS SOROCABA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Denise Maria Rodrigues

*Downside Risk* e Médias Móveis para Otimização de Carteiras de Investimentos e do  
Processo de Compra e Venda de Ativos Financeiros

Sorocaba  
2025

Denise Maria Rodrigues

***Downside Risk* e Médias Móveis para Otimização de Carteiras de Investimentos e do  
Processo de Compra e Venda de Ativos Financeiros**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Silvia Maria Simões de Carvalho

Sorocaba  
2025

Rodrigues, Denise Maria

Downside Risk e Médias Móveis para otimização de carteiras de investimentos e do processo de compra e venda de ativos financeiros / Denise Maria Rodrigues -- 2025.  
69f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Silvia Maria Simões de Carvalho

Banca Examinadora: Magda da Silva Peixoto, Antonio Luís Venezuela

Bibliografia

1. Downside Risk.. 2. Médias Móveis. 3. Programação Linear. I. Rodrigues, Denise Maria. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -  
CRB/8 6979



**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS**

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 3/2025/CCML-So/CCTS

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**DENISE MARIA RODRIGUES**

### **DOWNSIDE RISK E MÉDIAS MÓVEIS PARA OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO E DO PROCESSO DE COMPRA E VENDA DE ATIVOS FINANCEIROS**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba**

Sorocaba, 10 de julho de 2025

#### **ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

<b>Cargo/Função</b>	<b>Nome Completo</b>
Orientadora	Profa. Dra. Sílvia Maria Simões de Carvalho
Membro da Banca 1	Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela, Docente**, em 10/07/2025, às 18:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Magda da Silva Peixoto, Docente**, em 11/07/2025, às 11:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Silvia Maria Simoes de Carvalho, Docente**, em 11/07/2025, às 18:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1903435** e o código CRC **E75CE343**.

---

**Referência:** Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.021353/2025-48

SEI nº 1903435

*Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019*

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, Vera e Eliel. Vocês são, e sempre serão, meu porto seguro e minha maior inspiração. Esta conquista, com todo o meu amor, é para vocês.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, **Eliel Rodrigues e Vera Lucia de Campos Rodrigues**, por serem o alicerce da minha vida e a luz que guiou cada um dos meus passos. Sou profundamente grata por terem acreditado em mim e por terem me proporcionado as condições para alcançar meus sonhos. Nada que eu diga será capaz de descrever o quanto eu amo vocês.

Ao meu amado companheiro, **Lucas Moraes**, cujo apoio foi fundamental ao longo de quase toda a minha trajetória universitária. Sua paciência nos momentos de desafio e sua alegria em cada conquista foram essenciais. Obrigada por ter caminhado ao meu lado, sua presença e seu carinho fizeram toda a diferença.

À minha família, que sempre acreditou em mim e me apoiou em cada passo dessa jornada. Em especial, à minha sobrinha **Manuela** e ao meu primo **Murilo**, por serem fontes de inspiração e carinho constantes.

Aos amigos que a UFSCar me deu, **Leila, Gabriela e João**, por tornarem a caminhada até aqui muito mais leve e divertida. A parceria de vocês foi fundamental para superar os desafios e celebrar as conquistas. À minha amiga **Dani**, que com sua paciência e apoio incondicional, foi fundamental para que eu não surtasse nesses anos de faculdade. Sua crença em mim me inspirou a seguir em frente e acreditar no meu potencial.

A todos os professores que cruzaram meu caminho e contribuíram para minha formação, minha sincera gratidão. De maneira especial, agradeço aos docentes da UFSCar, que com sua dedicação e conhecimento enriqueceram minha jornada acadêmica. Em particular, registro meu agradecimento à minha orientadora, **Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Silvia Maria Simões de Carvalho**. Mais do que uma guia, ela foi uma mentora que soube enxergar e nutrir meu potencial muito antes de mim. Sua crença e incentivo foram decisivos para a realização deste trabalho.

Reconheço e agradeço o inestimável auxílio do **Me. Carlos Moraes de Freitas Junior**, que me proporcionou uma introdução abrangente ao mercado financeiro. Suas valiosas dicas e orientações revelaram a fascinante beleza do mundo das ações.

Gostaria de expressar minha gratidão à **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)**. A bolsa de iniciação científica por ela concedida foi de suma importância, não apenas viabilizando a execução deste trabalho, mas também contribuindo significativamente para a minha experiência e desenvolvimento na área de pesquisa.

Agradeço imensamente à banca examinadora deste Trabalho de Conclusão de Curso, composta pela **Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Magda da Silva Peixoto** e pelo **Prof. Dr. Antônio Luis Venezuela**.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, cruzaram meu caminho e, com suas contribuições e apoio, permitiram que eu chegasse até este momento. A jornada foi construída com a colaboração de cada um de vocês.

“Risco vem de você não saber o que está fazendo.” – Warren Buffett

## RESUMO

Este trabalho propõe a otimização de carteiras de investimentos por meio da modelagem por Programação Quadrática, utilizando o modelo Downside Risk para minimizar eventuais perdas, o que o torna mais adequado a perfis conservadores do que medidas tradicionais de risco. Além disso, incorpora-se a análise de médias móveis como ferramenta para auxiliar nas decisões de compra e venda de ativos. O modelo matemático foi implementado em Python, considerando restrições práticas de alocação e dados reais do mercado acionário. Três carteiras distintas foram construídas e analisadas em diferentes janelas temporais, com desempenho comparado ao índice Ibovespa. Os resultados mostram que a metodologia proposta produziu carteiras com desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco. O trabalho contribui para a aplicação prática de métodos da Pesquisa Operacional em Finanças, reforçando o papel da otimização matemática na tomada de decisão sob cenários de incerteza.

**Palavras-chave:** Downside Risk; Médias Móveis; Programação Linear; Otimização de Carteiras.

## ABSTRACT

This work proposes the optimization of investment portfolios through modeling with Quadratic Programming, using the Downside Risk model to minimize potential losses, which makes it more suitable for conservative profiles than traditional risk measures. In addition, moving average analysis is incorporated as a tool to assist in asset buy and sell decisions. The mathematical model was implemented in Python, considering practical allocation constraints and real data from the stock market. Three distinct portfolios were constructed and analyzed over different time windows, with performance compared to the Ibovespa index. The results show that the proposed methodology produced portfolios with superior performance in terms of risk-adjusted return. The research contributes to the practical application of Operations Research methods in Finance, reinforcing the role of mathematical optimization in decision-making under uncertainty.

**Keywords:** Downside Risk; Moving Averages; Linear Programming; Portfolio Optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Físico Patrick Blackett. . . . .	3
Figura 2 – George Dantzig. . . . .	5
Figura 3 – Região definida por $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . . . . .	8
Figura 4 – Região definida por $-3x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . . . . .	9
Figura 5 – Gráfico das restrições do problema de programação linear. . . . .	9
Figura 6 – Solução ótima. . . . .	10
Figura 7 – Não existe solução ótima. . . . .	10
Figura 8 – Solução ótima em região factível ilimitada (minimização). . . . .	11
Figura 9 – Região factível ilimitada e não existe solução ótima (minimização). . . . .	11
Figura 10 – Região factível ilimitada com conjunto ilimitado de soluções ótimas (minimização). . . . .	11
Figura 11 – Região factível limitada com conjunto ilimitado de soluções ótimas (maximização). . . . .	12
Figura 12 – Problema com solução degenerada e ótimo não degenerado. . . . .	12
Figura 13 – Harry M. Markowitz. . . . .	26
Figura 14 – Correlação entre os ativos A e B. . . . .	30
Figura 15 – Fronteira Eficiente. . . . .	31
Figura 16 – Gráfico preço x média móvel. . . . .	33
Figura 17 – Gráfico resultante do algoritmo de MMQ. . . . .	38
Figura 18 – Correlação Período I . . . . .	42
Figura 19 – Correlação Período II . . . . .	45
Figura 20 – Correlação Período III . . . . .	47
Figura 21 – Comparação do retorno da carteira e o retorno do Ibovespa. . . . .	50
Figura 22 – Comparação do retorno da segunda carteira e o retorno do Ibovespa. . . . .	51
Figura 23 – Comparação do retorno da terceira carteira e o retorno do Ibovespa. . . . .	52

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Regras para a construção do problema dual. . . . .	20
Tabela 2 – Ativos financeiros selecionados para compor a carteira de investimentos . . . . .	36
Tabela 3 – Ações em momento de compra I. . . . .	41
Tabela 4 – Ações em momento de venda I. . . . .	41
Tabela 5 – Peso dos ativos na Carteira I. . . . .	44
Tabela 6 – Ações em momento de compra II. . . . .	44
Tabela 7 – Peso dos ativos na Carteira II. . . . .	46
Tabela 8 – Ações em momento de compra III. . . . .	47
Tabela 9 – Peso dos ativos na Carteira III. . . . .	48
Tabela 10 – Retorno Mensal da Carteira (Novembro de 2023 - Maio de 2024). . . . .	49
Tabela 11 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Novembro de 2023 - Maio de 2024). . . . .	49
Tabela 12 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Novembro de 2023 - Maio de 2024). . . . .	49
Tabela 13 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Maio de 2024 - Novembro de 2024). . . . .	50
Tabela 14 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Maio de 2024 - Novembro de 2024). . . . .	50
Tabela 15 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Novembro de 2024- Maio de 2025). . . . .	51
Tabela 16 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Novembro de 2024- Maio de 2025). . . . .	51

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>PESQUISA OPERACIONAL</b>	<b>3</b>
2.1	BREVE HISTÓRIA DA PESQUISA OPERACIONAL	3
2.2	APLICAÇÕES DA PESQUISA OPERACIONAL	3
2.3	BREVE HISTÓRIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR	4
2.4	OBJETIVOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR	4
2.5	FORMA PADRÃO	5
2.6	RESOLUÇÃO GRÁFICA	7
<b>2.6.1</b>	<b>Desenho da Região Factível</b>	<b>8</b>
<b>2.6.2</b>	<b>Determinando a Solução Ótima</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>SIMPLEX</b>	<b>13</b>
3.1	FUNÇÃO OBJETIVO EM TERMOS DE $x_N$	14
3.2	TEOREMA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR	14
3.3	ALGORITMO SIMPLEX	15
3.4	MÉTODO DAS DUAS FASES	18
3.5	DUALIDADE	19
<b>4</b>	<b>MERCADO FINANCEIRO</b>	<b>23</b>
4.1	TIPOS DE INVESTIMENTOS	24
4.2	BOLSA DE VALORES	25
4.3	BIBLIOGRAFIA DE HARRY MAX MARKOWITZ	26
4.4	ALGUNS PARÂMETROS ESTATÍSTICOS	27
4.5	TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS	28
4.6	FRONTEIRA EFICIENTE	30
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>32</b>
5.1	DOWNSIDE RISK	32
5.2	MÉDIAS MÓVEIS	33
5.3	PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	34
5.4	CARTEIRA DE INVESTIMENTOS	34
5.5	IMPLEMENTAÇÃO	36
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>40</b>
6.1	PERÍODO I	40
6.2	PERÍODO II	43
6.3	PERÍODO III	46
6.4	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	48
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>53</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A tomada de decisões fundamentadas em dados é essencial em contextos marcados por incertezas, especialmente no mercado financeiro. A Pesquisa Operacional (PO) oferece um conjunto de métodos quantitativos voltados à modelagem e resolução de problemas complexos de alocação de recursos, com aplicações relevantes em áreas como produção, logística e, de forma particularmente significativa, na gestão de investimentos. Nesse contexto, ferramentas como a Programação Linear e Quadrática tornam-se instrumentos valiosos para otimizar carteiras e estratégias de investimento sob restrições operacionais e critérios de risco e retorno.

Dentro do vasto campo da Pesquisa Operacional, a Programação Linear (PL) e, mais especificamente, a Programação Quadrática (PQ), destacam-se como ferramentas poderosas para a otimização. A PL, com seus algoritmos robustos como o Simplex, permite a maximização ou minimização de uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições lineares. A PQ, por sua vez, amplia essa capacidade ao lidar com funções objetivo quadráticas, tornando-a particularmente adequada para problemas que envolvem a variância, como a gestão de risco em carteiras de investimento.

O mercado financeiro, com sua complexidade e a necessidade inerente de equilibrar risco e retorno, oferece um terreno fértil para a aplicação dessas metodologias. A Teoria Moderna de Portfólios, introduzida por Harry Markowitz, revolucionou a forma como se aborda a diversificação de investimentos, buscando a fronteira eficiente que oferece o maior retorno para um dado nível de risco. No entanto, a mensuração e gestão do risco continuam sendo desafios centrais.

Este trabalho se propõe a explorar a aplicação da Programação Quadrática para a otimização de carteiras de investimento, com foco na minimização do risco utilizando o modelo Downside Risk. Diferente das abordagens tradicionais que consideram a volatilidade total, o Downside Risk concentra-se apenas na variação negativa dos retornos, oferecendo uma medida mais intuitiva para investidores avessos a perdas. Além disso, utiliza-se a análise de médias móveis como suporte à identificação de tendências e à definição de momentos oportunos para alocação ou realocação de ativos.

O modelo de otimização foi implementado em linguagem Python, com base em uma formulação matemática detalhada. Os resultados foram comparados ao desempenho do Ibovespa em diferentes períodos, a fim de avaliar a eficácia da abordagem proposta na construção de carteiras com menor exposição ao risco. Dessa forma, o estudo contribui para a aplicação de métodos quantitativos avançados na gestão de investimentos, especialmente no que se refere à alocação eficiente sob incerteza.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. O Capítulo 2 oferece uma visão abrangente da Pesquisa Operacional, traçando suas origens e diversas aplicações, com foco específico na Programação Linear, seus objetivos, forma padrão e métodos de resolução gráfica.

O Capítulo 3 aprofunda-se na Programação Linear, detalhando o algoritmo Simplex, o método das duas fases e o conceito de dualidade, que são cruciais para a resolução de problemas de otimização.

Na sequência, o Capítulo 4 apresenta um panorama do mercado financeiro, explorando diferentes tipos de investimentos e a dinâmica da Bolsa de Valores. Destaca as contribuições de Harry Markowitz para a Teoria Moderna de Portfólios, discutindo parâmetros estatísticos relevantes e a fronteira eficiente.

O Capítulo 5 é central para este estudo, introduzindo o modelo Downside Risk e sua integração

---

com as Médias Móveis. Este capítulo detalha a aplicação da Programação Quadrática na formulação da carteira e os aspectos da implementação computacional.

O Capítulo 6 apresenta e analisa os resultados obtidos com a metodologia proposta, comparando-os ao Ibovespa e discutindo suas implicações. Por fim, o Capítulo 7 traz as Considerações Finais do trabalho.

## 2 PESQUISA OPERACIONAL

Este trabalho se insere no campo da Programação Linear, uma ferramenta essencial da Pesquisa Operacional. Neste capítulo, exploraremos a breve história e as diversas aplicações de ambas as áreas.

### 2.1 BREVE HISTÓRIA DA PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) é um método científico de tomada de decisão, se destacou como uma das grandes evoluções tecnológicas do século XX. Sua primeira aplicação ocorreu em 1938, na Inglaterra, para a realocação de radares. A origem da PO está fortemente relacionada com a Segunda Guerra Mundial, quando necessitou-se dos conhecimentos científicos para resolver problemas militares. Com o objetivo de buscar métodos eficientes para o uso dos recursos escassos durante a guerra, os governos norte-americano e britânico contaram com pesquisadores que estudaram problemas como posicionamento de radares, armazenamento de munição, transporte de tropa, etc.

Um dos nomes que recebeu destaque por volta de 1940 é o de Patrick Blackett (1897-1894), importante físico britânico, reconhecido por alguns como pai da PO. Este utilizou de modelos matemáticos para resolver problemas táticos. Seu grupo que reunia diferentes pesquisadores, desde matemáticos a um agrimensur ficou conhecido como *Blackett's circus*. Em 1948 Blackett (Figura 1) recebeu um Nobel de física por suas investigações sobre os raios cósmicos usando o método da câmara de nuvem de Wilson.

Figura 1 – Físico Patrick Blackett.



Fonte: site Nobel Prize.

No contexto bélico, a PO foi de vital importância. Após a guerra, os Estados Unidos intensificaram os estudos em PO, levando-a para fora do âmbito militar. Na década de 1950 a PO começava a ser introduzida em vários setores, um aspecto que favoreceu seu desenvolvimento foi a intensificação da industrialização. Sua relevância se mantém em diversas aplicações contemporâneas.

### 2.2 APLICAÇÕES DA PESQUISA OPERACIONAL

O uso de modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos na tomada de decisões foi aplicado durante toda a guerra, mas seu crescimento não parou por aí. Após a guerra, a PO teve um grande

desenvolvimento. Atualmente suas aplicações são muito frequentes para a resolução de problemas na indústria, transporte, saúde, educação, etc.

A PO busca trabalhar na tomada de decisões sempre querendo otimizar as soluções, de forma a ter maior eficiência, redução de custos, maior aproveitamento de matéria prima, etc. Em uma fábrica por exemplo, uma otimização feita pela PO buscaria utilizar a menor quantidade de mão de obra, menores gastos em relação à matéria prima, sem comprometer a qualidade e a quantidade do produto. No Brasil, algumas das aplicações mais frequentes são: No setor energético, exploração de petróleo, transporte rodoviário de carga, etc.

Na busca de melhores alternativas para se resolver um problema complexo, a PO utiliza de diversos métodos, tais como programação linear, programação inteira, programação não linear, programação dinâmica, teoria dos jogos, simulação, análise de decisão, redes, filas, etc.

### 2.3 BREVE HISTÓRIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um método a ser destacado da Pesquisa Operacional é Programação Linear (PL), na qual são trabalhados problemas com um objetivo e restrições. Por meio de algoritmos é encontrada a solução ótima.

Pretendendo obter o menor ajuste de desvio máximo de um sistema de equações lineares, Fourier (1768-1830) deu início aos estudos sobre otimização, sua proposta de utilizar o vértice mínimo é um dos princípios utilizados na PL (o qual será explorado melhor ao citar o método Simplex).

Em 1939, com o intuito de planejar gastos e retornos sobre os custos do exército, afim de reduzi-los, Leonid Kantorovich (1912-1976) se tornou o pioneiro na PL. Posteriormente, nos Estados Unidos, quando os estudos voltados a PO se intensificaram, o cientista matemático norte-americano George Dantzig (1912-2005) (Figura 2) tornou-se especialista em métodos de programação e planejamento. Válido destacar que no período pós guerra a Força Aérea dos Estados Unidos investiu no desenvolvimento de computadores.

Foi durante seu trabalho na RAND Corporation no projeto SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*), em 1947, que Dantzig desenvolveu o método Simplex (DANTZIG, 2002). Sua técnica para resolver problemas da PL foram aplicadas para a tomada de decisão em problemas militares da Força Aérea.

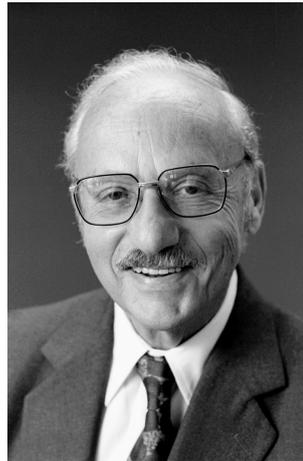
Exploraremos de forma mais detalhada o trabalho de Dantzig posteriormente.

### 2.4 OBJETIVOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um Problema de Programação Linear (PPL) trabalha com uma função linear sujeita a certas restrições também lineares, a qual deve ser maximizada ou minimizada. A tomada de decisões na PL busca sempre a solução ótima. Neste trabalho adotaremos as otimizações de tal forma que sejam minimizadas, mesmo que isso signifique algumas mudanças na formulação da função objetivo.

A habilidade de modelar necessita de uma análise dos elementos essenciais de um problema, além de um julgamento sobre os resultados obtidos para uma significativa conclusão.

Figura 2 – George Dantzig.



Fonte: Ed Souza/Stanford News Service.

Dado um problema real, a primeira etapa é fazer sua formulação, onde são reunidos os dados. Logo após é criado o modelo matemático, no qual é identificado as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições que se está sujeito. Para se obter uma solução através desse modelo é escolhido um método que será melhor discutido posteriormente. Em seguida é feita uma análise da solução obtida, como que queremos a melhor solução, muito possível que seja necessário fazer reestruturação do problema para alcançá-la.

O presente trabalho envolve problemas que sobre gestão financeira, como o dinheiro é um recurso escasso, torna-se necessária uma tomada de decisão para seu melhor aproveitamento.

## 2.5 FORMA PADRÃO

Um problema real expressado através de uma função linear, está sujeita a restrições que podem ser equações ou inequações lineares. Diz-se que um problema está na *Forma Padrão* quando as restrições são expressadas através de igualdades e todas as variáveis são não negativas (LUENBERGER, 2015).

Considere o problema de programação linear a seguir:

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\text{e } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Este problema se encontra na *forma padrão*, onde (1) é uma função linear a ser minimizada é denominada *função objetivo*, (2) são as *restrições* às quais o problema está sujeito e (3) é o que chamamos de *condições de não negatividade*.



Para ser transformada em uma igualdade, será subtraída uma variável  $y_j$ , também positiva e não nula, denominada por *Variável de Excesso*.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - y_1 = b_1, y_1 \geq 0. \quad (9)$$

Ao adicionar ou subtrair novas variáveis nas inequações, passa-se a ter problemas na *forma padrão*, o que leva a forma matricial a sofrer alterações. Seja um PPL no qual foram adicionadas variáveis de folga, assim como na equação (7), a parte das restrições antes era representada por uma matriz  $A_{m \times n}$ , com as modificações a matriz passa a ser  $[A, I]_{m \times (n+m)}$ . Separando a nova matriz em em duas partes, a primeira, que contém as  $n$  primeiras colunas fazem parte da matriz original  $A$  e a segunda parte, que refere às novas variáveis forma uma matriz identidade  $I_{m \times m}$ .

Em todos os exemplos anteriores aplicou-se a condição de não negatividade, entretanto em alguns problemas podem aparecer *Variáveis Livres* que são irrestritas de sinal, ou seja, podem ser positivas ou negativas. Para contornar essa situação, seja uma variável livre  $x_i$ , vamos expressá-la por meio de uma subtração entre dois números não nulos  $u_i \geq 0$  e  $v_i \geq 0$ .

$$x_i = u_i - v_i. \quad (10)$$

O problema passa a ter  $n + 1$  variáveis. A linearidade do problema é preservada e assegura-se que a condição de não negatividade seja satisfeita.

## 2.6 RESOLUÇÃO GRÁFICA

Em um problema de programação linear busca-se encontrar a melhor solução. Para manter um padrão, os problemas neste trabalho são majoritariamente de *minimização*, dessa forma, para uma função objetivo a solução é a menor possível. Em problemas de *maximização* busca-se com a maior solução possível. Para converter um problema de maximização e minimização, basta multiplicar todos os coeficientes da função objetivo por  $-1$ , dessa forma:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^n -c_j x_j. \quad (11)$$

Antes de explorar melhor as soluções, é necessário definir alguns termos:

- **Solução factível:** Solução que satisfaz as restrições de um problema e a condição de não negatividade;
- **Região Factível:** Conjunto de todas as soluções factíveis;
- **Solução ótima:** Dentre as soluções factíveis é a melhor, denotada por  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Ao buscar a solução ótima em uma minimização, deseja-se encontrar  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , tal que  $f(x^*) \leq f(x)$  para toda solução  $x$  factível.

### 2.6.1 Desenho da Região Factível

Em problemas de PL de pequeno porte, isto é, problemas de duas ou três variáveis, podemos representar a região factível de forma gráfica. Através do desenho no plano cartesiano, dentre as soluções factíveis, pode ser identificado o melhor valor para a função linear do problema.

Considere o seguinte problema de otimização linear, retirado de (ARENALES *et al.*, 2007):

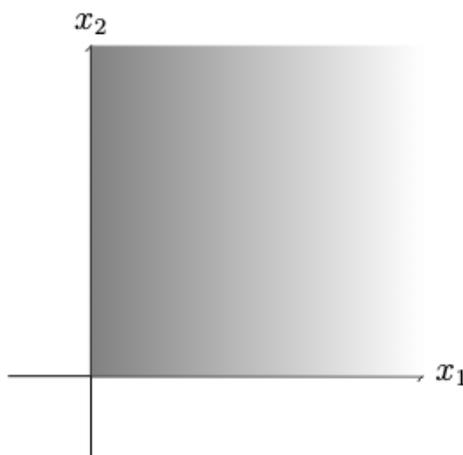
$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\
 \text{e} \quad & x_j \geq 0, j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Denomina-se a região factível por:

$$S = \{(x_1, x_2) / -3x_1 + x_2 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 + 2x_2 \leq 9, 3x_1 + x_2 \leq 18, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}. \tag{13}$$

Em consequência da condição de não negatividade, ao representar a região factível no plano cartesiano, é importante ter em mente que ela estará localizada no primeiro quadrante do plano, como representado na Figura 3.

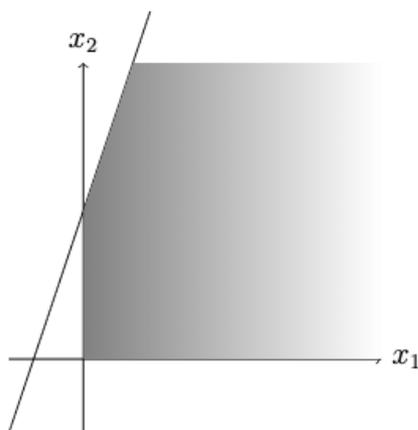
Figura 3 – Região definida por  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .



Fonte: A autora.

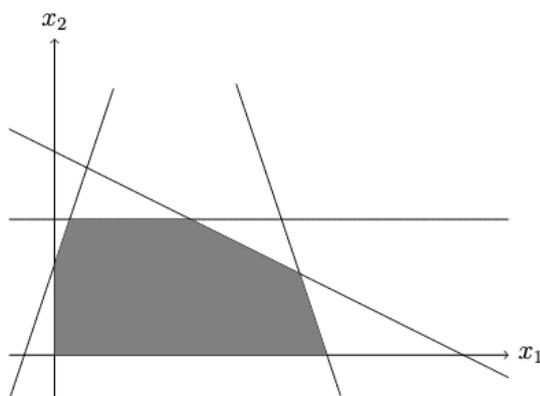
Agora, é necessário representar graficamente as restrições do problema, começando por  $-3x_1 + x_2 \leq 2$ . Os pontos no plano que satisfazem a igualdade  $-3x_1 + x_2 = 2$  formam uma reta. Em seguida, são identificados os pontos que satisfazem  $-3x_1 + x_2 < 2$ . A união da reta, dos pontos da inequação e das restrições de não negatividade estão representados na Figura 4.

Analogamente, pode-se representar as outras restrições para este problema. A intersecção de todas as restrições é representada na Figura 5, que define a região factível  $S$ .

Figura 4 – Região definida por  $-3x_1 + x_2 \leq 2$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Fonte: A autora.

Figura 5 – Gráfico das restrições do problema de programação linear.



Fonte: A autora.

## 2.6.2 Determinando a Solução Ótima

Uma vez delimitada a região  $S$ , tem-se o conjunto de todas as soluções factíveis do problema, a função objetivo  $f$  pode assumir diferentes valores. O conjunto de pontos que atribui o mesmo valor à  $f$  é chamado de *curva de nível*. Podem haver diferentes conjuntos de pontos, desta maneira, denota-se às diferentes curvas de nível como  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ , etc.. Como o que interessa é a solução ótima  $x^*$ , busca-se da curva de nível  $f^*$ . (ARENALES et al., 2007)

O vetor composto pelos coeficientes da função objetivo linear é chamado de *vetor gradiente*, este é perpendicular à curva de nível e aponta para o sentido em que a função objetivo  $f$  tem maior incremento. Sua notação é  $\nabla f$ , o gradiente é composto pelas derivadas parciais da função em cada coordenada.

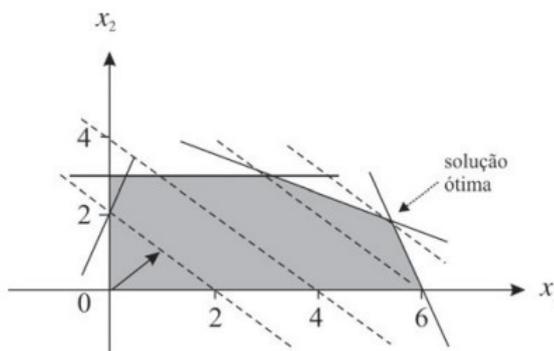
**Definição 2.6.1** Se  $f$  é uma função de duas variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , o **gradiente** de  $f$  é a função vetorial  $\nabla f$  definida por (STEWART, 2007):

$$(\nabla)f(x_1, x_2) = (f_x(x_1, x_2), f_y(x_1, x_2)). \quad (14)$$

Para encontrar a solução ótima, em uma maximização basta seguir o sentido do vetor gradiente e em uma minimização o sentido contrário a ele, que leva ao *vértice*, também conhecido por *ponto extremo*.

Seja o exemplo da Figura 5, os vértices do polígono formado pela região factível  $S$  são denominados de *soluções básicas factíveis*. O vetor gradiente da função objetivo neste problema é dado por  $\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1) = c$ , seguindo a direção apontada por ele é possível encontrar a solução ótima  $x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,4 \\ 1,8 \end{bmatrix}$ . Substituindo esses valores na função objetivo, tem-se que  $f(x^*) = 7,2$ , pode ser observada a solução na Figura 6.

Figura 6 – Solução ótima.

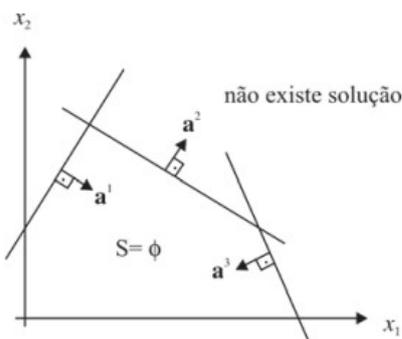


Fonte: Arenales et al. (2011, p. 62).

No exemplo anterior a região factível era limitada e apresentava uma única solução ótima. Entretanto, podem existir infinitas soluções ótimas ou até mesmo a inexistência de solução ótima.

Seja o exemplo o primeiro caso, quando não há soluções factíveis, desta forma a região factível é dada por  $S = \emptyset$ . Desta maneira ocorre a inexistência de solução ótima, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Não existe solução ótima.



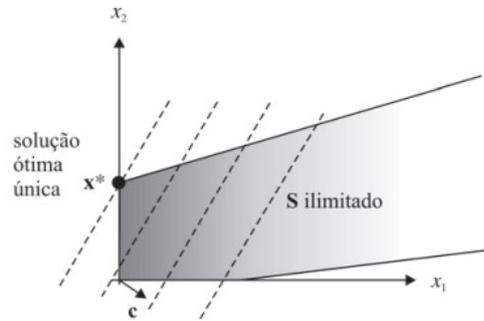
Fonte: Arenales et al. (2011, p. 65).

Em situações onde a região factível é ilimitada, três cenários são possíveis: existe uma única solução ótima, não existe solução ótima, ou existem infinitas soluções ótimas.

A Figura 8 trata de um problema de minimização em uma região ilimitada, mas isso não impede de encontrar uma solução ótima. Seguindo o sentido contrário ao vetor gradiente (representado na figura por  $c$ ) é possível chegar no ponto extremo.

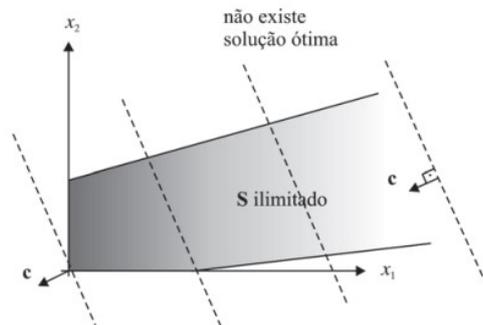
Na Figura 9 mostra um caso em que a solução ótima é ilimitada, também se trata de um caso de minimização, mas para cada ponto que for escolhido sempre há um valor menor para a função objetivo,

Figura 8 – Solução ótima em região factível ilimitada (minimização).



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 63).

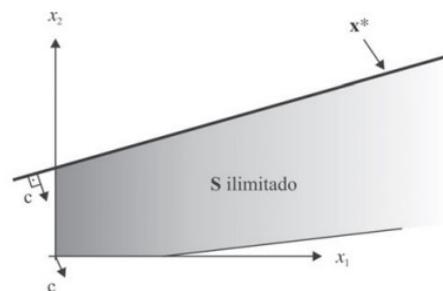
Figura 9 – Região factível ilimitada e não existe solução ótima (minimização).



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 65).

dessa forma,  $\nexists x^* \in S : f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S$ .

Figura 10 – Região factível ilimitada com conjunto ilimitado de soluções ótimas (minimização).



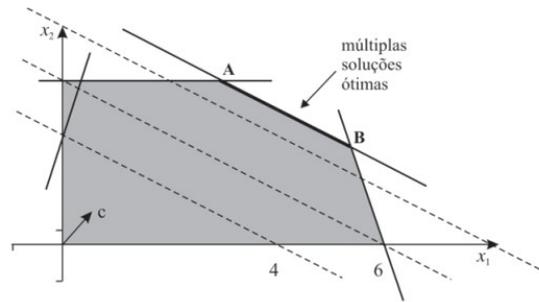
Fonte: Arenales et al. (2011, p. 64)

Mais uma possibilidade é ilustrada na Figura 10, nesta minimização o sentido oposto do vetor gradiente aponta para uma reta, todas as soluções sobre a reta realçada é uma solução ótima.

Infinitas soluções também podem ocorrer quando se tem uma região limitada. Tomando o exemplo de maximização (12) que foi utilizado para desenhar a região factível. Ao mudarmos a função objetivo mas mantermos as restrições a região factível não irá mudar. O que se altera aqui será o sentido do vetor gradiente. Se considerarmos a função objetivo sendo:  $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$  nos deparamos com o caso ilustrado na Figura 11, onde o vetor gradiente aponta para o segmento de reta, apresentando infinitas soluções.

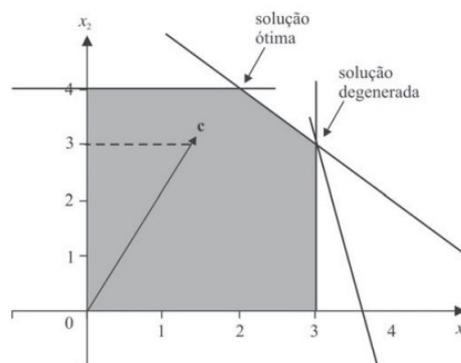
Nos exemplos anteriores o *vértice* que continha  $x^*$  era determinado pela intersecção de pelo

Figura 11 – Região factível limitada com conjunto ilimitado de soluções ótimas (maximização).



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 64)

Figura 12 – Problema com solução degenerada e ótimo não degenerado.



Fonte: Arenales et al. (2011, p. 67)

menos duas retas. Entretanto, quando o vértice pode ser obtido pela intersecção três ou mais retas é produzido o que chamamos de *vértice degenerado*, que pode ser uma *solução factível degenerada* ou até mesmo uma *solução ótima degenerada*. Na ilustração da Figura 12 temos um exemplo desse caso.

Uma solução degenerada pode trazer problemas para o método Simplex, o qual será abordado posteriormente.

### 3 SIMPLEX

Anteriormente foi apresentada a forma matricial de um Problema de Programação Linear (PPL) na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

A matriz  $A_{m \times n}$  pode ser escrita como:  $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ . Em que  $a_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . Em virtude das regras de multiplicação de matrizes, cada  $a_j$  está multiplicando uma determinada variável  $x_j$ .

O sistema pode ser reestruturado de maneira equivalente, o que é chamado de *partição básica*. Nessa reorganização são selecionadas  $m$  colunas linearmente independentes de  $A$ , formando a matriz quadrada  $B_{m \times m}$ , denominada *matriz básica*. As  $n - m$  colunas restantes da matriz  $A$  formam o que é chamado de *matriz não básica*  $N$ .

O vetor  $x$  é separado em duas partes: o *vetor das variáveis básicas*  $x_B$ , o qual é formado pelas  $m$  variáveis que correspondem às colunas selecionadas na matriz  $B$  e o *vetor das variáveis não básicas*  $x_N$  é formado pelas  $n - m$  variáveis de  $N$ .

O sistema pode ser reescrito de forma equivalente como:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b. \tag{16}$$

Na intenção de determinar o vetor  $x_B$  em termos das outras variáveis, o sistema pode ser reescrito de forma:  $Bx_B = b - Nx_N$ . A matriz  $B$  é não singular, desta maneira, ambos os lados da equação podem ser multiplicados por  $B^{-1}$ . A multiplicação de  $B^{-1}B$  equivale a matriz identidade  $I_m$ , que representa o elemento neutro da multiplicação de matrizes:

$$B^{-1}Bx_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \tag{17}$$

O resultado de (17) é chamado de *solução geral*. Atribuindo quaisquer valores à  $x_N$  é possível determinar de forma única  $x_B$ . É válido ressaltar que o cálculo da matriz inversa de  $B$  é caro computacionalmente, pois requer muitas operações aritméticas para ser calculada. Existem diferentes métodos para obter a matriz inversa, mas todos eles têm um custo elevado, especialmente para matrizes de grande ordem.

Se forem fixados valores zeros à  $x_N$  a solução obtida é chamada de *solução básica*, em que:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Se  $x_B$  atende às restrições de não negatividade, ou seja  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ , diz-se que  $x$  é uma solução básica factível.

Quando o número de variáveis do sistema ( $n$ ) é maior que o número de restrições ( $m$ ), pode-se ter várias bases diferentes e assim há um *grau de liberdade* para escolha das soluções, definido por  $n - m$ , dessa forma o sistema possui múltiplas soluções factíveis.

Quando  $n = m$  não há grau de liberdade e dessa forma há apenas uma base. Se o problema tiver solução ela é única. Entretanto se  $n < m$  significa que há restrições no problema que são redundantes.

### 3.1 FUNÇÃO OBJETIVO EM TERMOS DE $x_N$

A função objetivo de um PPL pode ser escrita na forma matricial como  $f(x) = c^T x$ , esta também pode ser reescrita de forma separada entre básica e não básica. O produto entre o vetor  $c^T$  formado pelos coeficientes de custo e o vetor das variáveis de decisão, fica dividido em:

$$f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N. \quad (19)$$

Para deixar a função objetivo escrita apenas com as variáveis não básicas,  $x_B$  pode ser substituído pelo resultado encontrado na solução geral:  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ , resultando em:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}N x_N + c_N^T x_N. \end{aligned} \quad (20)$$

Para simplificar a notação e, posteriormente, os cálculos, define-se a seguir um vetor auxiliar  $\lambda_{m \times 1}$ , chamado de *vetor multiplicador simplex* (ou também *vetor de variáveis duais*).

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}. \quad (21)$$

Substituindo o vetor em (20), tem-se:

$$f(x) = \lambda^T b + (c_N^T - \lambda^T N) x_N. \quad (22)$$

### 3.2 TEOREMA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Dentre as *soluções básicas factíveis* de um PPL pode se encontrar o valor ótimo, denominado *solução básica factível ótima*. Essa propriedade é assegurada pelo *Teorema da Programação Linear* (LUENBERGER, 2015).

**Teorema 1 (Teorema da Programação Linear)** Dado um problema de programação linear em sua forma padrão (15), em que  $A$  é uma matriz  $m \times n$  de posto  $m$ , tem se:

- i) se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;
- ii) se existe uma solução ótima, então existe uma solução básica ótima.

Este teorema reduz a tarefa de resolver um problema de programação linear para a de apenas procurar por soluções básicas factíveis. Sua demonstração pode ser encontrada em Luenberger e Ye (1984, p. 21).

Como em um PPL é necessário selecionar  $m$  colunas linearmente independentes entre si da matriz  $A$  para formar a base  $B_{m \times m}$ , como há  $n$  colunas que podem ser selecionadas, o número de possibilidades é representado por uma combinação simples:

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (23)$$

Segundo o Teorema da Programação Linear, o número máximo de iterações para encontrar a solução ótima é finito e dado pela combinação  $C_m^n$ . No entanto, essa garantia teórica não implica em uma eficiência prática, pois o número de possibilidades pode ser muito grande, tornando o problema inviável computacionalmente. Por isso, o *método simplex* propõe uma forma mais inteligente de buscar a solução ótima, partindo de uma solução básica factível e gerando outras soluções básicas melhores até atingir o ótimo.

### 3.3 ALGORITMO SIMPLEX

Como visto anteriormente em (18), pode-se encontrar os pontos extremos de uma região factível fixando  $n - m$  coordenadas da variável de decisão  $x$  em zero e resolvendo o sistema linear resultante. Esses pontos extremos correspondem às soluções básicas do problema, ou seja, às soluções que satisfazem o sistema  $Ax = b$ . Assim, pode-se reduzir a busca pela solução ótima aos pontos extremos, que podem ser representados algebricamente de forma computacional.

É importante destacar que nem toda solução básica representa uma solução básica factível, para isso é necessário que satisfaça a todas as restrições do problema e a não negatividade.

Olhando para a equação (22), sabe-se que  $c_N^T, N$  e  $x_N$  tem dimensão  $n - m$ , podemos reescrevê-la como:

$$f(x) = \lambda^T b + (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2})x_{N_2} + \cdots + (c_{N_n} - \lambda^T a_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}. \quad (24)$$

Em que  $c_{N_i}$  é um dos coeficientes de custo das variáveis não básicas,  $a_{N_i}$  uma das colunas da matriz  $N$  e  $x_{N_i}$  é uma variável não básica. Denomina-se *custo relativo* ou *custo reduzido* cada coeficiente  $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - m$ , de tal forma que a equação pode ser reescrita como:

$$f(x) = \lambda^T b + \hat{c}_{N_1}x_{N_1} + \hat{c}_{N_2}x_{N_2} + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}. \quad (25)$$

Sabe-se que todas as variáveis do problema seguem a condição de não negatividade, desta forma  $x_{N_j} \geq 0$ .

Diz-se que a *condição de otimalidade* é verificada quando para uma solução básica factível de um PPL é  $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$  tem se todos os custos relativos positivos. *Se a condição de otimalidade for verificada, então a solução básica factível é ótima.*

Nem sempre a solução ótima é encontrada através da solução básica inicial, se há algum custo relativo negativo então a condição de otimalidade não é satisfeita. Para se encontrar de fato a solução básica factível ótima é necessário fazer uma alteração na solução básica já obtida.

É chamada de *estratégia Simplex* a perturbação das variáveis não-básicas de uma solução básica factível de modo a diminuir o valor da função objetivo. Isto ocorre da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \\ x_{N_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - m, j \neq k. \end{cases} \quad (26)$$

Uma das variáveis não básicas, a  $x_{N_k}$  deixará de ser nula. A equação pode ser escrita como:

$$f(x) = \lambda^T b + \hat{c}_{N_1}0 + \hat{c}_{N_2}0 + \cdots + \hat{c}_{N_k}\varepsilon + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}. \quad (27)$$

Substituindo  $\lambda^T b$  por  $f(\hat{x})$ , resta então:

$$f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_k} \varepsilon. \quad (28)$$

Como  $\hat{c}_{N_k} > 0$ , tem-se que o valor da função objetivo será ainda menor que a solução básica factível obtida anteriormente. Sabendo que este é um problema na forma padrão, deseja-se encontrar a menor solução possível, para que a função objetivo decresça mais rapidamente a escolha da variável não básica deve ser planejada. A escolha é feita através da *regra de Dantzig*, quando se há mais de um custo relativo negativo, será escolhido  $\hat{c}_{N_k}$  com o menor valor.

A escolha de  $\varepsilon$  também não é arbitrária, quanto maior for seu valor, menor será o valor assumido pela função objetivo. Sua escolha é limitada para que a solução permaneça factível.

Quando  $x_{N_k}$  deixa de ser nulo as variáveis básicas também são alteradas, de modo que o sistema  $Ax = b$  seja satisfeito.

Com base na solução geral (equação (17)), obtém-se que:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_{N_k} = \hat{x}_B - B^{-1}a_{N_k} \varepsilon. \quad (29)$$

Onde  $a_{N_k}$  é a coluna correspondente a variável  $x_{N_k}$ . Substituindo  $B^{-1}a_{N_k}$  por  $y$ , denominado *direção simplex* tem-se:

$$x_B = \hat{x}_B - y\varepsilon. \quad (30)$$

O vetor  $y$  fornece os coeficientes para alterar as variáveis básicas de modo que continue valendo a solução ainda seja factível. De tal forma, as variáveis básicas podem ser reescritas como:

$$x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon, i = 1, 2, \dots, m. \quad (31)$$

Logo,

Se  $y_i \leq 0$ , então  $x_{B_i} \geq 0$ , para todo  $\varepsilon \geq 0$

Se  $y_i > 0$ ,  $\varepsilon \leq \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}$  para que  $x_{B_i} = \hat{x}_{B_i} - y_i \varepsilon \geq 0$ .

Já foi afirmado que quanto maior o  $\varepsilon$  menor será o valor da função objetivo, sendo assim sua escolha deve ser:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \min. \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}. \quad (32)$$

A escolha do  $\hat{\varepsilon}$  altera o valor de uma das variáveis da base, que passa a ser zero:

$$x_{B_l} = \hat{x}_{B_l} - y_l \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = 0. \quad (33)$$

Ao realizar essa mudança, a variável  $x_{N_k}$  que deixou de ser nula e assumiu o valor de  $\hat{\varepsilon}$  e uma das variáveis da base  $x_{B_l}$  passou a ser nula. Diz-se então que  $x_{B_l}$  saiu da base  $B$  e  $x_{N_k}$  entrou na base. Com essa alteração o valor da solução encontrada muda, que leva a um novo vetor das variáveis, agora com  $x_{B_l} = 0$ .

Esse movimento de colocar uma variável na base e retirar outra resulta em novos custos relativos, é o que se chama de iteração. Enquanto os custos relativos não satisfizerem a condição de otimalidade, novas iterações são feitas buscando encontrar a solução básica factível ótima.

Caso durante o critério de escolha do valor a ser assumido por  $x_{N_k}$  não haja nenhum  $y_i < 0$ , tem-se então que para qualquer valor de  $\varepsilon \geq 0$ ,  $x_{B_i} \geq 0$ . É dito que não há um limite superior para  $\varepsilon$ , sendo assim, para qualquer valor assumido, sempre há uma solução melhor para o problema. Há então o caso de região factível ilimitada, como visto na Figura 9.

A busca pela otimidade ocorre em forma de loop, ou seja, as variáveis entram e saem da base até se encontrar a solução básica factível ótima. Esse loop pode ser descrito na forma de um algoritmo que se repete até a solução ótima ser encontrada.

Considerando um PPL na forma padrão (15). É chamada de *fase I* a determinação de uma solução básica inicial, onde ocorre a partição da matriz  $A$  em uma matriz básica e uma matriz não básica. Se as restrições do problema são satisfeitas, segue-se então para a *fase II*, em que se caracteriza o algoritmo:

- *Passo 1: Cálculo da solução básica*

$$k = 1$$

$$\begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0. \end{cases} \quad (34)$$

- *Passo 2: Cálculo do vetor multiplicador simplex*

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}. \quad (35)$$

- *Passo 3: Cálculo dos custos relativos*

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}), j = 1, 2, \dots, n - m. \quad (36)$$

- *Passo 4: Determinar quem entra na base*

$$\hat{c}_{N_k} = \min \{ \hat{c}_{N_j}, j = 1, 2, \dots, n - m \}. \quad (37)$$

Se  $c_{N_k} \geq 0$  **pare**, foi verificada a condição de otimalidade.

Caso contrário  $x_{N_k}$  entrará na base.

- *Passo 5: Cálculo da direção simplex*

$$y = B^{-1} a_{N_k}. \quad (38)$$

Se  $y \leq 0$  **pare**.

Se  $\nexists y/y > 0$ , então o problema é ilimitado.

Caso contrário, determine a variável  $x_{B_l}$  a sair da base pela razão mínima.

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x}_{B_l}}{y_l} = \min. \left\{ \frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (39)$$

- *Passo 6: Atualize a base*

$x_{N_k}$  entra na base no lugar de  $x_{B_l}$ , nesta nova partição a  $k$ -ésima coluna de  $N$  substitui a  $l$ -ésima coluna de  $B$ .

$$k = k + 1.$$

Retorne ao passo 1.

### 3.4 MÉTODO DAS DUAS FASES

Para que o método simplex possa ser aplicado, é necessário que haja uma solução básica factível inicial, a determinação desta ocorre na **fase I**. Algumas literaturas colocam que na forma padrão o vetor independente  $b$  deve ser positivo. Isso simplifica o processo: ao adicionar variáveis de folga, formamos a matriz  $[A, I]_{m \times (n+m)}$ , em que  $I$  é a matriz identidade das variáveis de folga. Optando por essas variáveis como base, a primeira iteração do Simplex já nos entrega uma solução básica factível, pois como  $B = I$  e  $x_B = B^{-1}b$ , a solução básica factível é dada por  $X_B = b$ .

Entretanto, nem sempre um problema de programação linear apresenta logo no começo uma solução básica factível inicial sobre o qual o método simplex deverá ser aplicado.

Sendo a matriz  $A_{m \times n}$ , a possibilidade de bases é dada pela combinação  $C_m^n$ , escolher a base ao acaso resulta em um algoritmo exaustivo que para problemas de grande porte se tornam inaceitáveis do ponto de vista computacional, visto que a combinação resultaria em diversos sistemas de equações lineares diferentes.

Considerando o PPL na forma padrão, em que  $A$  não tem uma submatriz identidade, logo não há solução básica factível inicial:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

São introduzidas variáveis como se fossem de folga, denominadas *variáveis artificiais*, que resultam em um *problema artificial*:

$$\begin{aligned} \text{Min } f_a(x, y) &= \sum_{i=1}^m y_i \\ Ax + y &= b \\ x \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Neste problema a função objetivo é alterada, pois deseja-se eliminar as variáveis artificiais no problema original.

Se há uma solução factível para o problema inicial, então há um valor mínimo para que o vetor  $y = 0$  na solução ótima. No problema artificial as variáveis artificiais formam uma base trivial, de modo que  $y = b$ . Deste modo o método simplex pode ser aplicado. A solução ótima obtida deve ser obtida de modo que  $\sum_{i=1}^m y_i = 0$  para que se tenha uma solução factível para o problema original, caso contrário o problema é infactível.

Com a aplicação do método Simplex no problema artificial, as variáveis artificiais que foram inseridas no problema com caráter de variáveis básicas, tornar-se-ão variáveis não básicas e a solução básica será dada pelo vetor  $x$ .

Quando há solução básica factível o problema pode seguir para a **fase II** com a base encontrada na primeira fase, entretanto omite-se as variáveis artificiais e a função objetivo do problema artificial, visto que foram anuladas.

Considere o problema de otimização linear definido na equação (42), retirado de (BAZARAA;

JARVIS; SHERALI, 2009).

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Adicionando as variáveis de folga  $x_3, x_4$  e  $x_5$ , obtém-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
 & x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Mesmo com as variáveis de folga, não há uma submatriz identidade. De tal forma, são introduzidas as variáveis artificiais  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f_a(y_1, y_2) = y_1 + y_2 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2 \\
 & -x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 1 \\
 & x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Note que a última restrição não necessitou de uma variável artificial. Agora é possível iniciar o método Simplex com a base  $B = [6, 7, 5]$ .

Através do método Simplex, é obtida a solução ótima para a fase I:  $(x_1, x_2, x_5) = (1/2, 3/2, 3/2)$ . As variáveis artificiais são descartadas e assim, pode ser iniciada a fase II a partir desta base encontrada.

### 3.5 DUALIDADE

Um PPL decorrente de outro é denominado *Dual*, estes são opostos que se complementam. O original é chamado de *Primal*, termo que surgiu para substituir a frase "o problema original o qual este é o dual" (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2009).

Em alguns casos a solução do dual é mais simples que a do primal. Computacionalmente isso significa uma vantagem significativa, tendo em vista que o algoritmo Simplex pode ser complementado com a resolução simultânea dos problemas.

A maneira em que o dual se constitui a partir do primal faz com que a solução ótima de um problema forneça a solução ótima do outro também.

A dualidade pode ser expressa pelo par de problemas (45):

$$\begin{array}{ll}
 \textit{Primal} & \textit{Dual} \\
 \min & c^T x \\
 \text{s.a} & Ax = b \\
 & x \geq 0 \\
 \max & b^T y \\
 \text{s.a} & A^T y \leq c \\
 & y \text{ livre.}
 \end{array} \tag{45}$$

Enquanto  $x$  é a variável de um problema primal,  $y$  é a variável de um problema dual, em que  $y^T$  é um vetor linha  $m$ -dimensional. A Equação (45) é chamada de *forma simétrica de dualidade*, em que a partir de um problema primal na forma padrão, pode ser expressado qualquer problema dual (LUENBERGER, 2015).

Um problema primal minimização passa a ser na forma dual um problema de maximização, bem como os coeficientes da função objetivo em um viram restrições no outro. Também há a transposição da matriz  $A$ .

Em uma conversão primal-dual, em que o primal não está na forma padrão, para saber o tipo de restrição e o sinal das variáveis deve ser levado em consideração o sentido da otimização . Se o primal for de maximização, então o dual é de minimização e vice-versa (TAHA, 2007).

Algumas regras devem ser seguidas em relação ao sinais das variáveis e restrições, resumidas na Tabela 1:

Tabela 1 – Regras para a construção do problema dual.

Problema de Maximização		Problema de Minimização
<b>Restrições</b>		<b>Variáveis</b>
$\geq$	$\Leftrightarrow$	$\leq 0$
$\leq$	$\Leftrightarrow$	$\geq 0$
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita
<b>Variáveis</b>		<b>Restrições</b>
$\geq 0$	$\Leftrightarrow$	$\geq$
$\leq 0$	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

Fonte: TAHA (2007, p.69)

O lema a seguir mostra que a solução factível de um problema primal ou dual provoca um limite no valor da função objetivo do outro problema (LUENBERGER, 2015).

**Lema 3.5.1** (*Lema da dualidade fraca*) *Se  $x$  e  $y$  são soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, então  $c^T x \geq b^T y$ .*

Prova:

Com base na par de problemas (45), tem-se que  $Ax = b$ . Onde  $A \in^{m \times n}$ ,  $x \in^{n \times 1}$ ,  $c \in^{n \times 1}$  e  $b \in^{m \times 1}$ .

Pode ser reescrito como  $A^T y x = b^T y$ . Pelo problema dual, tem-se que:

$$c^T x \geq A^T y,$$

Assumindo a condição de não negatividade do vetor das variáveis  $x$ , pode se afirmar que:

$$c^T x \geq A^T y x \Rightarrow c^T x \geq b^T y.$$

Portanto,

$$c^T x \geq b^T y. \blacksquare$$

Em resumo,  $b^T y$  é um limite inferior para a função objetivo do problema primal. Se o primal está buscando o menor valor para  $c^T x$ , seu dual está buscando o valor máximo. Ao se buscar o valor ótimo, ambos os problemas procuram atingir um o valor do outro.

Em relação ao lema da dualidade fraca, pode ser estabelecida uma relação entre os valores ótimos dos problemas duais e primais, chamado de *gap de dualidade*

**Definição 3.5.1** *O gap de dualidade  $\gamma$  é a diferença entre os valores das funções objetivos para as formulações primal e dual do mesmo problema, ou seja:*

$$\gamma = c^T x - b^T y. \quad (46)$$

Ou seja, essa diferença entre os valores da função objetivo mostra o quanto as soluções encontradas estão distantes, espera-se que a diferença seja mínima até chegar em zero.

Computacionalmente, quando se está buscando o valor ótimo, o gap de dualidade pode representar um critério de parada em algoritmos iterativos. De tal forma, quanto menor o gap de dualidade, mais os valores da função objetivo se aproximam, podendo assim ser estabelecido um valor tolerável para essa diferença .

**Corolário 3.5.1** *Se  $x_0$  e  $y_0$  são soluções factíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, e se  $c^T x_0 = b^T y_0$ , então  $x_0$  e  $y_0$  são soluções ótimas para seus respectivos problemas (LUENBERGER, 2015).*

Tem-se também como consequência do lema que se um problema é ilimitado, o outro é infactível.

**Corolário 3.5.2** *Se um dos problemas tiver solução ilimitada, o outro problema não possui solução factível (BAZARAA; JARVIS; SHERALI, 2009).*

Diante de tais resultados, O Teorema da Dualidade da Programação Linear mostra que o inverso também é válido:

**Teorema 2** *(teorema da dualidade da programação linear) Se algum dos problemas Primal ou dual tem uma solução finita ótima, então o outro também tem e os valores correspondentes das funções objetivo são iguais. Se algum dos problemas for ilimitado, então o outro não tem solução factível.*

A demonstração do Teorema 2 pode ser verificada em Luenberger e Ye (2008, p. 103).

Há uma relação adicional a qual os problemas primal e dual devem satisfazer para que as soluções sejam ótimas, segue-se o Teorema:

**Teorema 3** *(Teorema da Folga Complementar) Sejam  $x^*$  e  $y^*$  soluções factíveis para os problemas primal e dual respectivamente. Então eles são respectivamente ótimos se e somente se:*

- i)  $y_i(A_i x^T - b_i) = 0 \quad i = 1, \dots, m$   
 ii)  $(c_j - y^T a_j)x_j = 0 \quad j = 1, \dots, n.$

O Teorema 3 indica que os termos em cada expressão deve ser zero. Tomando-o como base, considerando um problema primal na forma padrão, os vetores  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  são soluções ótimas do primal e dual respectivamente, se e somente se:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y &\leq c \\ (c_j - y^T a_j)x_j &= 0 \quad j = 1, \dots, n \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Definindo uma variável  $s$ , tal que  $s_j = (c_j - y^T a_j)x_j^*$ . Essa variável acaba sendo uma folga na restrição dual, de tal forma, pode-se reescrever a equação conforme o Teorema 4.

**Teorema 4** (*Condições de Karush-Kuhn-Tucker*) *Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $s \in \mathbb{R}^n$ . Os vetores  $x$  e  $y$  são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se, satisfazem:*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y + s &= c \\ s_j x_j &= 0 \quad j = 1, \dots, n \\ x, s &\geq 0. \end{aligned} \tag{48}$$

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) não se limitam a problemas lineares, podendo ser utilizadas em problemas de otimização no geral. Entretanto, na PL são condições necessárias e suficientes, para programação não linear as condições de KKT são apenas necessárias.

A demonstração dos teoremas 3 e 4 fogem do escopo deste trabalho e podem ser verificadas em Luenberger e Ye (1984).

## 4 MERCADO FINANCEIRO

A Programação Linear aplicada na gestão e na área financeira tem sido desenvolvida com o tempo, sendo uma ferramenta importante para a tomada de decisão de compra e venda de ativos. Antes de explorar sua aplicação, é necessário uma boa base dos conceitos do mundo dos investimentos, bem como conceitos da educação financeira.

Investir, do ponto de vista econômico, significa aplicar algum valor ou recurso esperando obter lucros, o que não é garantido. Entende-se por lucro o retorno positivo de um investimento, podendo ser um lucro bruto ou líquido. O lucro bruto é a receita total menos os custos variáveis, que dependem da produção. O lucro líquido é a receita total menos todos os custos e despesas, incluindo os fixos e os impostos.

O ato de investir não está isento de riscos, que podem ser entendidos como a incerteza sobre os rendimentos de um investimento ou de uma atividade econômica. O risco diversificável, ou não sistemático, está associado a um ativo ou setor específico e são passíveis de redução através de diversificação. O risco não diversificável, ou risco de mercado, está relacionado a fatores macroeconômicos, políticos, jurídicos ou sociais que impactam o mercado como um todo.

Os investimentos podem ser de curto, médio ou longo prazo, dependendo das metas de quem os faz. Também variam de acordo com o perfil dos investidores, que podem ser classificados de acordo com suas características e comportamentos, sendo eles:

- Conservador: é aquele que prefere não correr riscos, busca a segurança na hora de investir mesmo que isso leve a um retorno reduzido.
- Moderado: mesmo gostando da segurança, arrisca-se colocando parte dos seus recursos em investimentos com menor estabilidade.
- Arrojado: tendo consciência das oscilações dos investimentos, gosta de diversificar suas aplicações, aceita os riscos e valoriza a rentabilidade a longo prazo.

Um conceito importante para o mercado financeiro que deve ser definido é a taxa de juros. Trata-se de um percentual que indica o valor do dinheiro no tempo. No Brasil, a taxa que representa os juros básicos da economia é a Selic, abreviação para Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. A Taxa Selic influencia todas as demais taxas de juros, como a de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras.

Criada em 1979, a Selic se trata de uma taxa de juros que o governo paga pelos títulos públicos que emite por meio do Tesouro Nacional. Esses títulos são uma forma de o governo captar recursos no mercado financeiro. A Selic é calculada a cada 45 dias pelo Comitê de Política Monetária (Copom), um órgão do Banco Central. Essa taxa pode ser uma ferramenta para controlar a inflação do país.

A inflação do país é medida através do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), calculado mensalmente pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). O aumento da inflação implica na diminuição do poder de compra da moeda, o que causa desequilíbrio na economia.

Aumentar a Selic, por exemplo, faz com que o acesso ao dinheiro diminua, pois os juros cobrados pelos bancos e instituições financeiras tendem a subir. O consumo é desestimulado, por consequência os

consumidores diminuem seus gastos. Com a redução da demanda por bens e serviços, ao longo prazo, por conta da proporção entre oferta e procura, os preços tendem a baixar, o que é uma estratégia para controlar a inflação.

#### 4.1 TIPOS DE INVESTIMENTOS

Denomina-se ativos financeiros aquilo que um investidor ou empresa possua e que possa ser convertido em dinheiro, não existem de forma física e são adquiridos por meio de negociações de compra e venda. São exemplos: ações, títulos públicos ou privados, fundos de investimento, etc. Os ativos financeiros podem ser de renda fixa ou renda variável.

Um investimento em renda fixa tem um retorno predefinido, quando é uma renda prefixada já se sabe qual será o retorno no momento da aplicação, já na pós-fixada o rendimento está relacionado a algum índice da economia, como por exemplo o CDI (Certificado de Depósito Interbancário), que é uma taxa que acompanha a taxa Selic e surge nas transações entre bancos.

O nome renda fixa indica que o rendimento é fixo e não varia com o mercado. Muitos dos investimentos apresentam liquidez diária, que significa que o valor investido pode ser resgatado a qualquer momento, tendo uma rentabilidade de acordo com o tempo que ficou aplicado.

Alguns exemplos de renda fixa são:

- Certificado de Depósito Bancário (CDB): são títulos de dívida, o investidor empresta dinheiro para o banco financiar suas atividades de crédito e em troca é remunerado com juros;
- Poupança: consiste em depositar dinheiro em uma conta bancária específica. Apesar de ser isenta de impostos seu rendimento é limitado e varia de acordo com a taxa Selic;
- Letras de Crédito Imobiliário (LCI) e Letras de Crédito do Agronegócio (LCA): investidor está emprestando dinheiro para o setor imobiliário ou para o agronegócio, e recebe uma remuneração de juros no vencimento do título;
- Debêntures: também são títulos de dívidas, mas para empresas não financeiras. É uma maneira das empresas financiar projetos, aumentar capital, reestruturar dívidas, entre outras finalidades;
- Tesouro direto: é um programa criado pelo Tesouro Nacional que permite a compra e venda de títulos públicos federais. Os títulos são formas de emprestar dinheiro ao Governo para financiar a dívida pública.

Há uma proporcionalidade entre o risco e o retorno de investimento, os investimentos de renda fixa apresentam pouca incerteza, por consequência tem baixo rendimento. Por outro lado, investimentos em renda variável têm maior risco, visto que oscilam mais.

Em um investimento em renda variável não é possível prever seus ganhos, pois depende de diversos fatores, como a situação econômica, política e social do país e do mundo. É uma modalidade arriscada que não garante rentabilidade futura, por essa razão atrai investidores de perfil arrojado.

São exemplos de rendas variáveis:

- **Ações:** é o tipo de investimento de rendas variáveis mais conhecido. Comprar uma ação é como comprar uma pequena parcela de uma empresa, em que o investidor se torna sócio, o que lhe garante alguns direitos, como receber dividendos (parte do lucro líquido de uma empresa dividida entre os acionistas). Os valores de uma ação podem variar em um único dia;
- **Brazilian Depositary Receipt (BDRs):** são certificados que representam ações de empresas estrangeiras negociados na Bolsa brasileira;
- **Fundos de Investimentos:** diversas pessoas, chamadas de cotistas, realizam aplicações em um grupo de ativos. Cada investidor detém sua participação relativa referente ao fundo dependendo de sua quantidade de cotas;
- **Exchange Traded Fund (ETF):** é um fundo de investimento que tem como referência algum índice da bolsa de valores e é administrado por um gestor qualificado;
- **Commodities:** são produtos de origem primária, como matérias-primas agrícolas, seus preços são determinados através da oferta e demanda global. Devido a variação dos valores investir em commodities pode ser uma opção rentável.

O conjunto formado por um grupo de ativos financeiros é chamado de *Portfolio*. Pensando nos diferentes perfis de investidores e nas possibilidades de investimento, diferentes carteiras podem ser montados.

## 4.2 BOLSA DE VALORES

A Bolsa de Valores é o mercado onde se negociam as ações de empresas de capital aberto, ou seja, que permitem que qualquer pessoa invista nelas. Alguns exemplos de empresas de capital aberto são a Ambev, o Itaú e o Bradesco. Quando uma empresa abre o seu capital, ela divide o seu valor em várias partes iguais (ações), que podem ser compradas por investidores, chamados de acionistas.

Em relação a história da Bolsa de Valores:

A transição da Idade Antiga para a Idade Média apresentou eventos marcantes na história geral. Estes eventos proporcionaram consequências para a vida contemporânea, pois o avanço econômico e social configurou a complexidade das relações atuais de mercado. Diante disto, empresários e representantes do comércio passaram a se encontrar para negociar os seus títulos organizacionais. Surgiu a Bolsa de Valores, que teve as suas atividades acentuadas a partir do século XII, na Europa (SILVA, 2016, p. 175).

No Brasil, a Bolsa de Valores é chamada B3 e é resultado da fusão entre a BM&FBovespa e a Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos (Cetip). A B3 é supervisionada pela Comissão de Valores Mobiliários (CVM).

Em 1895, foi criada a Bolsa de Fundos Públicos de São Paulo, que décadas depois seria conhecida como Bovespa. Paralelamente à Bovespa, outra bolsa de comércio brasileira atuava negociando contratos de mercadorias, principalmente, commodities e derivativos à vista para pagamento futuro e, até então era a maior empresa de valores do Brasil, chamada de Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) (INVESTIMENTOS, 2024).

Em 2008 essas bolsas se juntaram, formando a BM&FBovespa. Em 2017 uma nova empresa se uniu a elas, a Cetip, sendo renomeada como B3, sigla para Brasil, Bolsa e Balcão.

Nos últimos tempos o interesse pela área de investimentos tem aumentado, no entanto os estudos voltados ao mercado financeiro não são um acontecimento recente. Como exemplo temos o trabalho de Harry Markowitz publicado em 1952, publicado no artigo *Portfolio Selection* (MARKOWITZ, 1952).

#### 4.3 BIBLIOGRAFIA DE HARRY MAX MARKOWITZ

O economista Harry Max Markowitz (Figura 13) é de grande importância para o mercado financeiro, criador da Teoria Moderna de Portfólios.

Figura 13 – Harry M. Markowitz.



Fonte: site Nobel Prize.

Nascido em 24 de agosto de 1927, em Chicago, Markowitz dedicou seus estudos a criar uma carteira de investimentos onde pudesse maximizar o retorno com o menor risco possível. Se formou na Universidade de Chicago, onde se especializou em economia, se interessando pela "Economia da Incerteza".

Em sua dissertação, Markowitz desejava debater sobre a aplicação de modelos matemáticos no mercado de ações. Em seus estudos elaborou uma teoria que se preocupava com o risco e o retorno de uma ação, incentivando a diversidade, a qual foi publicada no *Journal of Finance*, em 1952.

Também em 1952, ao ingressar para a RAND Corporation, instituição que desenvolve pesquisa e análise às Forças Armadas dos Estados Unidos, teve a oportunidade de conhecer George Dantzig e seu trabalho sobre o algoritmo Simplex. As técnicas de otimização que Markowitz aprendeu influenciaram seu trabalho posterior sobre o cálculo rápido de fronteiras de média-variância.

O prêmio Von Neumann em Teoria de Pesquisa Operacional da *Operations Research Society of America* e do *Institute of Management Sciences* foi concedido a Harry Markowitz. Em 1990, lhe foi laureado o prêmio Nobel de Economia por sua inovação na Teoria Moderna de Portfólios.

Em 1959, seu trabalho *Portfolio Selection* foi expandido no livro *Portfolio Selection: Efficient Diversification*.

Filho de Morris e Mildred Markowitz, o economista Harry Max Markowitz faleceu aos 95 anos, no dia 22 de junho de 2023 em San Diego, na Califórnia.

#### 4.4 ALGUNS PARÂMETROS ESTATÍSTICOS

A Teoria Moderna de Portfólios utiliza de alguns parâmetros estatísticos para ser formulada uma carteira de investimentos. Diversos campos de estudo se beneficiam de métodos estatísticos, o que não é diferente para área da economia, em que seu uso permite analisar e interpretar diversos fenômenos.

Além disso, previsões podem ser feitas através da estatística para conceitos econômicos. Para medir o risco do investimento são usuais as ferramentas estatísticas variância, desvio padrão e correlação entre os ativos (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

Na estatística, a natureza dos dados também apresenta influência. Se um conjunto de dados consiste em todas as observações possíveis de um determinado elemento, diz-se então que é uma *população*. Por outro lado, se o conjunto de dados representa uma parcela selecionada dessa população, este é chamado de *amostra*.

Para o desenvolvimento do nosso modelo matemático, alguns parâmetros estatísticos são de particular relevância e merecem destaque.

##### Média aritmética

Um dos termos estatísticos mais populares, se trata de uma medida de tendência central (ou medida de posição) dos dados. Frequentemente representada por  $\bar{x}$  para dados de uma população e  $\mu$  para dados amostrais.

Seja um conjunto de dados  $x$ , com  $n$  elementos, sua média é dada pela soma de todos dividido por  $n$ .

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (49)$$

##### Média Ponderada

Em alguns casos, a média não é uniforme para todos os dados pois apresentam diferentes *pesos de importância relativa*.

Seu cálculo é dado por:

$$x_w \in \mathbb{R}; x_w = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (50)$$

onde, cada observação  $i$  é representada por um número  $x_i$  e um peso  $w_i$ .

##### Variância

A variância faz parte das medidas de dispersão (ou variabilidade). Assim como a média, sua representação se difere para dados de uma população,  $\sigma^2$ , e dados amostrais,  $s^2$ . A variância é dada pela soma dos quadrados das diferenças entre cada amostra e a média dos dados dividida pelo número total de dados do conjunto:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}. \quad (51)$$

Essa medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está da média. Como a variância amostral tende a ser maior que a variância populacional, um fator de correção é adicionado no denominador, conhecido como *Correção de Bessel*.

### Desvio Padrão

O desvio padrão de um conjunto de dados  $\sigma$  é obtido extraindo-se a raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (52)$$

É mais comum o uso do desvio padrão em determinados momentos pois, diferente da variância que é expressa no quadrado da unidade dos dados, o desvio padrão é expresso na mesma unidade, facilitando a comparação e a interpretação dos dados.

### Covariância

Sejam dois conjuntos de dados  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , para entender como elas se relacionam entre si é usada a medida estatística covariância. Em uma amostra com  $n$  elementos, a covariância  $S_{xy}$  é definida por:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n}, \quad (53)$$

onde  $\mu_x$  e  $\mu_y$  são respectivamente as médias de  $x$  e  $y$ .

A covariância é um termo importante para o mercado de finanças e a Teoria de Markowitz, sejam  $x$  e  $y$  ativos,  $S_{xy}$  mostra a relação entre eles, um conceito que será melhor explorado posteriormente.

### Correlação

Assim como a correlação, indica como duas variáveis se relacionam entre si. No entanto, a correlação os valores são padronizados em um intervalo de  $[-1, 1]$ , a qual é representada pela expressão:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (54)$$

Se a correlação entre duas variáveis têm valor  $+1$ , significa que há uma relação linear positivamente perfeita, assim como uma correlação igual a  $-1$  significa que há relação linear negativamente perfeita. Caso a correlação seja igual a zero, então os dados não estão relacionados.

Para os ativos essa medida estatística tem grande influência, se dois ativos têm uma correlação positiva, seus preços se movem na mesma direção. Quando se monta uma carteira de investimentos a correlação deve ser reconhecida, é o que Harry Markowitz explora em sua teoria.

## 4.5 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS

No mercado financeiro a incerteza sempre está presente. Ao montar um portfólio o investidor sempre deseja ter o maior retorno possível. Se esta fosse a única preocupação, bastava procurar o ativo com maior rentabilidade, entretanto sempre há um risco envolvido ao retorno, e estes apresentam certa proporção.

Para Markowitz, uma carteira deveria ter mais do que um conjunto de bons ativos, ela deveria ser equilibrada, e *diversificada*, o que significa que o capital investido deveria estar em diferentes ativos para que a incerteza acerca a evolução futura dos ativos fosse reduzida. Para otimizar uma carteira, a Teoria Moderna de Portfólios visa o maior lucro possível e a com a redução dos riscos.

O retorno de um portfólio é dado por:

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_gR_g.$$

No qual:

$R_p$  é a taxa de retorno de um portfólio em um período;

$R_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) é a taxa de retorno do ativo  $i$  no período;

$w_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) é peso do ativo  $i$  no portfólio;

$g$  é o número de ativos no portfólio.

O retorno esperado de um portfólio, com ativos arriscados, é dado por:

$$E(R_i) = p_1R_1 + p_2R_2 + \dots + p_mR_m.$$

onde:

$m$  é a taxa de retorno possível para o ativo  $i$ ;

$p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é a probabilidade da taxa de retorno  $j$  ocorrer para o ativo  $i$ ;

$n$  é o número de possíveis ocorrências da taxa de retorno.

Quando um risco é sistemático, não é possível diminuí-lo através da diversificação, pois ele afeta o mercado como um todo. No entanto, se um risco é não sistemático, aquele que está associado a um setor específico, é possível ser reduzido buscando investir em diferentes setores.

Por exemplo, supondo que uma carteira seja formada por ativos dos setores A e B, por algum motivo, que não era possível se ter previsão, o setor B sofreu uma desvalorização, mas esta não impacta em A. Aquele que investiu terá uma perda menor do que se tivesse concentrado todo o capital em ativos de um único departamento.

Apesar de ser uma estratégia válida investir em setores econômicos diferentes, a Teoria proposta por Markowitz vai além. Para se constituir um portfólio de maneira a ter menores perdas, é analisado o risco dos ativos que o compõem e como eles se correlacionam. O risco de um portfólio pode ser calculado pela sua variância  $V$ , a qual depende da covariância de pares de ativos:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g w_i w_j \sigma_{ij}. \quad (55)$$

Em que:

$g$  é o número de ativos no portfólio.

$w_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) é peso do ativo  $i$  no portfólio;

$w_j$  ( $j = 1, \dots, g$ ) é peso do ativo  $j$  no portfólio;

$\sigma_{ij}$  é a covariância entre o par de ativos  $i$  e  $j$ , caso  $i = j$  é a variância.

Enquanto o retorno de uma carteira diversificada é dado pela média ponderada de seus ativos, o risco da carteira depende da covariância entre os pares de ativos, a qual por sua vez depende da correlação entre os ativos. Assim, quando dois ou mais ativos pouco relacionados compõem uma carteira

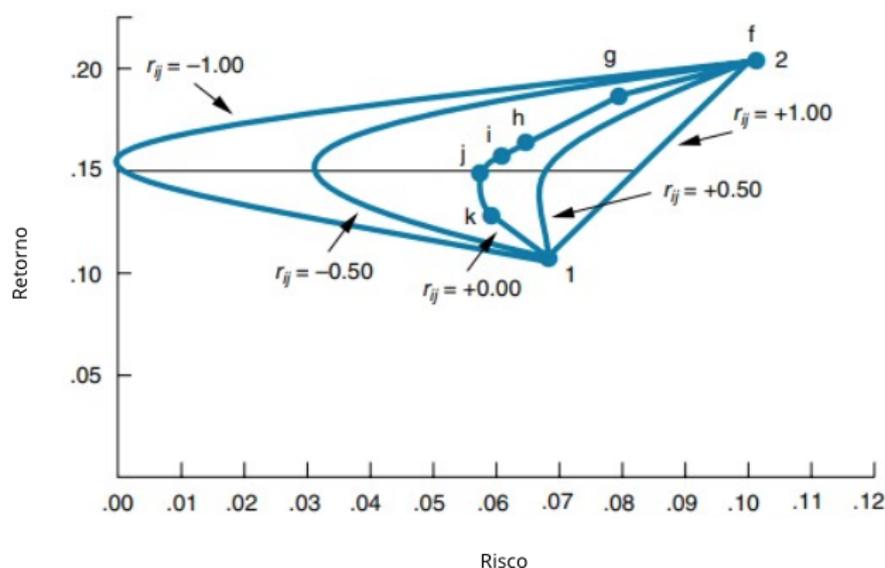
de investimentos consegue-se um risco menor que a média ponderada dos riscos individuais, conseguindo algumas vezes um risco menor que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo (JUNIOR; PAMPLONA; MONTEVECHI, 2002).

#### 4.6 FRONTEIRA EFICIENTE

A correlação entre dois ativos impacta o risco e o retorno de uma carteira. Em uma carteira com dois ativos, quando estão em perfeita correlação positiva (ou seja,  $r_{xy} = 1$ ) o retorno segue o mesmo padrão, se um deles está sendo desvalorizado significa que o outro também está diminuindo. Para uma carteira de investimentos em que se busca diversidade isso não oferece uma melhora significativa.

Se os dois ativos tiverem perfeita correlação negativa, enquanto um ativo está sendo desvalorizado o outro está sendo valorizado, e pode-se reduzir o risco à zero. No entanto, esse é um cenário utópico. A Figura 14 ilustra risco e o retorno para as diversas composições possíveis entre dois ativos. É possível observar a ausência de risco quando  $r_{xy} = -1$ .

Figura 14 – Correlação entre os ativos A e B.



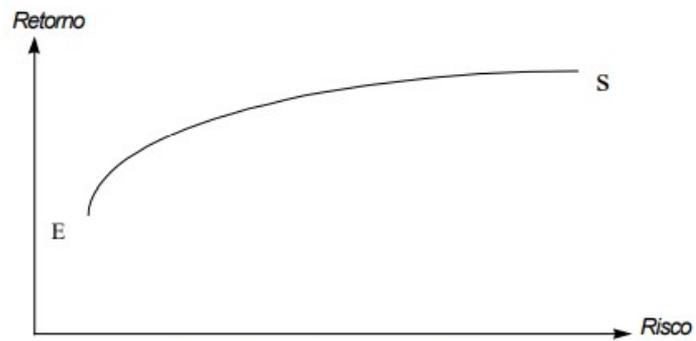
Fonte: Reilly et al,(2002 p.226).

Quanto menor a correlação entre os ativos, menor o risco para a carteira (REILLY; BROWN, 2002).

É possível observar na Figura 14 que para uma dada correlação menor que 1, as composições diversas da carteira entre os dois ativos forma uma curva, existindo um ponto E o qual é o portfólio de mínima variância, localizado mais à esquerda do gráfico. As opções de composição entre os ativos abaixo desse ponto E devem ser descartadas, isso porque apresentam um mesmo risco que outros portfólios, mas com o retorno reduzido, o que não é interessante para um investidor. Também há um ponto S, e representa o máximo retorno. Todos os pontos entre E e S formam a chamada *fronteira eficiente*, assim como mostra a Figura 15 (HIEDA; ODA, 1998).

Na Teoria Moderna de Portfólios, também conhecida como modelo média-variância, as vari-

Figura 15 – Fronteira Eficiente.



Fonte: HIEDA; ODA, (1998, p. 4).

ações positivas em torno da média significam risco para a carteira, por essa razão a teoria apresenta algumas premissas que o tornam menos eficiente. O modelo utiliza o desvio padrão como medida única do risco e uma distribuição normal para os retornos, o que nem sempre é satisfeito na prática (FREITAS; SANTIAGO; CARVALHO, S., 2023).

## 5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para a formulação do nosso problema de otimização, decidimos empregar o modelo *Downside Risk*. Essa abordagem é particularmente relevante para nós, pois se concentra na minimização dos riscos de perdas em vez da volatilidade total. Além disso, incorporamos médias móveis como um componente chave na definição das variáveis ou restrições do modelo, permitindo-nos suavizar flutuações e identificar tendências.

### 5.1 DOWNSIDE RISK

A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz impactou de forma positiva a economia e das finanças, modificando a forma em que investidores constituem suas carteiras de investimentos. Um marco tão importante para a economia teve por consequência o desenvolvimento de novos estudos baseados em seus princípios, assim como o modelo *Downside Risk*. A expansão do modelo é conhecido como Teoria Pós-Moderna de Portfólio, do inglês *Post Modern Portfolio Theory* (PMPT).

No modelo matemático da teoria de Markowitz são consideradas as variações de um ativo como risco, sejam elas positivas ou negativas. No modelo Downside Risk apenas as variações negativas são consideradas, ou seja, apenas as oscilações abaixo da média que representam perda ao investidor são consideradas.

Para o retorno de um ativo, as distribuições de probabilidade podem ser descritas como curvas assimétricas ou simétricas em relação à média das amostras. Diferente do modelo de Markowitz considera apenas distribuições simétricas, supondo uma distribuição de frequência normal (Gaussiana) dos retornos, o modelo PMPT considera as distribuições assimétricas a também as simétricas (VALVERDE, 2019).

O risco de um portfólio neste modelo passa a ser considerado como a semivariância, não mais a variância em sua totalidade. Oscilações positivas não representam perda do capital investido, isto porque significa que o retorno do ativo está acima da média histórica do período, o que significa maior retorno ao investidor.

Seja  $z_i$  a diferença entre uma amostra e a média, ou seja,  $z_i = x_i - \bar{x}$ , considerando apenas as variações de um ativo que estão abaixo da média, tem se que:

$$\min \{z_i, 0\} = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i < 0; \\ 0, & \text{se } z_i \geq 0. \end{cases} \quad (56)$$

Assim, a semivariância  $\zeta$  de  $n$  amostras é dada por :

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n}. \quad (57)$$

A abordagem *Donside Risk* pode reduzir o risco, mantendo ou melhorando o retorno esperado através da semivariância (ROM; FERGUSON, 1993).

Tem-se que a semicovariância ( $\Omega_{ij}$ ) entre dois ativos, ou semivariância quando  $i = j$  é dada por (FREITAS JUNIOR, 2022):

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\min(r_{it}, 0) \min(r_{jt}, 0)]. \quad (58)$$

Dessa forma, são descartados os valores acima de 0 como risco.

## 5.2 MÉDIAS MÓVEIS

O mercado está sempre oscilando, sem seguir um padrão bem definido. Essa mudança pode ser gerada por diversos fatores. Nesse sentido, a utilização de médias móveis é muito frequente, pois permite que os dados sejam analisados conforme suas mudanças em um determinado período. Seu uso para simular a compra e venda de ativos pode trazer resultados satisfatórios, pois se trata de uma estratégia simples e objetiva (WAGNITZ; PARTYKA; LANA, 2021).

Médias móveis são o que o próprio nome indica: médias de preço que se deslocam no tempo. Esse deslocamento acontece devido à entrada de novos preços e conseqüentemente à saída de preços mais antigos (MATSURA, 2013).

Figura 16 – Gráfico preço x média móvel.



Fonte: MATSURA (2013, p. 83).

Tendo em vista as oscilações de um ativo em um determinado período, as médias móveis atuam como uma maneira de diminuir os ruídos de um gráfico, na Figura 16 pode ser observado que enquanto a curva do preço oscila o tempo todo, mudando sua direção diversas vezes, a curva da média móvel (vermelha) é bem mais comportada, o que auxilia na determinação de uma tendência.

As médias móveis são divididas entre simples, ponderada e exponencial, sendo a primeira a soma das cotações em um período dividido pelo número destes períodos, a segunda dá pesos aos preços (sendo maiores para os mais recentes e menores para os preços mais antigos) e a última atribui um peso que cresce exponencialmente do preço mais antigo ao mais recente. Quando um ativo é mais volátil é recomendado usar a média ponderada ou exponencial (MATSURA, 2013).

Há uma Tendência Alta quando a curva de preços está acima da média móvel, o que indica um momento de **compra**. Caso contrário, quando os preços estiverem abaixo da média, há uma Tendência Baixa, que indica ser um momento de **venda**. O cruzamento entre as curvas, no momento em que a linha de preço cruza a linha da média de cima para baixo, é um sinal de venda, por outro lado, quando cruza de baixo para cima é um sinal de compra.

Essa análise do cruzamento para saber qual é o melhor momento para a compra e venda de um ativo também pode ser feita através de duas médias com períodos diferentes. Dessa maneira são evitados "falsos" cruzamentos, causados pela grande oscilação da curva de preços, que nem sempre significam que ocorrerá uma reversão na tendência de preços.

No entanto, há uma limitação nesse método, pois a média móvel acompanha as oscilações do gráfico com um certo atraso, que pode causar desvantagens no momento da tomada de decisão para compra e venda de um ativo. Utilizar as médias móveis em períodos menores pode minimizar esse atraso.

### 5.3 PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

A Programação Quadrática é uma extensão da Programação Linear, e consiste na minimização de uma função  $f$  quadrática sujeita a restrições lineares (DENNIS; SCHNABEL, 1996).

Esse tipo de problema é considerado um dos mais simples na área de otimização não linear. Frequentemente, aparece como um subproblema para auxiliar na resolução de problemas não lineares mais complexos (CARVALHO, S. M. S. d., 2007).

Um problema de programação quadrática pode ser equacionado na forma a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + q^T \mathbf{x} \\ \text{s a} \quad & A \mathbf{x} = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{59}$$

onde  $P$  é uma matriz quadrada,  $(n \times n)$ , simétrica,  $q$  é um vetor  $n$ -dimensional, cujas componentes são os coeficientes dos termos lineares na função objetivo.

Como na programação linear, as variáveis de decisão são denotadas pelo vetor coluna  $n$ -dimensional  $x$ , e as restrições são definidas por uma matriz  $A$   $(m \times n)$  e por um vetor  $m$ -dimensional  $b$ .

A programação linear é um caso particular da programação quadrática, onde  $P = 0$ , tendo assim uma função objetivo linear.

Para esse trabalho, optou-se para realizar a minimização do risco de uma carteira com  $N$  ativos, através do modelo *Downside Risk*, que pode ser expressa matematicamente através do PPQ:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \Omega_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^N w_i r_i = \mu \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{60}$$

Onde  $w_i$  é o peso percentual de um ativo,  $\Omega_{ij}$  é a semicovariância entre os ativos,  $r_i$  a taxa de retorno do ativo e  $\mu$  o retorno esperado para o portfólio.

### 5.4 CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Selecionar ações para uma carteira de investimentos é um processo complexo que envolve análise, estratégia e, muitas vezes, o uso de ferramentas de otimização. Não existe uma fórmula única, mas sim

uma combinação de abordagens que podem ser adaptadas ao perfil e aos objetivos do investidor.

Para a construção de uma carteira de investimentos, a diversificação dos setores econômicos foi o primeiro critério para a escolha dos ativos que a compõem.

Uma das estratégias utilizadas para a escolha dos ativos foi a do renomado investidor Luiz Barsi. Ele opta por escolher ações de setores que tenham maior estabilidade e segurança, a seleção desses se baseia na premissa de que eles oferecem serviços e produtos essenciais à sociedade, o que garante uma demanda constante e estável ao longo do tempo (OLIVEIRA *et al.*, 2023).

Os setores escolhidos por Barsi são conhecidos por serem perenes, ou seja, apresentam baixa volatilidade: Bancos, Elétrico, Saneamento, Seguridade e Telecomunicações. Estes dão origem ao nome "método BESST", o qual influenciou na escolha dos ativos que compõem a carteira.

A lista dos ativos pode ser conferida na Tabela 2. Alguns setores foram repetidos, como a dependência entre empresas de setores similares tende a ser grande, a análise da correlação proposta pela Teoria Moderna de Portfólios torna-se muito importante.

Este portfólio apresenta uma seleção robusta de 31 empresas listadas na bolsa de valores brasileira (B3), caracterizando-se por uma ampla diversificação setorial e uma mescla de perfis de risco/retorno. Uma das características portfólio é sua extensa diversificação setorial. Ele abrange 18 setores econômicos distintos, o que é fundamental para a diminuir o risco não-sistemático (risco específico da empresa ou setor). A variedade de setores ajuda a proteger o portfólio de choques setoriais, pois o desempenho negativo em uma área pode ser compensado por um bom desempenho em outra.

O portfólio inclui uma quantidade significativa de empresas confiáveis e empresas líderes em seus respectivos setores, conferindo uma base de solidez e confiabilidade, como:

- Bancos: Itaú Unibanco, Bradesco, Banco do Brasil;
- Consumo: Ambev, Raia Drogasil;
- Recursos Naturais: Petrobras, Vale;
- Indústria/Tecnologia: WEG, Totvs;
- Celulose: Suzano, Klabin.

A presença dessas empresas, muitas com histórico de lucro consistente e pagamento de dividendos, torna o portfólio atraente para investidores que buscam estabilidade e/ou renda passiva.

É importante ressaltar os diferentes tipos de investidores: arrojado, moderado e conservador. Como esse trabalho busca verificar a aplicação matemática no mercado financeiro de forma a minimizar os riscos de um portfólio, torna-se interessante trabalhar com o investidor arrojado, pois está sujeito a maiores riscos por investir em ativos com maior volatilidade visando maior retorno.

Embora a diversificação setorial reduza o risco específico, o portfólio ainda está exposto aos riscos sistêmicos do mercado brasileiro (políticos, macroeconômicos) e à volatilidade de setores cíclicos. A tolerância a risco do investidor deve estar alinhada com essas características.

Merece atenção a alocação em cinco empresas do setor de energia elétrica. Apesar de compartilharem o mesmo segmento, a presença delas em diferentes regiões do Brasil e suas distintas características operacionais (geração, transmissão, distribuição) promovem uma diversificação intrassetorial. São elas:

Tabela 2 – Ativos financeiros selecionados para compor a carteira de investimentos

<b>Empresa</b>	<b>Código de negociação</b>	<b>Setor econômico</b>
Ambev	ABEV3	Bebidas
Banco Bradesco	BBDC4	Bancos
Banco do Brasil	BBAS3	Bancos
BB Seguridade Participações	BBSE3	Seguros
Boa Safra Sementes	SOJA3	Agronegócio
Caixa Seguridade	CXSE3	Seguros
Copel	CPLE6	Energia Elétrica
CPFL Energia	CPFE3	Energia Elétrica
Embraer	EMBR3	Aeroespacial
Eneva	ENEV3	Energia Elétrica
Equatorial Energia	EQTL3	Energia Elétrica
Iguatemi	IGTI11	Shopping Centers
Itaú Unibanco	ITUB4	Bancos
Klabin	KLBN11	Papel e Celulose
Localiza	RENT3	Transporte (Locação de Veículos)
Marfrig	MRFG3	Alimentos (Proteína Animal)
Petróleo Brasileiro (Petrobras)	PETR4	Petróleo e Gás
PetroRio	PRIO3	Petróleo e Gás
Raia Drogasil	RADL3	Farmacêutico
Sabesp	SBSP3	Saneamento
Sanepar	SAPR4	Saneamento
Suzano	SUZB3	Papel e Celulose
Taesa	TAEE11	Energia Elétrica
Taurus Armas	TASA4	Indústria de Armamentos
Telefônica Brasil	VIVT3	Telecomunicações
Totvs	TOTS3	Tecnologia
Ultrapar	UGPA3	Varejo (Gás e Combustíveis)
Unipar	UNIP6	Químicos
Vale	VALE3	Mineração
Vibra Energia	VBBR3	Varejo de Combustíveis
WEG	WEGE3	Máquinas e equipamentos

Fonte: A autora.

- Copel (CPLE6): Geração, transmissão e distribuição de energia no Paraná. Empresa de capital misto, com controle estatal.
- CPFL Energia (CPFE3): Principalmente distribuição de energia em São Paulo e Rio Grande do Sul; também possui geração e transmissão. Empresa privada.
- Eneva (ENEV3): Foco em exploração e produção de gás natural e geração termelétrica em diversas bacias e estados. Não é uma distribuidora ou transmissora típica.
- Equatorial Energia (EQTL3): Holding com forte atuação em distribuição de energia no Norte, Nordeste, Sul (RS), Amapá e Goiás; também tem transmissão e saneamento.
- Taesa (TAEE11): Focada exclusivamente em transmissão de energia elétrica nacionalmente. Segmento de receita previsível e baixa volatilidade.

## 5.5 IMPLEMENTAÇÃO

Para realizar a otimização da carteira, foi inicialmente desenvolvido um algoritmo em *Python*, baseado na análise das Médias Móveis Exponenciais (MME), com o objetivo de avaliar a permanência ou

venda de ativos na carteira. Essa abordagem permitiu filtrar os ativos segundo sinais gerados pelas MME, integrando assim critérios quantitativos para a decisão de alocação.

Dada uma lista de ativos a serem analisados, escolhemos dois períodos para calcular as Médias Móveis Exponenciais : 9 e 72 períodos. Quando a MME de curto prazo (9 períodos) cruzava a MME de longo prazo (72 períodos) de cima para baixo, isso sinalizava uma oportunidade de compra. Por outro lado, quando a MME de curto prazo cruzava a MME de longo prazo de baixo para cima, isso indicava uma oportunidade de venda.

O algoritmo contou com o pacote *yfinance*, o qual exporta dados diretamente do *Yahoo! Finance* (YAHOO FINANCE, s.d.), uma plataforma online que contém, diversas informações e notícias sobre o mercado financeiro. Através desse pacote, dada uma ação e um período é possível extrair automaticamente dados sobre seu preço no mercado de ações. Como as MME dão um peso maior aos dados mais recentes, para análise dos preços de ações, isso a torna mais sensível às mudanças recentes.

O algoritmo em pseudocódigo é fornecido.

---

**Algoritmo 1:** Estratégia de Cruzamento de MMEs

---

**Entrada :** Lista de símbolos dos ativos

**Saída :** Listas de ativos para compra e venda

**1. Preparação**

Definir os períodos das MMEs:

    MME Curta  $\leftarrow$  9 dias

    MME Longa  $\leftarrow$  72 dias

**2. Para cada ativo na lista**

**Obter dados:**

        Baixar preços históricos de fechamento.

**Calcular MMEs:**

        Calcular MME Curta e MME Longa.

**Identificar último sinal:**

        Percorrer os dados do mais antigo ao mais recente:

**if** MME Curta cruza MME Longa de BAIXO para CIMA **then**

        └ SinalAtivoAtual  $\leftarrow$  COMPRA

**else if** MME Curta cruza MME Longa de CIMA para BAIXO **then**

        └ SinalAtivoAtual  $\leftarrow$  VENDA

**3. Classificação final**

**if** SinalAtivoAtual = COMPRA **then**

        └ Adicionar ativo na lista de compra

**if** SinalAtivoAtual = VENDA **then**

        └ Adicionar ativo na lista de venda

**4. Resultado**

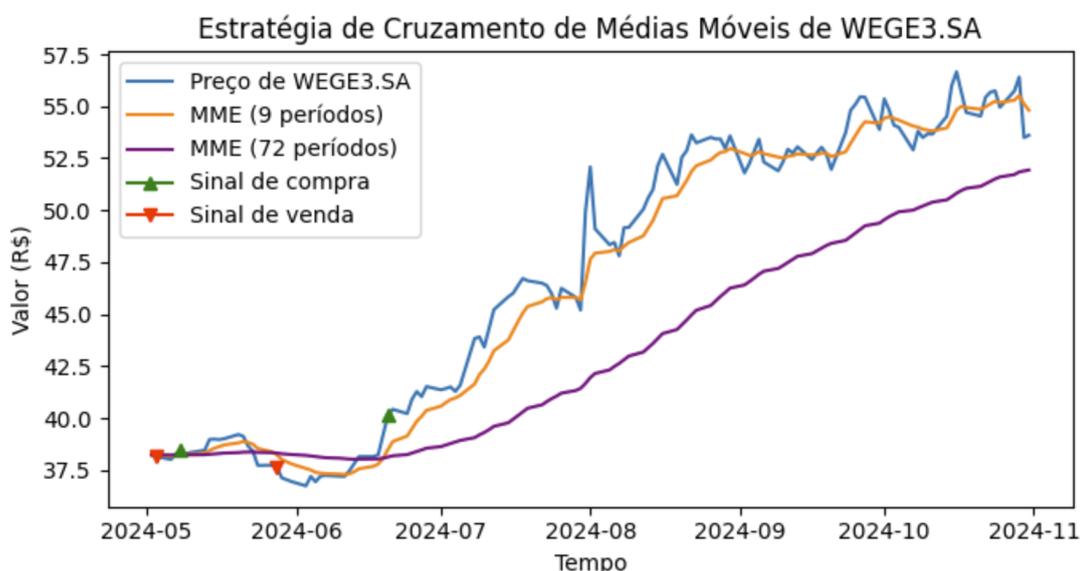
└ Apresentar as listas de compra e venda

---

Após a identificação dos pontos de compra e venda ao longo do histórico de preços dos ativos, o programa gerou gráficos que destacam visualmente esses eventos: sinais de compra em verde e de venda em vermelho. A Figura 17 apresenta um exemplo dessa visualização para o ativo WEGE3, que integrou

a carteira no segundo semestre de 2024.

Figura 17 – Gráfico resultante do algoritmo de MMQ.



Fonte: A autora.

Com base na análise metódica dos cruzamentos das Médias Móveis Exponenciais, o portfólio era separado em dois grupos distintos de ativos: primeiro compreendia as ações que, segundo os indicadores técnicos avaliados, estavam em um momento de compra. Em contrapartida, o segundo grupo era composto por ações que haviam atingido seu 'momento de venda', um sinal de que as condições de mercado para esses ativos estavam se desvalorizando.

É crucial lembrar que, embora as médias móveis sejam ferramentas valiosas, elas são indicadores de atraso, o que significa que reagem a movimentos de preço passados e não preveem o futuro. Por isso, é fundamental utilizá-las em conjunto com uma boa gestão de risco, para tomar decisões de investimento mais informadas e robustas para o portfólio.

Para saber o peso percentual de cada ativo que compõem a carteira, foi utilizado o pacote *cvxopt* da linguagem computacional *Python*. Esse pacote resolve problemas de programação quadrática através de *solvers*, em que é permitido que se defina os coeficientes da função objetivo, as restrições e as matrizes diretamente no programa.

Conforme a equação (61), na função objetivo tem-se que  $P$  é a matriz simétrica das semicovariâncias dos ativos e  $q$  é um vetor nulo (nesse problema não há termos lineares na função objetivo).

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + q^T \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & G \mathbf{x} \leq h \\ & A \mathbf{x} = b. \end{aligned} \quad (61)$$

As matrizes  $G$  e  $h$  representam as restrições de desigualdade, que incluem a não negatividade e o peso máximo de cada ativo, e  $A$  e  $b$  representam as restrições de igualdade, especificando que a soma dos pesos deve ser 100% e que o portfólio deve ter um determinado retorno médio.

---

Por fim, a etapa final do algoritmo resolve o problema de programação quadrática (61) utilizando o *cvxopt.solvers.qp*.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para cada período de aplicação do algoritmo, foi definido um novo PPQ, que manteve a formatação padrão, sendo ajustado de acordo com o número  $N$  de ações disponíveis no momento da aquisição. Para a resolução dos problemas de programação quadrática modelados para cada um dos períodos, foi utilizado um computador com processador Intel Core i7 quad-core de 3,5GHz com 32GB de memória RAM e sistema operacional macOS Ventura 13.7.4.

O peso percentual de cada ativo é dado pelo vetor  $w$ :

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}. \quad (62)$$

O objetivo é *minimizar* o risco da carteira de investimentos, o qual é medido através da matriz  $\Omega$  de semicovariância, determinada para cada período.

Para as restrições do problema, tem-se que a soma de todos os pesos percentuais deve ser igual a 100%, conforme a equação (63), onde  $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)$ .

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1 \quad \text{ou} \quad w^T \vec{1} = 1. \quad (63)$$

No modelo de programação quadrática adotado, o parâmetro  $\mu$  representa a expectativa de retorno da carteira de investimentos. Considerando uma meta de retorno anual de 20%, isso corresponde aproximadamente a 1,53% ao mês.

A restrição de não negatividade é dada por uma matriz identidade de ordem  $N$ , multiplicada por  $-1$  para que fique no padrão de resolução do PPQ conforme a equação (64).

$$-I_N w \leq 0. \quad (64)$$

A fim de assegurar a plena utilização do capital, foi estabelecido um limite máximo de peso para cada ativo. Considerando que, em certas circunstâncias, o valor de  $N$  (número de ativos elegíveis, determinado pelas médias móveis) poderia ser reduzido, foram definidas as seguintes diretrizes: para  $N \leq 5$ , o peso máximo individual por ativo foi fixado em 25%; para  $N > 5$ , o peso máximo foi de 15%.

### 6.1 PERÍODO I

Para determinar o investimento ideal em cada ativo, a primeira etapa foi analisar os momentos de compra e venda usando o código de Médias Móveis Exponenciais.

Para fundamentar a análise das médias móveis e identificar os pontos de compra e venda, foram coletados os preços diários de fechamento dos 31 ativos selecionados na carteira de investimentos. A janela de tempo para essa coleta abrangeu um ano completo, iniciando em 1º de novembro de 2022 e finalizando em 1º de novembro de 2023. Com base nos resultados gerados pelo algoritmo, foram identificados 14 ativos, dispostos na Tabela 3.

Tabela 3 – Ações em momento de compra I.

N	Ticker
1	BBAS3
2	BBSE3
3	CPLE6
4	CXSE3
5	PETR4
6	PRI03
7	SAPR4
8	SBSP3
9	SOJA3
10	SUZB3
11	UGPA3
12	VALE3
13	VBBR3
14	VIVT3

Fonte: A autora.

Conforme a análise das médias móveis exponenciais, as ações indicadas para venda podem ser encontradas na Tabela 4.

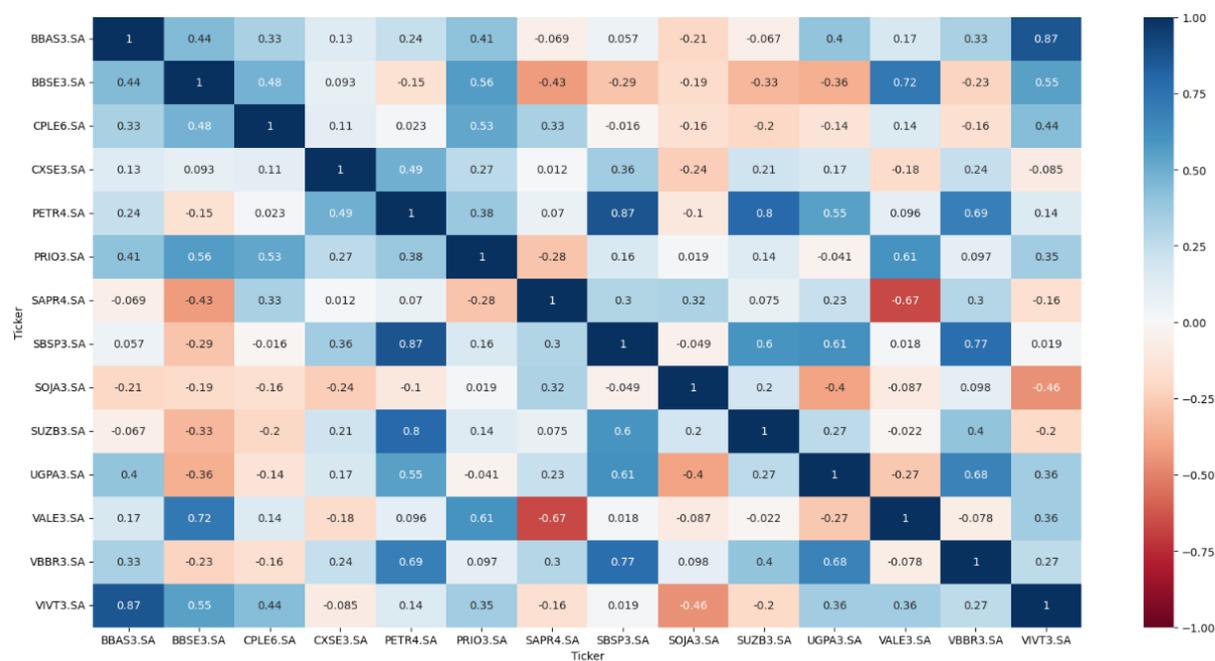
Tabela 4 – Ações em momento de venda I.

N	Ticker
1	ABEV3
2	BBDC4
3	CPFE3
4	EMBR3
5	ENEV3
6	EQTL3
7	IGTI11
8	ITUB4
9	KLBN11
10	MRFG3
11	RADL3
12	RENT3
13	TAE11
14	TASA4
15	TOTS3
16	UNIP6
17	WEGE3

Fonte: A autora.

A seleção dos ativos revela uma preferência do modelo por empresas consolidadas em setores estratégicos, como energia (*CPLE6*, *PETR4*, *PRI03*), saneamento (*SAPR4*, *SBSP3*) e commodities (*VALE3*, *SUZB3*). Esse padrão pode ser explicado pela maior estabilidade e tendência de valorização desses papéis no período analisado. Por outro lado, diversos ativos recomendados para venda pertencem ao setor financeiro e de consumo, como *ABEV3*, *ITUB4* e *BBDC4*, o que pode indicar um momento de correção ou realização de lucros nesses setores. A presença de ações como *WEGE3* entre os sinais de venda, apesar de sua boa performance histórica, sugere que o critério técnico adotado pelo algoritmo (como cruzamentos de médias móveis) prioriza movimentos de curto prazo em detrimento de fundamentos. Esses resultados reforçam a importância de combinar técnicas quantitativas com análise qualitativa na construção de carteiras de investimentos.

Figura 18 – Correlação Período I



Fonte: A autora

A correlação entre os ativos selecionados pode ser conferida na Figura 18.

A matriz de semicovariância ( $\Omega_1$ ) das 14 ações identificadas no período I como em momento de compra foi calculada pelo algoritmo. Com o objetivo de alinhar os dados e o retorno esperado, os valores de fechamento mensais foram obtidos da série histórica do ano anterior até 1º de novembro de 2023.

A Matriz 6.1 exibe os valores de  $\Omega_1$ .

$$\Omega_1 = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0,0096 & 0,0133 & 0,0097 & 0,0023 & 0,0110 & 0,0247 & 0,0101 & 0,0140 & 0,0005 & 0,0209 & 0,0190 & 0,0262 & 0,0242 & 0,0088 \\ 0,0133 & 0,1767 & 0,1549 & 0,0257 & 0,0273 & 0,1858 & 0,0060 & 0,0667 & 0,0145 & 0,0071 & 0,0090 & 0,2025 & 0,0872 & 0,0176 \\ 0,0097 & 0,1549 & 0,1708 & 0,0389 & 0,0369 & 0,1896 & 0,0323 & 0,0917 & 0,0350 & 0,0478 & 0,0006 & 0,1710 & 0,0891 & 0,0145 \\ 0,0023 & 0,0257 & 0,0389 & 0,0143 & 0,0073 & 0,0459 & 0,0127 & 0,0282 & 0,0136 & 0,0138 & 0,0002 & 0,0224 & 0,0234 & 0,0037 \\ 0,0110 & 0,0273 & 0,0369 & 0,0073 & 0,0575 & 0,1058 & 0,0060 & 0,0425 & 0,0032 & 0,0970 & 0,0173 & 0,0662 & 0,0550 & 0,0093 \\ 0,0247 & 0,1858 & 0,1896 & 0,0459 & 0,1058 & 0,4147 & 0,0000 & 0,1423 & 0,0047 & 0,0871 & 0,0014 & 0,2337 & 0,2014 & 0,0338 \\ 0,0101 & 0,0060 & 0,0323 & 0,0127 & 0,0060 & 0,0000 & 0,0636 & 0,0453 & 0,0204 & 0,0554 & 0,0402 & 0,0000 & 0,0423 & 0,0091 \\ 0,0140 & 0,0667 & 0,0917 & 0,0282 & 0,0425 & 0,1423 & 0,0453 & 0,1686 & 0,0864 & 0,1250 & 0,0544 & 0,1387 & 0,1655 & 0,0121 \\ 0,0005 & 0,0145 & 0,0350 & 0,0136 & 0,0032 & 0,0047 & 0,0204 & 0,0864 & 0,1636 & 0,0608 & 0,0000 & 0,0708 & 0,0638 & 0,0003 \\ 0,0209 & 0,0071 & 0,0478 & 0,0138 & 0,0970 & 0,0871 & 0,0554 & 0,1250 & 0,0608 & 0,2692 & 0,0940 & 0,0998 & 0,1129 & 0,0084 \\ 0,0190 & 0,0090 & 0,0006 & 0,0002 & 0,0173 & 0,0014 & 0,0402 & 0,0544 & 0,0000 & 0,0940 & 0,1276 & 0,0214 & 0,0610 & 0,0065 \\ 0,0262 & 0,2025 & 0,1710 & 0,0224 & 0,0662 & 0,2337 & 0,0000 & 0,1387 & 0,0708 & 0,0998 & 0,0214 & 0,3331 & 0,1634 & 0,0276 \\ 0,0242 & 0,0872 & 0,0891 & 0,0234 & 0,0550 & 0,2014 & 0,0423 & 0,1655 & 0,0638 & 0,1129 & 0,0610 & 0,1634 & 0,2192 & 0,0266 \\ 0,0088 & 0,0176 & 0,0145 & 0,0037 & 0,0093 & 0,0338 & 0,0091 & 0,0121 & 0,0003 & 0,0084 & 0,0065 & 0,0276 & 0,0266 & 0,0102 \end{bmatrix} \cdot (65)$$

O retorno esperado de 1,53% ao mês é definido pela Equação (66), em que os índices das variáveis do vetor  $w$  e o retorno médio seguem respectivamente a ordem dos ativos na Tabela 3.

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \cdots & w_{13} & w_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,037994 \\ 0,009990 \\ 0,009967 \\ 0,037026 \\ 0,055013 \\ 0,031580 \\ 0,023077 \\ 0,001945 \\ 0,022862 \\ 0,003333 \\ 0,038310 \\ -0,012204 \\ 0,025205 \\ 0,026680 \end{bmatrix} = 1,53\%. \quad (66)$$

Dessa forma, tem-se o o primeiro PPQ a ser solucionado:

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \Omega_1 w \\ \text{s.a} \quad & w^T r = 1,53\% \\ & w^T \vec{1} = 1 \\ & -I_{14} w \leq 0 \\ & I_{14} w \leq \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,15 \\ \vdots \\ 0,15 \\ 0,15 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (67)$$

Através do algoritmo em *Python* com pacote **cvxopt.solvers.qp**, obteve-se o resultado para o primeiro período, apresentado na Tabela 5 .

Para simplificar, os pesos da carteira foram arredondados, omitindo-se valores inferiores a 0,01%.

## 6.2 PERÍODO II

Seis meses após a primeira coleta de dados, uma segunda análise foi conduzida na segunda semana de maio de 2024, mantendo a mesma estrutura metodológica da inicial. Ao executar o algoritmo com a lista completa dos ativos para a seleção de ações a serem vendidas, compradas ou mantidas, os resultados foram apresentados na Tabela 6.

A correlação entre os ativos selecionados é apresentada na Figura 19.

A nova análise, realizada seis meses após a primeira, revela tanto permanências quanto alterações na composição dos ativos recomendados para compra. Algumas ações, como *PETR4*, *PRIO3*, *SBSP3*, *SAPR4* e *VALE3*, aparecem novamente entre os selecionados, o que indica consistência no desempenho técnico desses ativos ao longo do tempo. Por outro lado, ativos como *WEGE3*, que anteriormente estavam entre os recomendados para venda, passaram a figurar na lista de compra, evidenciando uma possível

Tabela 5 – Peso dos ativos na Carteira I.

Ticker	Peso na carteira
BBAS3.SA	14,44 %
BBSE3.SA	14,98 %
CPLE6.SA	0 %
CXSE3.SA	0,03 %
PETR4.SA	0 %
PRIO3.SA	0 %
SAPR4.SA	15 %
SBSP3.SA	14,99 %
SOJA3.SA	4,69 %
SUZB3.SA	12,44 %
UGPA3.SA	0 %
VALE3.SA	8,43 %
VBBR3.SA	0 %
VIVT3.SA	15%
Total	100 %
Risco da carteira	0,02416 %

Fonte: A autora.

Tabela 6 – Ações em momento de compra II.

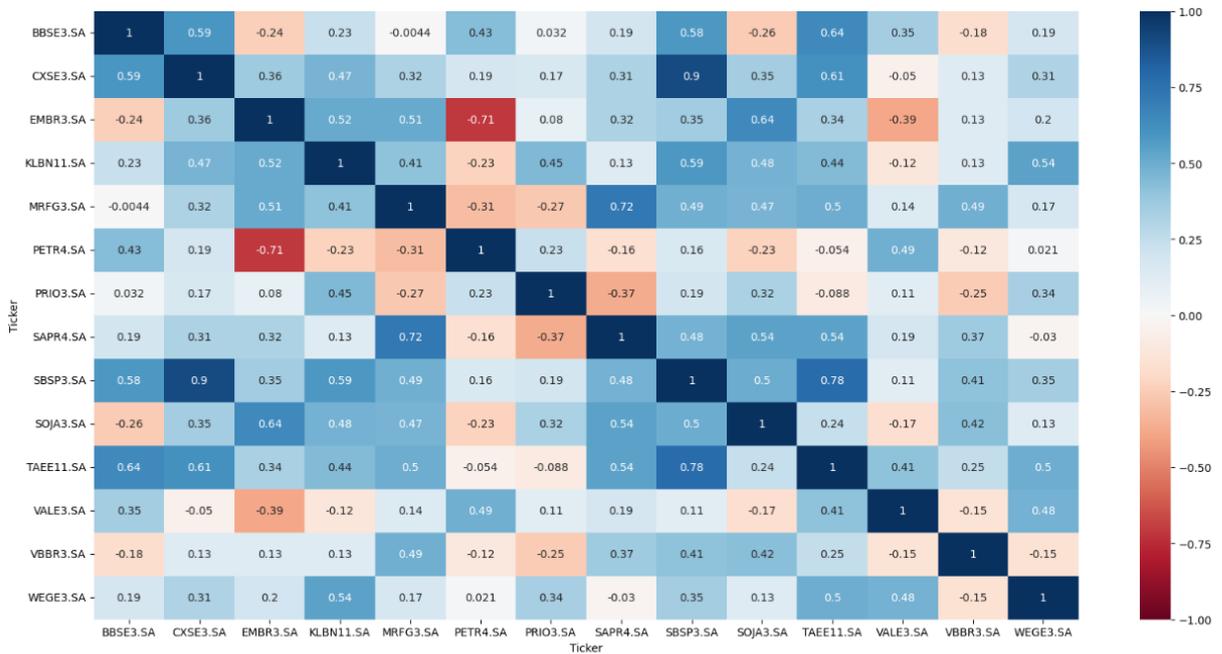
N	Ticker
1	BBSE3
2	CXSE3
3	EMBR3
4	KLBN11
5	MRFG3
6	PETR4
7	PRIO3
8	SAPR4
9	SBSP3
10	SOJA3
11	TAAE11
12	VALE3
13	VBBR3
14	WEGE3

Fonte: A autora.

reversão de tendência identificada pelo algoritmo. A Figura 19 apresenta a matriz de correlação entre os ativos selecionados neste segundo período. Nota-se que, em geral, os ativos apresentam correlações moderadas a altas, o que pode indicar certa concentração setorial ou sensibilidade comum a fatores macroeconômicos. Esse padrão reforça a importância de considerar medidas de diversificação e controle de risco na etapa de alocação de carteiras de investimentos.

A matriz de semicovariância para o segundo período ( $\Omega_2$ ) pode ser observada na Equação (68).

Figura 19 – Correlação Período II



Fonte: A autora

$$\Omega_2 = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0,0143 & 0,0040 & 0,0000 & 0,0234 & 0,0198 & 0,0037 & 0,0026 & 0,0187 & 0,0105 & 0,0070 & 0,0191 & 0,0155 & 0,0055 & 0,0327 \\ 0,0040 & 0,0109 & 0,0000 & 0,0325 & 0,0260 & 0,0076 & 0,0198 & 0,0127 & 0,0224 & 0,0287 & 0,0101 & 0,0002 & 0,0086 & 0,0320 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,1233 & 0,0000 & 0,0400 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0007 & 0,0000 & 0,0990 & 0,0006 & 0,0000 & 0,0007 & 0,0000 \\ 0,0234 & 0,0325 & 0,0000 & 0,1858 & 0,1629 & 0,0138 & 0,0624 & 0,0710 & 0,0960 & 0,0890 & 0,0726 & 0,0449 & 0,0689 & 0,1431 \\ 0,0198 & 0,0260 & 0,0400 & 0,1629 & 0,1647 & 0,0000 & 0,0236 & 0,0652 & 0,0720 & 0,0882 & 0,0556 & 0,0332 & 0,0475 & 0,1086 \\ 0,0037 & 0,0076 & 0,0000 & 0,0138 & 0,0000 & 0,0694 & 0,0624 & 0,0087 & 0,0324 & 0,0474 & 0,0139 & 0,0601 & 0,0477 & 0,0235 \\ 0,0026 & 0,0198 & 0,0000 & 0,0624 & 0,0236 & 0,0624 & 0,1940 & 0,0219 & 0,0909 & 0,1391 & 0,0575 & 0,0517 & 0,0790 & 0,1106 \\ 0,0187 & 0,0127 & 0,0007 & 0,0710 & 0,0652 & 0,0087 & 0,0219 & 0,0764 & 0,0261 & 0,0353 & 0,0567 & 0,0550 & 0,0329 & 0,0840 \\ 0,0105 & 0,0224 & 0,0000 & 0,0960 & 0,0720 & 0,0324 & 0,0909 & 0,0261 & 0,0808 & 0,0869 & 0,0397 & 0,0026 & 0,0628 & 0,0699 \\ 0,0070 & 0,0287 & 0,0990 & 0,0890 & 0,0882 & 0,0474 & 0,1391 & 0,0353 & 0,0869 & 0,2084 & 0,0529 & 0,0412 & 0,0575 & 0,1261 \\ 0,0191 & 0,0101 & 0,0006 & 0,0726 & 0,0556 & 0,0139 & 0,0575 & 0,0567 & 0,0397 & 0,0529 & 0,0838 & 0,0848 & 0,0512 & 0,1310 \\ 0,0155 & 0,0002 & 0,0000 & 0,0449 & 0,0332 & 0,0601 & 0,0517 & 0,0550 & 0,0026 & 0,0412 & 0,0848 & 0,2456 & 0,0282 & 0,1888 \\ 0,0055 & 0,0086 & 0,0007 & 0,0689 & 0,0475 & 0,0477 & 0,0790 & 0,0329 & 0,0628 & 0,0575 & 0,0512 & 0,0282 & 0,1049 & 0,0267 \\ 0,0327 & 0,0320 & 0,0000 & 0,1431 & 0,1086 & 0,0235 & 0,1106 & 0,0840 & 0,0699 & 0,1261 & 0,1310 & 0,1888 & 0,0267 & 0,3166 \end{bmatrix} \cdot (68)$$

A partir do retorno médio dos ativos, o retorno esperado da carteira é calculado em 1,53% ao mês. Os pesos, representados pelas variáveis do vetor  $w$ , correspondem à ordem dos ativos listados na Tabela 6. Estes compõem a Equação (69)

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \cdots & w_{13} & w_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.013043 \\ 0.042684 \\ 0.069174 \\ 0.008255 \\ 0.051785 \\ 0.043005 \\ 0.014363 \\ 0.031130 \\ 0.028318 \\ 0.051549 \\ -0.002110 \\ 0.010596 \\ 0.024913 \\ 0.004343 \end{bmatrix} = 1,53\%. \tag{69}$$

De tal forma, o segundo PPQ é definido de maneira similar ao primeiro.

Tabela 7 – Peso dos ativos na Carteira II.

Ticker	Peso na carteira
BBSE3.SA	15 %
CXSE3.SA	13,78 %
EMBR3.SA	0 %
KLBN11.SA	15 %
MRFG3.SA	0 %
PETR4.SA	0,01 %
PRI03.SA	14,97 %
SAPR4.SA	0 %
SBSP3.SA	0,01 %
SOJA3.SA	0 %
TAE11.SA	15 %
VALE3.SA	15 %
VBBR3.SA	11,23 %
WEGE3.SA	0 %
Total	100 %
Risco da carteira	0,02411 %

Fonte: A autora.

Os resultados obtidos para o segundo período, provenientes da minimização do risco, estão apresentados na Tabela 7.

### 6.3 PERÍODO III

Mantendo a consistência metodológica, a carteira foi otimizada pela última vez em 1º de setembro de 2024. As ações em momento de compra são listadas na Tabela 8.

A correlação entre os ativos selecionados é apresentada na Figura 20.

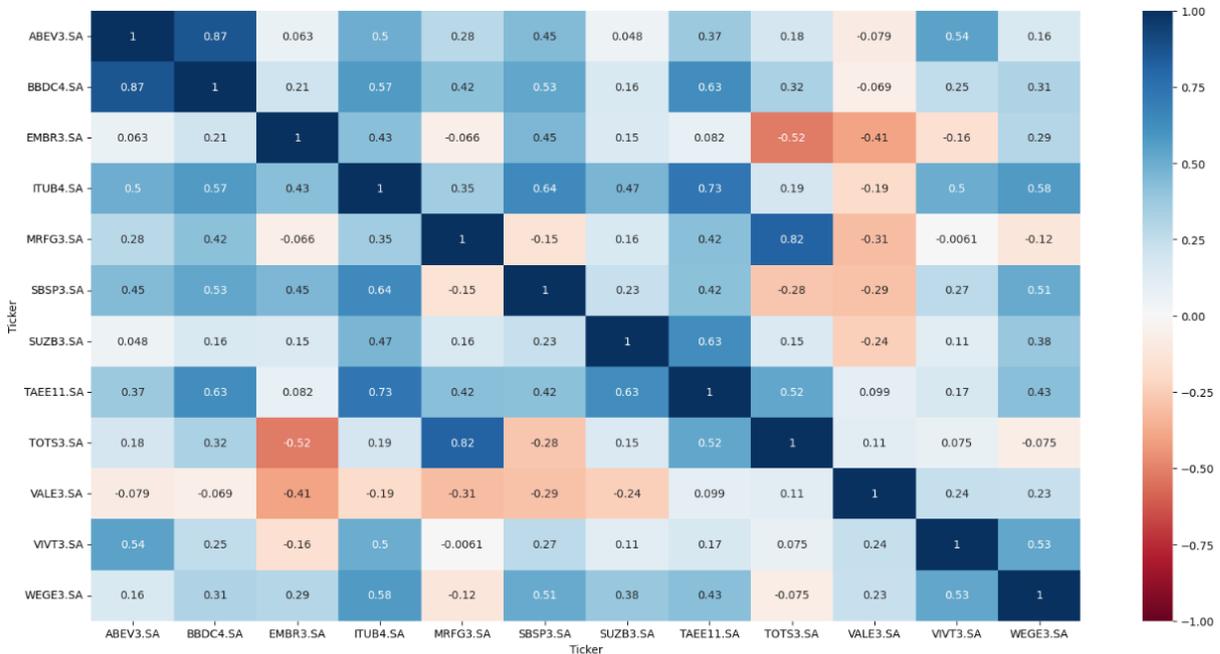
A matriz de semicovariância para o segundo período ( $\Omega_3$ ) pode ser observada na Equação (70)

Tabela 8 – Ações em momento de compra III.

N	Ticker
1	ABEV3.SA
2	BBDC4.SA
3	EMBR3.SA
4	ITUB4.SA
5	MRFG3.SA
6	Sbsp3.SA
7	SUZB3.SA
8	TAE11.SA
9	TOTS3.SA
10	VALE3.SA
11	VVT3.SA
12	WEGE3.SA

Fonte: A autora.

Figura 20 – Correlação Período III



Fonte: A autora

$$\Omega_3 = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0,0537 & 0,0905 & 0,0003 & 0,0352 & 0,0206 & 0,0422 & 0,0951 & 0,0231 & 0,0214 & 0,0194 & 0,0558 & 0,0235 \\ 0,0905 & 0,2694 & 0,0004 & 0,0597 & 0,0667 & 0,0910 & 0,1951 & 0,0809 & 0,0897 & 0,1020 & 0,0690 & 0,1264 \\ 0,0003 & 0,0004 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0003 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0352 & 0,0597 & 0,0000 & 0,0922 & 0,0852 & 0,0496 & 0,1014 & 0,0447 & 0,0477 & 0,0446 & 0,0768 & 0,0439 \\ 0,0206 & 0,0667 & 0,0000 & 0,0852 & 0,1733 & 0,0610 & 0,1276 & 0,0558 & 0,1288 & 0,0406 & 0,0543 & 0,0332 \\ 0,0422 & 0,0910 & 0,0000 & 0,0496 & 0,0610 & 0,0825 & 0,1462 & 0,0362 & 0,0285 & 0,0009 & 0,0525 & 0,0321 \\ 0,0951 & 0,1951 & 0,0000 & 0,1014 & 0,1276 & 0,1462 & 0,3728 & 0,0953 & 0,0979 & 0,0629 & 0,1211 & 0,1327 \\ 0,0231 & 0,0809 & 0,0000 & 0,0447 & 0,0558 & 0,0362 & 0,0953 & 0,0432 & 0,0538 & 0,0591 & 0,0367 & 0,0686 \\ 0,0214 & 0,0897 & 0,0000 & 0,0477 & 0,1288 & 0,0285 & 0,0979 & 0,0538 & 0,1813 & 0,1384 & 0,0768 & 0,0651 \\ 0,0194 & 0,1020 & 0,0003 & 0,0446 & 0,0406 & 0,0009 & 0,0629 & 0,0591 & 0,1384 & 0,2318 & 0,0943 & 0,1372 \\ 0,0558 & 0,0690 & 0,0000 & 0,0768 & 0,0543 & 0,0525 & 0,1211 & 0,0367 & 0,0768 & 0,0943 & 0,1319 & 0,0430 \\ 0,0235 & 0,1264 & 0,0000 & 0,0439 & 0,0332 & 0,0321 & 0,1327 & 0,0686 & 0,0651 & 0,1372 & 0,0430 & 0,1588 \end{bmatrix} \cdot \quad (70)$$

As variáveis do vetor  $w$  representam os pesos e sua ordem é consistente com a dos ativos listados na Tabela 8. Os retornos médios fazem parte da Equação (71)

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \cdots & w_{11} & w_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.001805 \\ -0.000205 \\ 0.081444 \\ 0.014728 \\ 0.050639 \\ 0.032586 \\ 0.016554 \\ 0.005734 \\ -0.007111 \\ -0.003509 \\ 0.009476 \\ 0.047933 \end{bmatrix} = 1,53\%. \quad (71)$$

Tabela 9 – Peso dos ativos na Carteira III.

Ticker	Peso na carteira
ABEV3.SA	15 %
BBDC4.SA	0 %
EMBR3.SA	10,95 %
ITUB4.SA	15 %
MRFG3.SA	0 %
SBSP3.SA	14,99 %
SUZB3.SA	0 %
TAE11.SA	15 %
TOTS3.SA	14,99 %
VALE3.SA	12,08 %
VIVT3.SA	1,99 %
WEGE3.SA	0 %
Total	100 %
Risco da carteira	0,02129 %

Fonte: A autora.

As 12 ações selecionadas e os resultados percentuais referentes ao terceiro PPQ estão apresentados na Tabela 9.

#### 6.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O retorno real obtido para ambas as carteiras, resultantes da resolução dos PPQs, foi calculado e comparado com o Índice Bovespa, popularmente conhecido como Ibovespa, o principal indicador do desempenho médio das cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores e do mercado de ações no Brasil.

Foi acompanhada a primeira carteira de 1º de novembro de 2023 até 10 de maio de 2024. O período de novembro de 2023 a maio de 2024 foi bastante dinâmico para o mercado de ações global, marcado por uma confluência de fatores que influenciaram o desempenho das bolsas.

Enquanto a carteira registrou retornos superiores a 1,53% em dezembro e março, os demais meses apresentaram rentabilidades inferiores, inclusive negativas, o que pode ser conferido na Tabela 10.

Tabela 10 – Retorno Mensal da Carteira (Novembro de 2023 - Maio de 2024).

<b>Mês/Ano</b>	<b>Retorno (%)</b>
Dezembro/2023	6,03%
Janeiro/2024	-1,65%
Fevereiro/2024	1,39%
Março/2024	1,59%
Abril/2024	-2,71%
Maió/2024	-3,25%

Fonte: A autora.

O retorno se refere ao ganho ou perda de um investimento em um período específico e único, já o retorno acumulado mede o desempenho total ao longo de vários períodos, incorporando o efeito dos juros compostos. É a forma mais precisa de ver quanto o investimento se alterou ao longo do tempo. Para a primeira carteira o retorno acumulado está detalhado na Tabela 11.

Tabela 11 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Novembro de 2023 - Maio de 2024).

<b>Mês/Ano</b>	<b>Retorno (%)</b>
Dezembro/2023	6,32%
Janeiro/2024	4,72%
Fevereiro/2024	6,18%
Março/2024	7,86%
Abril/2024	4,94%
Maió/2024	1,73%

Fonte: A autora.

A carteira sofreu uma desvalorização após março de 2024, no entanto ainda foi possível obter no final do período um retorno positivo. O que não aconteceu com o Ibovespa, que ficou abaixo de 0% com essa queda, conforme evidencia-se na Tabela 12.

Tabela 12 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Novembro de 2023 - Maio de 2024).

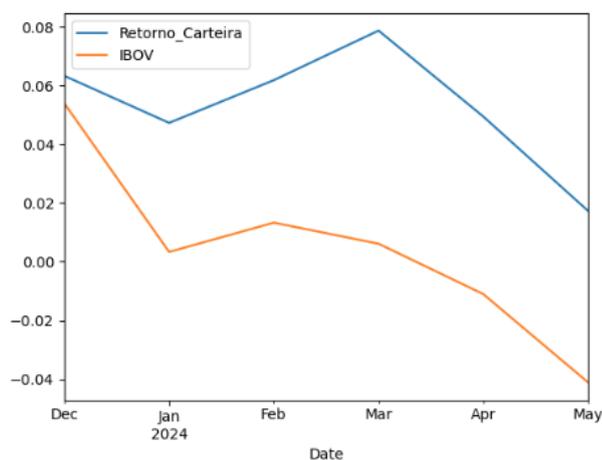
<b>Mês/Ano</b>	<b>Retorno (%)</b>
Dezembro/2023	5,38%
Janeiro/2024	0,33%
Fevereiro/2024	1,33%
Março/2024	0,61%
Abril/2024	-1,11%
Maió/2024	-4,11%

Fonte: A autora

A Figura 21 compara graficamente o desempenho da carteira de investimentos com o índice Bovespa, ambos calculados pelo algoritmo em Python.

Ao comparar o desempenho da carteira com o Ibovespa entre novembro de 2023 e maio de 2024, observa-se uma discrepância significativa. A carteira apresentou retornos mensais consistentemente superiores até março, com destaque para os meses de dezembro (6,32%) e março (7,86%). Mesmo nos meses subsequentes, em que houve uma desaceleração, em abril (4,94%) e maio (1,73%), a carteira manteve-se positiva. Por outro lado, o Ibovespa teve um desempenho mais modesto no primeiro trimestre de 2024 e passou a acumular perdas a partir de abril. O resultado negativo de maio (-4,11%) levou o índice a um retorno acumulado abaixo de zero no período, conforme mostra a Tabela 12.

Figura 21 – Comparação do retorno da carteira e o retorno do Ibovespa.



Fonte: A autora.

Essa divergência evidencia a efetividade da estratégia de seleção de ativos adotada pelo algoritmo. A abordagem técnica, centrada em indicadores como médias móveis exponenciais e reavaliação periódica da carteira, demonstrou capacidade de adaptação ao mercado, selecionando ativos menos suscetíveis às quedas generalizadas que impactaram o índice. A Figura 21 ilustra visualmente essa diferença de desempenho, reforçando a robustez da metodologia empregada.

Já para o segundo período os resultados não foram o esperado. Foi feita a análise de maio a novembro de 2024 seguindo os pesos da Tabela 7. Após agosto de 2024, observou-se uma queda nos retornos, um cenário que atingiu tanto a carteira otimizada (Tabela 13) quanto o Ibovespa (14). No entanto, a carteira otimizada não conseguiu superar o desempenho do próprio índice, o gráfico de desempenho pode ser observado na Figura 22.

Tabela 13 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Maio de 2024 - Novembro de 2024).

Mês/Ano	Retorno (%)
Junho/2024	1,66%
Julho/2024	5,63%
Agosto/2024	9,39%
Setembro/2024	6,89%
Outubro/2024	4,74%
Novembro/2024	3,12%

Fonte: A autora.

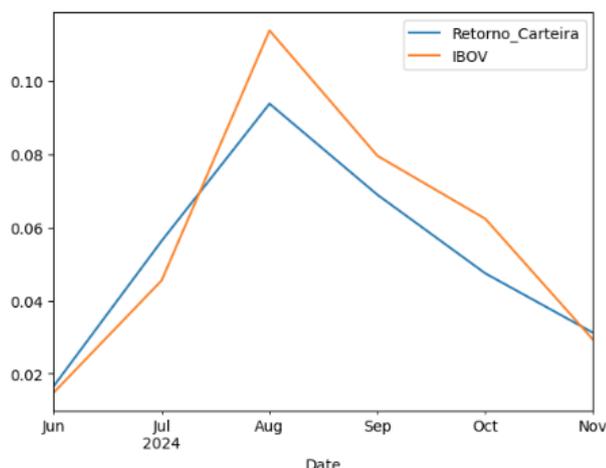
Tabela 14 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Maio de 2024 - Novembro de 2024).

Mês/Ano	Retorno (%)
Junho/2024	1,48%
Julho/2024	4,55%
Agosto/2024	11,39%
Setembro/2024	7,96%
Outubro/2024	6,24%
Novembro/2024	2,92%

Fonte: A autora

Diferentemente do primeiro semestre, no segundo período analisado (maio a novembro de 2024), a carteira otimizada não superou o desempenho do Ibovespa. Apesar de manter retornos positivos em

Figura 22 – Comparação do retorno da segunda carteira e o retorno do Ibovespa.



Fonte: A autora.

todos os meses (Tabela 13), seu crescimento foi inferior ao do índice em agosto, setembro e outubro, conforme evidenciado pela Tabela 14 e pela Figura 22. Essa diferença pode ser explicada por uma série de fatores. Em primeiro lugar, a seleção de ativos e os pesos definidos em maio refletiam o cenário e as tendências até aquele momento, o que pode ter limitado a capacidade de adaptação frente a mudanças abruptas nos meses seguintes. Além disso, o Ibovespa pode ter sido impulsionado por altas expressivas em ações com grande peso na sua composição, as quais não estavam incluídas na carteira otimizada. Por fim, a concentração setorial ou a elevada correlação entre os ativos selecionados pode ter reduzido o potencial de diversificação e diluição de risco, afetando o desempenho relativo da carteira.

Esses resultados reforçam a importância de revisões periódicas na alocação e da incorporação de mecanismos de adaptação no modelo, de forma a acompanhar as variações de mercado mais recentes e ajustar a carteira de maneira mais eficiente.

Tabela 15 – Retorno Acumulado Mensal da Carteira (Novembro de 2024- Maio de 2025).

Mês/Ano	Retorno (%)
Dezembro/2024	-4,73%
Janeiro/2025	2,16%
Fevereiro/2025	4,98%
Março/2025	8,62%
Abril/2025	17,09%
Mai/2025	20,81%

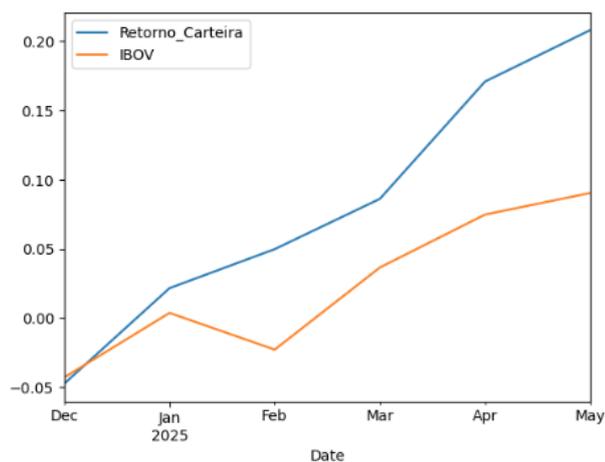
Fonte: A autora.

Tabela 16 – Retorno Acumulado Mensal do Ibovespa (Novembro de 2024- Maio de 2025).

Mês/Ano	Retorno (%)
Dezembro/2024	-4,29%
Janeiro/2025	0,37%
Fevereiro/2025	-2,28%
Março/2025	3,65%
Abril/2025	7,48%
Mai/2025	9,04%

Fonte: A autora

Figura 23 – Comparação do retorno da terceira carteira e o retorno do Ibovespa.



Fonte: A autora.

Para o último período, os pesos seguiram os valores obtidos no terceiro PPQ, expostos na Tabela 9. Essa carteira começou com um retorno negativo, mas foi se valorizando até o fim do período, fechando com valores acima do esperado. Os valores de retorno acumulado da carteira podem ser observados na Tabela 15 e do Índice Bovespa na Tabela 16.

O ano de 2024 envolveu muitas oscilações, momentos de alta e baixa, valorizações e desvalorizações. Já o início de 2025 tem apresentado um cenário mais amigável para o mercado de ações, altas em alguns setores e ações específicas, enquanto outros enfrentam desafios. Setores como energia elétrica e imobiliário têm apresentado resultados sólidos, enquanto o industrial tem enfrentado dificuldades.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diversos fatores podem influenciar o mercado de ações, gerando grande perda ou lucro para o investidor. A proposta deste trabalho foi buscar um meio, que baseado em dados históricos e parâmetros estatísticos tentasse buscar um caminho com menor risco.

Foi realizado um estudo dentro da Pesquisa Operacional baseado na Programação Quadrática, utilizando o modelo *Downside Risk* no processo de compra e vendas de ativos financeiros, de maneira a minimizar eventuais perdas. Os resultados mostram que a metodologia proposta produziu carteiras com desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco, demonstrando a importância do modelo.

A construção da carteira de investimentos se baseou na Teoria Moderna de Portfólios de Harry Markowitz, prezando pela diversidade, ao todo foram selecionados 31 ativos. Para identificar tendências e saber quais ativos comprar ou vender, foi aplicado o indicador estatístico médias móveis. Esse método auxilia na tomada de decisão, reduzindo impactos negativos na carteira.

A otimização da carteira pela teoria do Downside Risk possibilitou um filtro preciso, considerando apenas os retornos negativos como o risco efetivo à carteira de investimentos. Utilizar dessa técnica faz com que as oscilações positivas não sejam consideradas como risco e permitindo um estudo mais realista para o investidor.

Utilizar a linguagem de programação *Python* tornou o processo mais eficaz, importando dados históricos dos ativos de forma automática do site *Yahoo! Finance*, através da biblioteca *yfinance*. Essa automatização potencializa os resultados, facilitando a análise.

Embora o mercado de ações seja tradicionalmente associado a investidores com perfil arrojado, caracterizado por maior disposição a assumir riscos em busca de retornos mais elevados, a otimização proposta pode ser ajustada para atender a diferentes perfis. Em particular, um investidor de perfil mais conservador, por meio dos critérios do modelo, poderia estruturar uma carteira com menor exposição ao risco, priorizando ativos menos voláteis e privilegiando a preservação de capital, sem necessariamente abrir mão de oportunidades de retorno.

Os resultados mostraram que o modelo consegue orientar o investidor para qual caminho seguir. No primeiro período analisado, a carteira de investimentos mostrou um retorno superior ao índice Ibovespa, evidenciando a eficiência da seleção dos ativos feita pelo algoritmo.

Em contrapartida, o segundo período não obteve resultados tão superiores. Nos primeiros meses a carteira manteve um retorno superior ao Ibovespa, mas foi superada no decorrer da análise. Esse resultado nos revela dois pontos importantes, primeiro a necessidade de revisões periódicas, segundo que a matemática não é capaz de prever com precisão o que ocorrerá no mercado financeiro. O que a matemática nos permite é utilizar de suas ferramentas para identificar padrões e auxiliar nas decisões, suavizando as oscilações do mercado. A última carteira gerada pelo algoritmo foi satisfatória, destacando-se pela alta rentabilidade.

A resolução do problema de programação quadrática resultou na alocação de alguns ativos em uma porcentagem inferior a 0,01%. Se o capital investido for grande esse valor se torna significativo, caso contrário seu impacto será pequeno.

A fim de melhorar os resultados obtidos pelo modelo, buscando aproximá-lo à realidade onde o

---

mercado de ações apresenta enorme volatilidade, trabalhos futuros podem inserir uma nova restrição ao problema de programação quadrática: uma Restrição de Cardinalidade. Esta tem por objetivo impor um limite máximo de ativos presentes na carteira de investimentos, indicando quais títulos devem ser incluídos. Em alguns casos, pode haver uma exigência de incluir um número mínimo de ativos para garantir um certo nível de diversificação segundo a ideia de Markowitz.

## REFERÊNCIAS

- ARENALES, Marcos Nereu; ARMENTANO, Vinícius Amaral; MORABITO NETO, Reinaldo; YANASSE, Horacio Hideki. Pesquisa operacional, 2007.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. F. **Linear Programming and Network Flows**. second. New York: John Wiley & Sons - fourth edition, 2009.
- CARVALHO, Silvia Maria Simões de. **Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidroelétrico com manobras programadas**. [S.l.], 2007.
- DANTZIG, G. B. Linear programming. **Operation Research (Informs)**, 50 n.1, p. 42–47, 2002.
- DENNIS, John E.; SCHNABEL, Robert B. **Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations**. Philadelphia, PA: SIAM, 1996.
- FREITAS, CM; SANTIAGO, YV; CARVALHO, SMS. Downside Risk Aplicado a Carteiras de Ações Brasileiras Durante Período Pandêmico da COVID-19. **Trends in Computational and Applied Mathematics**, SciELO Brasil, v. 24, p. 557–574, 2023.
- FREITAS JUNIOR, Carlos Moraes de. Minimização do risco de carteiras de investimento através da programação linear e da teoria de Markowitz. Universidade Federal de São Carlos, 2022.
- HIEDA, Akinori; ODA, André Luiz. Um estudo sobre a utilização de dados históricos no modelo de Markowitz aplicado a Bolsa de Valores de São Paulo. **Seminários de Administração**, v. 3, p. 1998, 1998.
- INVESTIMENTOS, Toro. **Bolsa de Valores no Brasil: o que é e como funciona a B3?** [S.l.: s.n.], 2024. <https://www.toroinvestimentos.com.br/blog/bolsa-de-valores/bolsa-de-valores-no-brasil-o-que-e-e-como-funciona-a-b3>. Acessado em: 16/02/2024.
- JUNIOR, Cleber Gonçalves; PAMPLONA, EO; MONTEVECHI, José Arnaldo Barra. SELEÇÃO DE CARTEIRAS ATRAVÉS DO MODELO DE MARKOWITZ PARA PEQUENOS INVESTIDORES (COM O USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS). **IX Simpep**, 2002.
- LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. Reading: Addison-Wesley - fourth edition, 2015.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, p. 77–91, 1952.
- MATSURA, Eduardo. **Comprar ou Vender? Como Investir na Bolsa Utilizando Análise Gráfica**. 7ª. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. P. 168. ISBN 978-85-02-12576-6.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. Reading: LTC, 2009.

OLIVEIRA, Sidney Lino de; SOUZA, Cláudia Ariane Lima de;  
SILVA BENDER, Fábio Everton Alves da; RIBEIRO, Felipe Augusto Viegas;  
GOMES, Guilherme March; SAMPAIO FILHO, João Arcanjo. Estratégias de Investimento no Mercado de Capitais Métricas para uma Carteira de Investimentos com Foco em Dividendos sob a Ótica de Quatro Investidores Renomados: Luiz Barsi, Décio Bazin, Joel Greenblatt E Benjamin Graham. **Journal of Accounting Management Economics and Sustainability**, v. 1, n. 1, 2023.

REILLY, F. K.; BROWN, K. C. **Investment Analysis Portfolio Management**. [S.l.]: South Western College Pub, 2002.

ROM, Brian M; FERGUSON, Kathleen W. Post-modern portfolio theory comes of age. **The Journal of Investing**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 2, n. 4, p. 27–33, 1993.

SILVA, Rodrigo Borsatto Sommer da. Abordagem histórica da bolsa de valores. **Maiêutica-Estudos Contemporâneos em Gestão Organizacional**, v. 4, n. 1, 2016.

STEWART, James. **Cálculo - Volume 2**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2007. ISBN 9788522105933.

TAHA, Hamady A. **Operations research**. [S.l.]: Pearson, 2007.

VALVERDE, Catarina Salomé Dias. **Otimização de uma carteira internacional com base na semi-variância**. 2019. Tese (Doutorado).

WAGNITZ, Jefferson; PARTYKA, Raul Beal; LANA, Jeferson. Médias móveis como rastreador de tendências para investimentos no mercado de ações. **Desenvolve Revista de Gestão do Unilasalle**, v. 10, n. 3, p. 1–32, 2021.

YAHOO FINANCE. **Yahoo Finance - Dados de Mercado e Notícias Financeiras**. Disponível em: [https://finance.yahoo.com/?guccounter=1&guce\\_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce\\_referrer\\_sig=AQAAAJ3Kcrz\\_1JLl5sh1LyZQ\\_cM1rU-aZ3kKAONFKnMHbbY9Ir68N5rOUX25mKWY67VgoD7XTodaFQD3\\_MWYICbE1FycaUn9psErpxgUQvPL1tLG11JN782xBUHEveej0W74SIxXqkmBges1rlh8q3ofF2bk800](https://finance.yahoo.com/?guccounter=1&guce_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce_referrer_sig=AQAAAJ3Kcrz_1JLl5sh1LyZQ_cM1rU-aZ3kKAONFKnMHbbY9Ir68N5rOUX25mKWY67VgoD7XTodaFQD3_MWYICbE1FycaUn9psErpxgUQvPL1tLG11JN782xBUHEveej0W74SIxXqkmBges1rlh8q3ofF2bk800).