UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Campus Sorocaba

INCOMENSURÁVEIS: ABORDAGEM DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Déborah Favalli

Sorocaba
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Campus Sorocaba

INCOMENSURÁVEIS: ABORDAGEM DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Déborah Favalli

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 2/2024/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

DÉBORAH FAVALLI

INCOMENSURÁVEIS: ABORDAGEM DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 07 de fevereiro de 2024

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Paulo César Oliveira
Membro da Banca 2	Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu

Agradecimentos

Aos meus queridos pais, irmã e familiares, a presença e o companheirismo da nossa família tornaram esta jornada mais leve, e sinto-me honrada por ter uma família tão unida e presente. Vocês são minha base sólida, e não poderia ter alcançado este marco sem o amor e suporte incondicionais que me proporcionaram.

À minha mãe, meu pilar de força, agradeço pela dedicação e por ser minha inspiração. Ao meu pai, obrigada por tornar possível a realização deste sonho. À minha irmã, sou grata pela ajuda inestimável nos estudos.

Aos professores e funcionários da universidade, meu muito obrigado pela sólida formação. Um agradecimento especial aos colegas de turma, grandes amigos que tornaram os anos mais leves.

Ao Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela, meu orientador, sou grata pela confiança, paciência e contribuições fundamentais.

Resumo

Este trabalho aborda a construção dos conjuntos numéricos, dando maior ênfase nos números irracionais, de modo a analisar seu ensino na Educação Básica brasileira. A pesquisa inicia-se com uma revisão dos fundamentos históricos e conceituais dos números irracionais, destacando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. A análise dos livros didáticos do ensino básico revela abordagens superficiais e fragmentadas dos números irracionais, afetando a compreensão conceitual dos alunos. Também é discutida a importância de adotar uma abordagem histórico-epistemológica para contextualizar os números irracionais e evitar circularidade na definição dos números reais. Conclui-se que é necessário repensar o ensino dos números irracionais, buscando uma abordagem mais significativa e aprofundada, valorizando a formação dos professores e promovendo o uso de recursos tecnológicos e situações-problema para estimular a compreensão conceitual e a resolução de problemas matemáticos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Livros didáticos. Grécia Antiga. Números.

Abstract

This study addresses the construction of numerical sets, with particular emphasis on irrational numbers, in order to examine their teaching in Brazilian Basic Education. The research begins with a review of the historical and conceptual foundations of irrational numbers, highlighting the discovery of incommensurables in Ancient Greece. The analysis of basic education textbooks reveals superficial and fragmented approaches to irrational numbers, affecting students' conceptual understanding. The importance of adopting a historical-epistemological approach to contextualize irrational numbers and avoid circularity in the definition of real numbers is also discussed. It is concluded that the teaching of irrational numbers needs to be rethought, seeking a more meaningful and in-depth approach, valuing teacher training, and promoting the use of technological resources and problem situations to stimulate conceptual understanding and the solving of mathematical problems.

Keywords: Math Teaching. Textbooks. Ancient Greece. Numbers.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A escolha do tema relativo ao ensino de números irracionais foi motivada por uma sugestão de um professor do meu curso de graduação. A partir dessa sugestão, pude perceber mais claramente os problemas e inadequações presentes no sistema educacional atual no contexto da Educação Básica, que resultam em uma compreensão conceitual fragmentada e superficial por parte dos alunos. Como docente em formação, essa realidade não me é alheia. Durante meu próprio período de aprendizagem, deparei-me com obstáculos significativos na compreensão da complexidade inerente aos números irracionais. Agora, como professora, noto que enfrento desafios semelhantes ao tentar ensinar aos meus alunos sobre esse tópico importante, que é os números irracionais. Essa dificuldade que encontrei ao ensinar claramente aponta para a necessidade urgente de mudanças e melhorias na forma como essa parte da matemática é ensinada.

Além disso, percebi que muitos dos meus colegas de classe durante a graduação e até mesmo alguns professores da Educação Básica também tinham dificuldades com esse tópico. Isso, somado à leitura de trabalhos como os de Cidrão e Alves (2019), Corbo (2012), Duarte (2013) e Ferreira (2021), me fez refletir sobre como podemos melhorar o ensino desse conteúdo. Como professora em formação, sinto que é meu dever contribuir para o aperfeiçoamento da prática dos colegas docentes, especialmente no ensino de temas historicamente desafiadores como os números irracionais.

De acordo com Cidrão e Alves (2019), professores em formação inicial e continuada destacam os desafios significativos enfrentados no ensino dos conjuntos numéricos. Alguns pontos problemáticos incluem: a transição simplificada entre conjuntos; omissão de propriedades axiomáticas, especialmente relacionadas à representação algébrica; e diferenças fundamentais entre os conjuntos raramente abordadas. Essas questões apontam para deficiências na profundidade e abordagem crítica por parte dos professores do ensino básico e também dos professores formadores.

Corroborando essa perspectiva, Corbo (2012) enfatiza a importância de um preparo abrangente e contínuo de professores sobre números irracionais, dada a complexidade do tema. A autora propõe iniciar o estudo com questões sobre representação de segmentos, para desenvolver a compreensão visual e conceitual dos alunos. Jogos e aspectos pedagógicos, não somente técnicos, também são destacados como essenciais para uma assimilação significativa.

Similarmente, Duarte (2013) defende o uso de questões iniciais sobre infinito e tamanho de conjuntos para instigar a curiosidade e senso crítico dos alunos. Relações entre conjuntos numéricos e a introdução de irracionais por completude e cortes são outros pontos ressaltados.

Por outro lado, Ferreira (2021) propõe uma abordagem histórico-cultural, enfatizando o trabalho humano na construção do conhecimento matemático. Uma situação desencadeadora de aprendizagem contextualizada sobre a medida de $\sqrt{2}$ é sugerida para promover a compreensão de irracionais sob essa perspectiva.

Em síntese, os autores citados convergem sobre a necessidade de rever estratégias, conteúdos e formação docente no ensino de conjuntos numéricos e irracionais, buscando superar fragilidades e proporcionar aprendizagens mais significativas aos estudantes.

Utilizando uma abordagem histórico-cultural, é importante examinar as origens da Matemática nos esforços dos primeiros seres humanos para sistematizar noções de grandeza, forma e número. Inicialmente, o foco recai sobre o surgimento dos conceitos primordiais de número e do ato de contar.

Existem evidências arqueológicas (EVES, 2011) de que há uns 50 mil anos o homem já era capaz de contar. É pertinente admitir que, mesmo nas épocas mais primitivas, os humanos já possuiam uma noção intuitiva sobre contagem, e com a evolução gradativa das sociedades, as contagens simples passaram a ser inevitáveis.

A invenção dos números se deu sobre bases empíricas, correspondendo à preocupações de ordem prática e utilitária. Aqueles que possuiam rebanhos precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais estavam ali, os que estocavam ferramentas ou reservas alimentares precisavam verificar a quantidade de insumos ali armazenados (IFRAH, 1989). A partir desta necessidade, empregou-se o princípio de correspondência biunívoca, que possibilita comparar, com facilidade, duas coleções de objetos ou seres. Por exemplo, podia-se contar quantos carneiros haviam no rebanho fazendo-se ranhuras no barro, dando nós em uma corda ou separando pedrinhas no chão. Estas ações possibilitaram um senso numérico, que posteriormente promoveram o desenvolvimento teórico do conceito de número.

Segundo Eves (2011), conforme os povos foram se aprimorando foi desenvolvido um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um pequeno grupo, e para além disto, com o aperfeiçoamento da escrita foram surgindo símbolos para representar esses números.

Com o passar do tempo, tornou-se necessário efetuar contagens mais extensas, de modo que o processo de contar foi sistematizado. Para elucidar, é possível apresentar o método da seguinte maneira: inicialmente, o procedimento consiste em escolher um número b como base e atribuir nomes aos números $1, 2, ..., b$. Para os números maiores que b atribuíam-se combinações dos nomes dos números já escolhidos (EVES, 2011).

Os dedos do ser humano constituíam um conveniente dispositivo de correspondência, assim, o 10 era frequentemente escolhido como base para este método. Porém, outros números também serviram como bases primitivas, como por exemplo o sistema quinário que foi usado amplamente e, algumas tribos da América do Sul, até hoje contam com as mãos: "um, dois, três, quatro, mão, mão e um" e assim sucessivamente (EVES, 2011).

O presente trabalho tem como propósito descrever brevemente a construção dos conjuntos numéricos, abordando desde os números naturais até os irracionais, traçando um percurso pela História da Matemática e explorando os conceitos de comensurabilidade. Particular ênfase será dada ao conjunto dos números irracionais, buscando compreender a forma como este é abordado no contexto da educação básica. Para atingir este objetivo, adotamos uma metodologia de pesquisa bibliográfica e análise documental, assim, conduzimos um estudo sobre a apresentação deste conjunto numérico em livros didáticos e documentos oficiais.

Para tanto, em seguida, faremos uma breve contextualização sobre a matemática grega e um de seus principais precursores.

No segundo capítulo, são abordados os segmentos comensuráveis e a construção dos conjuntos numéricos, iniciando com uma breve exposição de conceitos básicos que serão úteis na compreensão da construção dos conjuntos.

O terceiro capítulo trata dos segmentos incomensuráveis, a construção do conjunto dos números irracionais e sobre a suposta crise dos pitagóricos.

Por fim, é apresentado os números irracionais na Educação Básica, onde, através da metodologia utilizada, realizamos uma avaliação crítica e uma análise sistemática de várias fontes de literatura acadêmica para sintetizar o conhecimento atual sobre o assunto em estudo. Recorremos a obras de autores como Pommer (2018), Pommer e Pommer (2012), e Broetto e Santos-Wagner (2019).

Pommer (2018) fornece um valioso insumo didático-epistemológico para o ensino de números irracionais. Em contraste, Pommer e Pommer (2012) proporcionam um olhar específico sobre os manuais didáticos para o ensino fundamental e médio. Por outro lado, Broetto e Santos-Wagner (2019) discutem os desafios que permeiam a instrução de números irracionais tanto na educação básica quanto na formação docente.

A síntese das análises desses autores representou um elemento crucial no alicerce deste trabalho, pois elas forneceram percepções significativas sobre as brechas existentes no ensino de números irracionais e potenciais aspectos de melhoria.

Capítulo 1

Contextualização Histórica

Neste capítulo, vamos discorrer brevemente a respeito dos escassos registros sobre a Matemática grega e, mais especificamente, sobre os pitagóricos e suas contribuições para a geometria grega a partir do desenvolvimento do conceito de número.

Não há registros de praticamente nenhum documento matemático ou científico preservado até o quarto século a.C., no que diz respeito à matemática grega. Diferentemente dos babilônios, os gregos utilizavam rolos de papiro para escrever suas obras, contudo, não foi usado até cerca de 450 a.C., uma vez que a tradição era transmitida apenas de forma oral.

O papiro era obtido de uma planta cultivada na região do delta do Nilo, no Egito. No entanto, os rolos de papiro eram extremamente frágeis e se rompiam facilmente, resultando em danos consideráveis com o uso frequente. Além disso, eles se deterioravam rapidamente devido às condições climáticas. Portanto, a única maneira de preservar as obras escritas era criar cópias frequentemente, no entanto, devido ao esforço e à necessidade de matéria-prima, as cópias eram feitas apenas para textos considerados de grande importância

É compreensível entender, portanto, por que nenhum outro texto matemático grego completo sobreviveu, além de *Os Elementos* de Euclides (325 a.C., 265 a.C.). O'Connor e Robertson (1999a) afirmam que *Os Elementos* é considerado um trabalho muito completo que tornou obsoletos os textos matemáticos mais antigos, logo ninguém continuaria a copiar outros textos mais antigos em novos rolos de papiro apenas para fins de preservação histórica.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), durante a segunda metade do quinto século houve uma difusão de obstinados relatos sobre vários matemáticos intensamente preocupados com problemas que formariam, posteriormente, a base da maioria dos desenvolvimentos na geometria.

Em seu livro, Eves (2011) nos apresenta que o Sumário Eudemiano de Proclo (411, 485), é a principal fonte de informações no que diz respeito aos primórdios da matemática grega até os tempos de Euclides. Proclo (411, 485) foi um filófoso grego que se tornou chefe da Academia de Platão (427 a.C., 347 a.C.) e é muito importante matematicamente pelos seus comentários sobre os trabalhos de outros matemáticos da época (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999c). Apesar de ter vivido mais de mil anos depois do início dessa matemática, durante o século V d.C., ele teve acesso a muitos trabalhos históricos que se perderam, dentre eles um resumo de uma história da geometria grega cobrindo o período anterior a 335 a.C. escrita por Eudemo (350 a.C., 290 a.C.), um discípulo de Aristóteles (384 a.C., 322 a.C.), daí o nome Sumário Eudemiano.

Os principais personagens destes relatos da origem da Matemática grega e, mais especificamente, da geometria grega são Tales de Mileto (624 a.C., 547 a.C.) que foi o primeiro filósofo, cientista e matemático grego conhecido, além de ser creditado com cinco teoremas de geometria elementar; e Pitágoras (570 a.C., 490 a.C.) frequentemente descrito como o primeiro matemático puro, foi um filósofo grego que fez desenvolvimentos importantes na matemática, na astronomia e na teoria da música. Para o presente trabalho focaremos na história de Pitágoras (570 a.C., 490 a.C.).

Pitágoras é uma figura um tanto quanto controversa e envolto de misticismo, de modo que não há como ter um grande grau de certeza a respeito das informações sobre sua vida. Acredita-se que Pitágoras nasceu por volta de 570 a.C. na ilha de Samos. Durante sua vida viajou pelo Egito e Babilônia ampliando seus conhecimentos matemáticos, astronômicos e também ideias religiosas. Ao retornar, Pitágoras emigrou para Crotona, uma colônia grega chamada Magna Grécia, onde hoje se localiza a Itália, pois Samos havia sido tomada pelo tirano Polícrates. Lá fundou sua escola pitagórica, uma sociedade secreta, com base nos estudos da filosofia, matemática e ciências naturais, cuja irmandade era fortemente unida pelos ritos secretos e cerimônias.

Os seguidores de Pitágoras que pertenciam a um círculo interno em sua sociedade eram conhecidos como *mathematikoi* (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999b), viviam permanentemente com a Sociedade, eram vegetarianos e não possuíam bens pessoais. Algumas das crenças que Pitágoras sustentava e que ensinava aos *mathematikoi* eram:

> 1. que, no nível mais profundo, a realidade é de natureza matemática,
> 2. que a filosofia pode ser usada para a purificação espiritual,
> 3. que a alma pode ascender à união com o divino,
> 4. que certos símbolos têm um caráter místico, significado, e
> 5. que todos os irmãos da ordem deveriam observar estrita lealdade e sigilo.
>
> (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999b).

O círculo externo da sociedade, composto tanto de homens quanto de mulheres, era conhecido como *acusmático*, eles moravam em casa própria, tinham permissão para possuir bens e não eram obrigados a ser vegetarianos.

Na antiguidade era frequente atribuir todo o crédito das descobertas ao mestre, e por se tratar de uma sociedade comunitária é difícil saber exatamente quais descobertas foram feitas pelo próprio Pitágoras e quais se deram através dos outros membros. Justamente por esse motivo, Boyer e Merzbach (2012) referem-se às contribuições dos pitagóricos e não apenas à obra de Pitágoras.

Certamente as contribuições da escola pitagórica são notáveis para a matemática, mas vale esclarescer em que sentido Pitágoras e os *mathematikoi* estavam estudando matemática. Diferente de um grupo de pesquisa atual, não haviam "problemas abertos" para serem resolvidos, o objeto de interesse de Pitágoras eram os princípios da matemática, o conceito de número, o conceito de triângulo e outras figuras matemáticas e a ideia abstrata de prova.

Segundo O'Connor e Robertson (1999b), Aristóteles uma vez escreveu sobre a percepção dos pitagóricos em relação aos números: "O pitagórico... tendo sido criado no estudo da matemática, pensava que as coisas são números... e que todo o cosmos é uma escala e um número". Pitágoras estudou propriedades de números que nos são familiar, como números pares e ímpares, números triângulares, números perfeitos entre outros. Por outro lado, Pitágoras acreditava que os números tinham personalidades, característica que não reconhecemos como parte da matemática.

O lema da escola pitagórica era "tudo é número", Roque e Pitombeira (2012) expõem muito bem a estima dos pitagóricos para com os números:

> Associadas a forças cósmicas, as propriedades dos números não podiam ser consequências lógicas de sua estrutura, o que banalizaria suas propriedades. A concepção de Pitágoras sobre a natureza parte da ideia de que há uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos, e esta explicação é dada pelos números. Isto levou os pitagóricos a considerarem que as coisas são números, elas consistem de números. Uma das características principais das coisas reside no fato de elas poderem ser organizadas e distinguidas. Sendo assim, as propriedades aritméticas das coisas constituem o seu ser propriamente dito, e o ser de todas as coisas é o número (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 54).

Este trecho acima, revelando a exaltação ao estudo dos números mostra que não só a matemática se relacionava com as exigências da vida prática, mas além disso, se conectava com o amor à sabedoria.

No próximo capítulo apresentamos a construção de alguns conjuntos numéricos pela perspectiva geométrica, a partir do conceito de segmentos comensuráveis, de modo que é possível perceber a beleza e o cuidado com que os antigos matemáticos tinham para com o desenvolvimento da matemática na época.

Capítulo 2

Segmentos Comensuráveis e Conjuntos Numéricos

Neste capítulo, ancoramos nossas discussões e explorações no trabalho de Dolce e Pompeo (2013). Esta obra nos oferece um robusto ponto de partida para apresentar conceitos básicos da geometria correlatos ao entendimento dos segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Utilizando a abordagem de Dolce e Pompeo, conseguimos demonstrar, de maneira pedagogicamente eficaz, como os fundamentos geométricos podem ser usados para elucidar propriedades dos conjuntos numéricos. Dessa forma, nos aprofundamos em conceitos como determinação da reta, segmentos, semirretas, congruência e etc.

2.1 Segmentos Comensuráveis

Antes de dar início ao conceito de segmentos comensuráveis, própriamente dito, faremos uma breve explanação de alguns conceitos básicos da geometria, visando uma maior compreensão do desenvolvimento do processo de medição de grandezas como condução à noção de número, mais especificamente à determinação do comprimento de um segmento de reta.

Começamos pelos 5 postulados de Euclides, que são descritos em *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009).

Axioma 2.1. *Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.*

Axioma 2.2. *Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.*

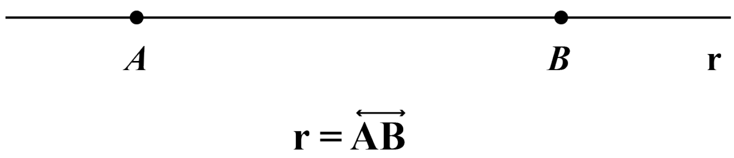
Axioma 2.3. *Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.*

Axioma 2.4. *Todos os ângulos retos são iguais.*

Axioma 2.5. *Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menos do que dois ângulos retos.*

Postulado 2.1 (Determinação da reta)**.** *Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.*

Figura 2.1: Determinação da reta.

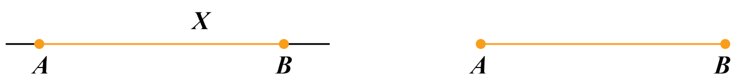


Fonte: Próprio autor.

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$.
Assim, $(A \neq B, A \in r, B \in r) \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$ (Figura 2.1).

Definição 2.1 (Segmento de reta)**.** Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Figura 2.2: Segmento de reta.



Fonte: Próprio autor.

Assim, dados A e B, $A \neq B$, indicamos o segmento de reta AB, como o que segue: $AB = \{A, B\} \cup \{X\}$ de tal forma que X está entre A e B (Figura 2.2).

Os pontos A e B são as extremidades do segmento AB e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento AB. Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento AB é um segmento nulo.

Definição 2.2 (Semirreta)**.** Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta $\overrightarrow{AB}$ (Figura 2.3).

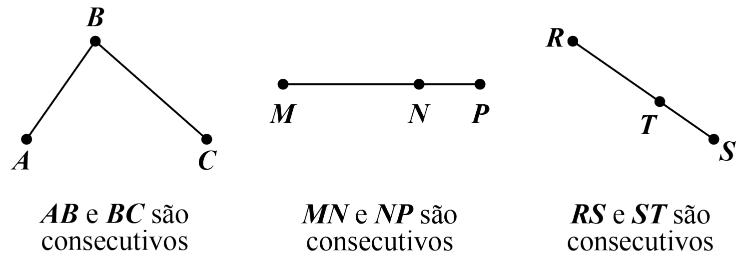
Figura 2.3: Semirreta.

Fonte: Próprio autor.

O ponto A é a origem da semirreta onde, $\overrightarrow{AB} = AB \cup \{X\}$ de forma que B está entre A e X.

Definição 2.3 (Segmentos consecutivos)**.** Dois segmentos de retas são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (Figura 2.4).

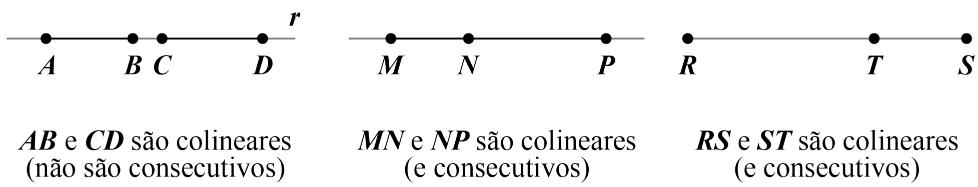
Figura 2.4: Segmentos consecutivos.



Fonte: Próprio autor.

Definição 2.4 (Segmentos colineares)**.** Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta (Figura 2.5).

Figura 2.5: Segmentos colineares.



Fonte: Próprio autor.

Definição 2.5 (Segmentos adjacentes)**.** Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade.

Figura 2.6: Segmentos adjacentes.

Fonte: Próprio autor.

Na Figura 2.6 temos dois casos, no primeiro MN e NP são adjacentes pois são segmentos consecutivos colineares, com somente o ponto N comum aos dois segmentos, logo $MN \cap NP = \{N\}$. No segundo caso temos que RS e ST não são adjacentes pois, apesar de serem segmentos consecutivos colineares, eles possuem pontos internos em comum, de modo que $RS \cap ST = ST$

Definição 2.6 (Congruência de segmentos)**.** A congruência de segmentos se trata de uma noção primitiva que é representada por este símbolo $\equiv$, e satisfaz as seguintes propriedades:

i) Reflexiva - todo segmento é congruente a si mesmo: $AB \equiv AB$

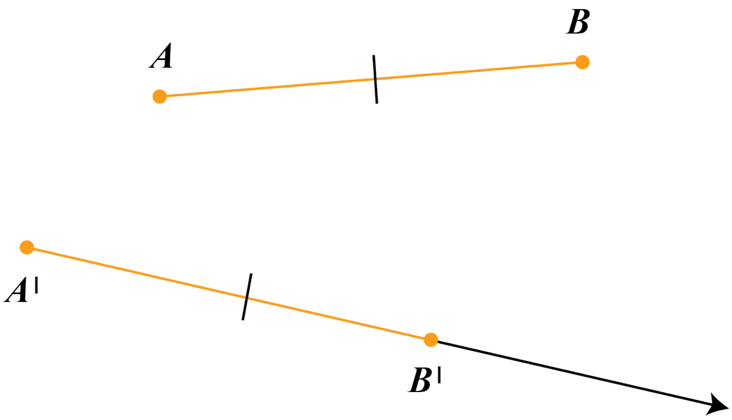
ii) Simétrica - se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$

iii) Transitiva - se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$

Axioma 2.6 (Transporte de segmentos)**.** *Dados um segmentos AB e uma semirreta de origem A', existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal qual $A'B'$ seja congruente a AB.*

Como podemos ver apresentado na Figura 2.7.

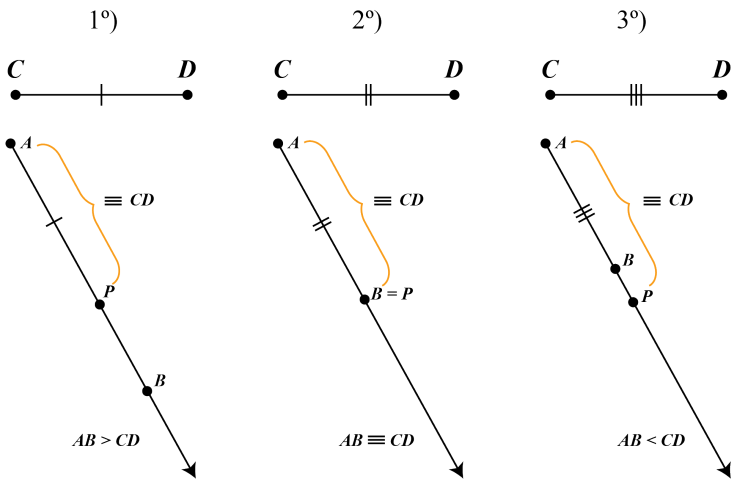
Figura 2.7: Transporte de segmentos.



Fonte: Próprio autor.

Definição 2.7 (Comparação de segmentos)**.** Dados dois segmentos, AB e CD, pelo axioma do transporte, podemos obter na semirreta $\overrightarrow{AB}$ um ponto P tal qual $AP \equiv CD$. Temos três casos a considerar (Figura 2.8):

Figura 2.8: Comparação de segmentos.



Fonte: Próprio autor.

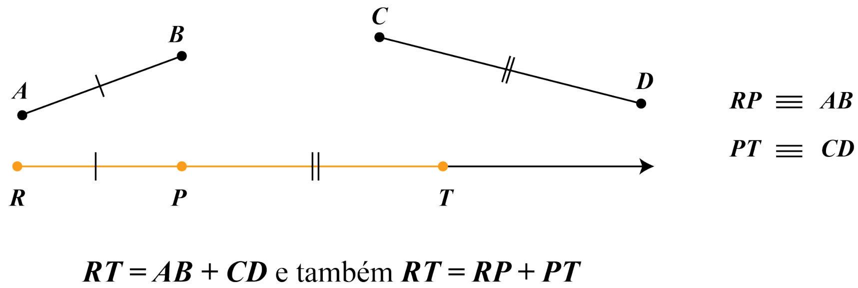
No primeiro caso, dizemos que AB é maior que CD ($AB > CD$), pois o ponto P está entre A e B.

No segundo caso, temos que AB é congruente a CD ($AB \equiv CD$), pois o ponto P coincide com B.

Por fim, temos o caso em que AB é menor que CD ($AB < CD$), pois o ponto B está entre A e P.

Definição 2.8 (Adição de segmentos)**.** Dados dois segmentos AB e CD, e tomando em uma semirreta qualquer de origem R os segmentos adjacentes RP e PT de forma que $RP \equiv AB$ e $PT \equiv CD$, dizemos que o segmento RT é a soma de AB com CD (Figura 2.9).

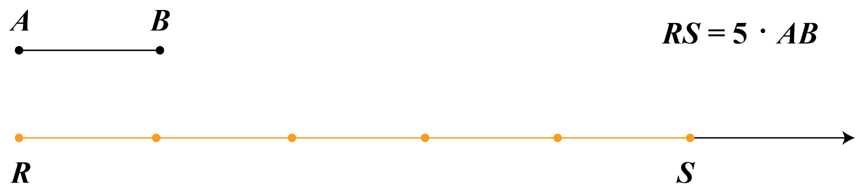
Figura 2.9: Adição de segmentos.



Fonte: Próprio autor.

Observamos que o segmento RS, que é a soma de n segmentos congruentes a AB, é *múltiplo* de AB segundo n ($RS = nAB$). Se ($RS = nAB$), dizemos que AB é *submúltiplo* de RS segundo n (Figura 2.10).

Figura 2.10: Múltiplo e submúltiplo, sendo $n = 5$.



Fonte: Próprio autor.

Definição 2.9 (Medida de um segmento)**.** Indicamos por $|AB|$ a medida do segmento AB. Quando este segmento for não nulo, temos que sua medida será um número real positivo associado ao segmento de modo que:

i) Segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes. $AB \equiv CD \Leftrightarrow |AB| = |CD|$

ii) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro. $AB > CD \Leftrightarrow |AB| > |CD|$

iii) A um segmento soma está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas. $RS = AB + CD \Leftrightarrow |RS| = |AB| + |CD|$

À medida de um segmento dá-se o nome de *comprimento* do segmento. Usando a notação moderna, podemos definir o comprimento, ou a medida, de um segmento, como exposto a seguir.

Seja "$\mathcal{S}$ " o conjunto de todos os segmentos, isto é $\mathcal{S} = \{AB \mid AB : \textit{segmento de reta}\}$, e "$\mathcal{X}$ " um conjunto numérico, por exemplo, de números naturais. Considerando a função:

$$\begin{array}{llcl} \text{m:} & \text{S} & \rightarrow & \text{X} \\ & \text{AB} & \mapsto & \text{m(AB)} = |\text{AB}|, \end{array}$$

observamos que os números de $\mathcal{X}$ são sempre positivos, o que será discutido nas próximas seções deste capítulo.

Axioma 2.7 (Eudóxio-Arquimedes)**.** *Dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro.*

Por este axioma e os conceitos de congruência, desigualdade e adição de segmentos, é possível estabelecer a razão entre dois segmentos quaisquer e, então, medir um deles tomando o outro como unidade de comprimento.

Assim, sejam os segmentos AB e CD, onde vamos considerar AB o segmento unitário, isto é, $|AB| = 1$. Daí $|CD| = \dfrac{|CD|}{|AB|}$.

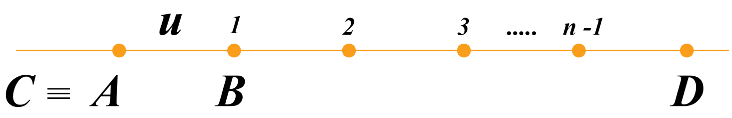
Realizada a retomada e melhor compreensão destes conceitos, podemos dizer que dois segmentos são considerados comensuráveis quando o comprimento de um pode ser expresso como um múltiplo inteiro do comprimento do outro, usando uma mesma unidade de medida. Portanto, a comensurabilidade entre segmentos depende da possibilidade de expressar suas medidas como uma razão de números inteiros, utilizando uma mesma unidade. A partir deste entendimento sobre comensurabilidade, podemos prosseguir para a construção dos conjuntos numéricos.

2.2 Conjunto dos Naturais

Tomemos um segmento de reta CD qualquer, e um segmento unitário $AB = u$, assim $|AB| = |u| = 1$.

Se decompormos o segmento CD, por $n-1$ pontos interiores, em n segmentos consecutivos, então a medida de CD será a soma das medidas desses n segmentos, como visto na Figura 2.11.

Figura 2.11: Decomposição do segmento.



Fonte: Próprio autor.

Logo, podemos dizer que CD é múltiplo de u e escrevemos $CD = nu$. Daí temos que $|CD| = n|u| \Rightarrow |CD| = n$.

Portanto, $|CD|$ é um número natural e, portanto, o conjunto dos números naturais, em notação moderna, é dado por "$\mathbb{N}$ ", ou seja, $\mathbb{N} = \{n \mid n = |CD|\}$.

Observamos que, se CD não é múltiplo de u, então CD não é um número natural, ou seja, $|CD| \notin \mathbb{N}$.

2.3 Conjunto dos Inteiros

Como comentado na Introdução, a noção dos números naturais foi desenvolvida gradativamente a partir da experiência cotidiana dos seres humanos com a contagem de objetos e quantidades. Os números racionais não negativos, por sua vez, emergiram a partir da necessidade de representar grandezas geométricas e medidas. No entanto, o desenvolvimento dos números inteiros negativos não foi tão direto ou imediato como aconteceu com os números naturais. A ideia de números negativos encontrou resistência e suspeita por parte dos matemáticos e filósofos gregos da época de Euclides (265 a.C.), uma vez que pareciam desafiar o senso comum e as noções convencionais de quantidade.

Segundo Medeiros e Medeiros (1992), entre os gregos, as regras de sinais apareceram implícitas em uma obra de Diofanto de Alexandria (200-284), que ficou conhecido como "pai da álgebra" e precursor da teoria dos números, mas a existência independente dos números negativos não foi claramente reconhecida, isto pois os gregos eram incapazes de ajustar tais números em sua geometria, não podendo representá-los por figuras.

De acordo com Milies e Coelho (2001), a possibilidade de dar diversas interpretações aos números negativos, fez com que eles fossem aceitos aos poucos pelos matemáticos. Gradualmente, a compreensão e aplicação dos números inteiros negativos foram se consolidando, e eles foram incorporados à matemática, permitindo uma ampliação das possibilidades de representação numérica e enriquecendo as ferramentas matemáticas disponíveis para resolver problemas mais complexos.

É possível construir o conjunto dos inteiros a partir do conjunto dos naturais aplicando-se a noção de equivalência, porém como apresentamos o desenvolvimento geométrico dos números naturais e não o algébrico, não seguiremos por este caminho. Em (MILIES; COELHO, 2001) é apresentado uma fundamentação axiomática para definir o conjunto dos números inteiros, dessa forma indicaremos a seguir estes axiomas e proposições.

No conjunto dos números inteiros, denotado modernamente por $\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$: *zahl* que significa 'número' em alemão, estão definidas duas operações, as quais chamamos de adição e multiplicação, denotadas por "+" e "·", respectivamente. Também está definida a relação que permite comparar os elementos do conjunto, a relação de ordem "menor ou igual" que indicamos por $\leq$.

Podemos descrever o primeiro grupo de axiomas que indicam algumas propriedades da soma.

Axioma 2.8 (Associativa). *Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que* $a + (b + c) = (a + b) + c$

Axioma 2.9 (Existência do Neutro). *Existe um único elemento, denominado 'neutro aditivo' ou 'zero', que indicaremos por 0, tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$*

Axioma 2.10 (Existência do Oposto). *Para cada inteiro a existe um único elemento que chamaremos oposto de a e indicaremos por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$*

Axioma 2.11 (Comutativa). *Para todo par a, b de inteiros tem-se que $a + b = b + a$*

Agora temos o grupo de axiomas que explicita algumas propriedades da multiplicação.

Axioma 2.12 (Associativa). *Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que $a(bc) = (ab)c$*

Axioma 2.13 (Existência do Neutro). *Existe um único elemento, diferente de zero, denominado 'neutro multiplicativo', que indicaremos por 1, tal que $1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$*

Axioma 2.14 (Cancelativa). *Para toda terna a, b, c de inteiros, com $a \neq 0$, tem-se que se $ab = ac$, então, $b = c$*

Axioma 2.15 (Comutativa). *Para todo par a, b de inteiros, tem-se que $ab = ba$*

Temos ainda um axioma que relaciona ambas operações.

Axioma 2.16 (Distributiva). *Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que* $a(b + c) = ab + ac$

A partir destes axiomas é fácil provar proposições em relação aos inteiros, veremos um exemplo com a Proposição 1.

Proposição 1 (Regra dos Sinais). *Sejam a e b inteiros. Então vale:*

(i) $-(-a) = a$

(ii) $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$

(iii) $(-a)(-b) = ab$

Prova. Inicialmente precisamos interpretar a Propriedade 2.10 da seguinte forma: o oposto de um elemento a é o único inteiro que verifica a equação $a + x = 0$.

Portanto, para provar (i) basta observar que a verifica a equação $(-a) + x = 0$. Consequentemente a é o oposto de $-a$, que por sua vez está indicado por $-(-a)$.

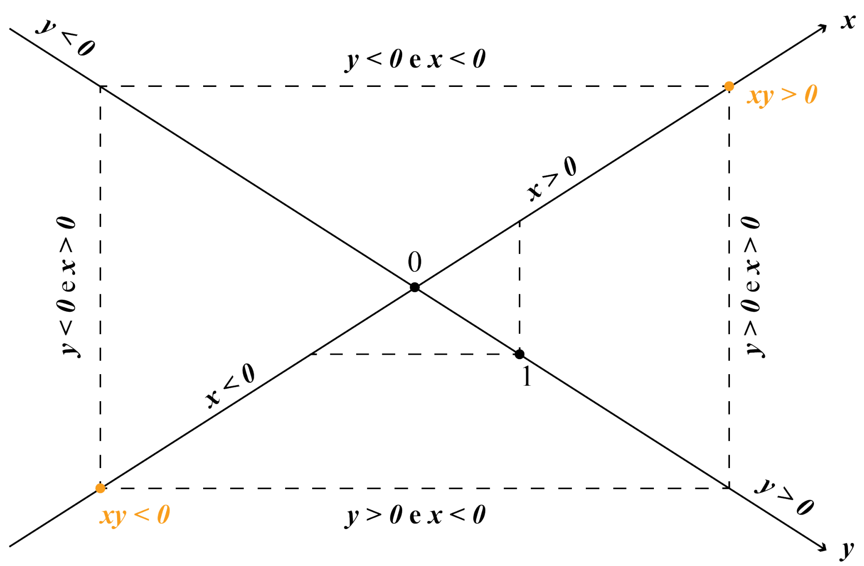
Utilizamos o mesmo racicínio para provar (ii). Para a primeira igualdade basta observar que $(-a)b$ é a solução de $ab + x = 0$, já que $ab + (-a)b = [(-a) + a]b = 0 \cdot b = 0$. De modo análogo, verifica-se que $ab + a(-b) = 0$.

Para (iii), podemos observar diretamente que aplicando (ii) temos:
$(-a) \cdot (-b) = -(a(-b)) = -(-(ab))$ e usando (i) no último termo segue que
$(-a)(-b) = ab$. □

Antes de dar continuidade às propriedades da relação "menor ou igual", vale apresentar, a fim de complementação, uma interpretação geométrica da Regra dos Sinais. A partir desta interpretação, representada na Figura 2.12, fica perceptível a seguinte relação ao se multiplicar "x" e "y":

$$\begin{gathered} x > 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow xy > 0 \\ x > 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow xy < 0 \\ x < 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow xy < 0 \\ x < 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow xy > 0 \end{gathered}$$

Figura 2.12: Regra dos Sinais - interpretação geométrica.

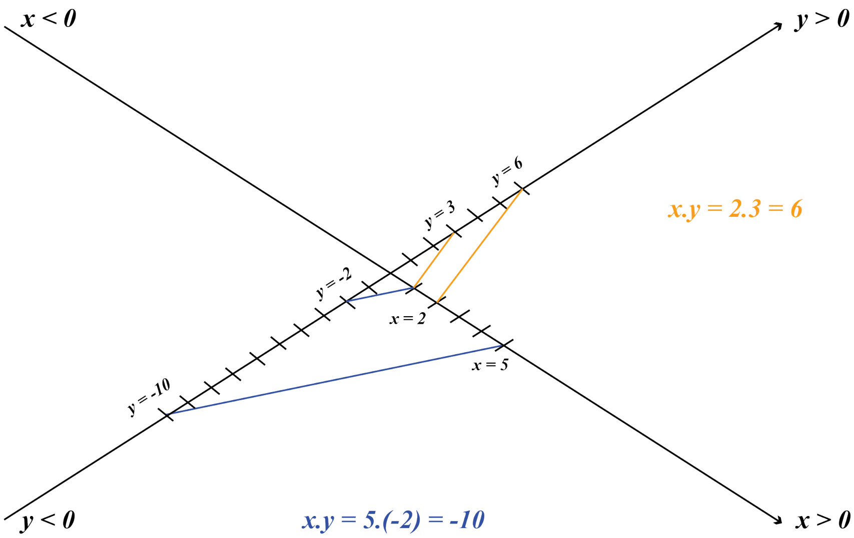


Fonte: Próprio autor.

Para utilizar este dispositivo, inicialmente deve-se escolher uma medida como unidade e traçá-la nos eixos. Em seguida, escolhem-se os dois números "x" e "y" a serem multiplicados e marca-se suas posições nos eixos. Depois, traça-se uma reta entre a marcação de $x = 1$ no caso positivo, ou $x = -1$ no caso negativo, até o valor y escolhido. Então, traça-se uma reta paralela a essa, saindo do valor x escolhido, de modo que o final dessa reta coincidirá com o resultado da multiplicação entre os números escolhidos inicialmente.

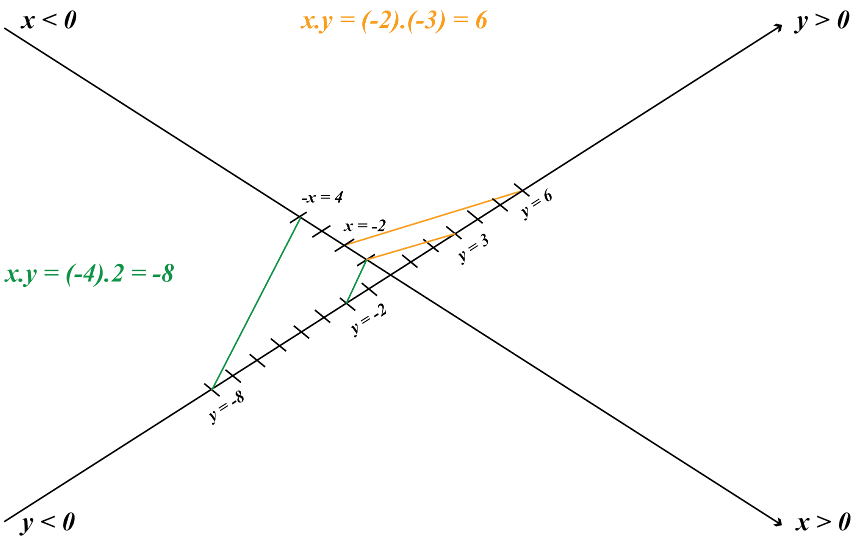
Apresentamos a seguir alguns exemplos da utilização desse dispositivo para o cálculo da multiplicação entre dois números. Na Figura 2.13, há dois exemplos onde o valor escolhido para x é positivo. No primeiro, realizamos a multiplicação entre os valores $x = 5$ e $y = -2$, seguindo o passo a passo indicado, o que resultou em $xy = -10$. No segundo exemplo, multiplicamos os números $x = 2$ e $y = 3$ e, pelo mesmo processo, obtivemos como resultado $xy = 6$. Já na Figura 2.14, temos exemplos onde x assume valores negativos. No primeiro, foram escolhidos $x = -4$ e $y = 2$; ao traçar as retas paralelas, o resultado encontrado foi $xy = -8$. Por fim, realizamos a multiplicação entre $x = -2$ e $y = -3$; ao seguir o procedimento, obtivemos $xy = 6$.

Figura 2.13: Cálculo da multiplicação entre os números 5 e -2, e entre os números 2 e 3.



Fonte: Próprio autor.

Figura 2.14: Cálculo da multiplicação entre os números -4 e 2, e entre os números -2 e -3.



Fonte: Próprio autor.

Indicaremos os axiomas relativos as propriedades da relação “menor ou igual”, para quaisquer inteiros “a” e “b”, temos $a \leq b$, e lê-se: “a” menor que “b” ou “a” igual a “b”.

Axioma 2.17 (Reflexiva)**.** *Para todo inteiro a tem-se que $a \leq a$.*

Axioma 2.18 (Anti-simétrica)**.** *Dados dois inteiros a e b, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.*

Axioma 2.19 (Transitiva)**.** *Para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.*

A partir dos axiomas 2.17, 2.18, 2.19 é possível dizer que a relação $\leq$ é uma relação de ordem. E para melhor definir estas relações, utilizaremos o símbolo “$a < b$” para indicar que $a \leq b$, mas $a \neq b$, ou seja, a é estritamente menor que b. Desse modo podemos definir mais alguns axiomas, inclusive alguns que relacionam a relação de ordem com as operações.

Axioma 2.20 (Tricotomia)**.** *Dados dois inteiros quaisquer a e b tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$.*

Axioma 2.21. *Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.*

Axioma 2.22. *Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.*

Com estes axiomas é possível empregar os termos positivo e negativo para indicar que um certo número é maior ou menor que zero, respectivamente. Para tanto iremos demonstrar a Proposição 2.

Proposição 2. *Seja “a” um número inteiro. Temos:*

(i) *Se $a \leq 0$, então $-a \geq 0$.*

(ii) *Se $a \geq 0$, então $-a \leq 0$.*

(iii) $a^2 \geq 0$.

(iv) $1 > 0$.

Prova. Para (i), podemos utilizar a Propriedade 2.21 e somar $-a$ nos dois membros e temos $(-a) + a \leq (-a) + 0 \Longrightarrow 0 \leq -a$.

Em (ii) a demonstração ocorre de forma análoga, onde temos $(-a) + a \geq (-a) + 0 \Longrightarrow 0 \geq -a$.

Para provar (iii) precisamos discutir dois casos:
Se $a \geq 0$ podemos utilizar a Propriedade 2.22 e multiplicar ambos os membros da desigualdade por a de onde obtemos $a \cdot a \geq 0 \cdot a \Longrightarrow a^2 \geq 0$.
Se $a \leq 0$, de (i) temos que $-a \geq 0$, logo $(-a)^2 \geq 0$ e, da parte (iii) da Proposição 1 temos que $(-a)^2 = a^2$, logo $a^2 \geq 0$.

Por fim, como $1 = 1^2$, (iv) segue imediatamente de (iii). $\square$

O último axioma necessário para a construção do conjunto dos números inteiros é relativo ao Princípio da Boa Ordem, e antes de apresentar este axioma, vale apena introduzir alguns conceitos.

Definição 2.10. Seja A um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Diz-se que A é limitado inferiormente se existe algum inteiro k tal que, para todo $a \in A$, tem-se que $k \leq a$.

Um elemento $a_0 \in A$ diz-se elemento mínimo de A se, para todo $a \in A$, tem-se que $a_0 \leq a$.

De forma análoga pode-se definir conjunto limitado superiormente e elemento máximo de um conjunto.

Nas demonstrações a seguir, serão utilizados os símbolos $minA$ e $maxA$ para indicar o mínimo e o máximo de um conjunto A, quando existirem.

Axioma 2.23 (Princípio da Boa Ordem)**.** *Todo conjunto não vazio de inteiros não negativos contém um elemento mínimo.*

Utilizamos do Princípio da Boa Ordem para provar a seguinte proposição.

Proposição 3. *Seja "a" um inteiro tal que* $0 \leq a \leq 1$*. Então* $a = 0$ *ou* $a = 1$*.*

Prova. Suponhamos por absurdo que exista um inteiro a diferente de 0 e 1 nessas condições. Assim, o conjunto $S = \{a \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq a \leq 1\}$ seria não vazio e pelo Princípio da Boa Ordem existiria $m = minS$.

Como $m \in S$ temos que $m > 0$ e $m < 1$. Usando a Propriedade 2.22, multiplicando por m a segunda desigualdade, obtemos $m^2 < m$. Assim $m^2 > 0$ e, como $m < 1$, da Propriedade 2.19 temos $m^2 < 1$. Logo, $m^2 \in S$ e é menor que seu elemento mínimo, o que é uma contradição. $\square$

Fica então demonstrado como se dá a definição do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros a partir de uma fundamentação axiomática. Para mais detalhes sobre a construção do conjunto dos inteiros a partir do conjunto dos naturais, pelo viés da equivalência, sugiro a leitura de Milies e Coelho (2001).

Em decorrência deste desenvolvimento, damos início ao conjunto numérico subsequente, os Racionais, onde voltamos a tratar de modo geométrico, no qual o segmento agora AB não é múltiplo inteiro do segmento unitário u.

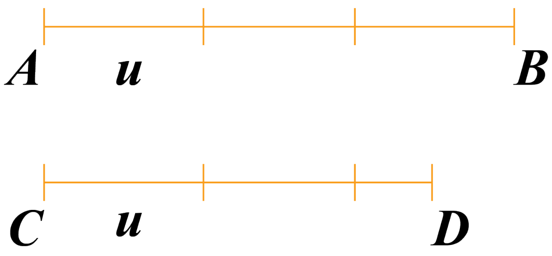
2.4 Conjunto dos Racionais

Vamos considerar o segmento unitário representado por "u". Verificamos que existem segmentos que não são múltiplos de "u".

Tomemos um segmento AB qualquer que não é múltiplo de u. Neste caso, podemos subdividir u e obter uma nova unidade u', de modo que AB seja múltiplo de u'.

Um exemplo é representado na Figura 2.15 onde temos que, em relação ao segmento unitário u, a medida de AB é igual a 3, por outro lado, a medida do segmento CD não é um número natural, visto que CD não é múltiplo de u.

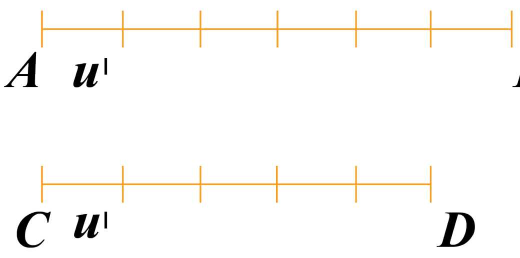
Figura 2.15: Segmento não múltiplo de u.



Fonte: Próprio autor.

A fim de contornar esta situação, podemos subdividir o segmento u ao meio, obtendo a nova unidade u' com $u = 2u'$. Assim, em relação à nova unidade, a medida de AB é igual a 6 e a medida do segmento CD será igual a 5. E ao comparar os dois segmentos, obtemos a razão $\frac{6}{5}$, como visto na Figura 2.16.

Figura 2.16: Segmentos múltiplos.



Fonte: Próprio autor.

Ou seja, buscamos u' que seja submúltiplo de u, de modo que $u = nu'$ e $AB = mu'$. Em relação a medida destes segmentos temos:

$$u = nu' \Leftrightarrow |u| = n|u'| \Rightarrow 1 = n|u'| \Rightarrow |u'| = \frac{1}{n}, \tag{2.1}$$

e

$$AB = mu' \Rightarrow |AB| = m|u'| \Rightarrow |AB| = m\frac{1}{n} \Rightarrow |AB| = \frac{m}{n}, n \neq 0. \tag{2.2}$$

É a partir da comparação feita entre as medidas dos segmentos nas Equações (2.1) e (2.2), que surgem as medidas expressas por relações entre os números naturais, que configuram o conjunto dos números racionais não negativos, $\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Vimos até agora que, ao encontrarmos os segmentos AB e u, de modo que o primeiro seja múltiplo do segundo, ou então, ao encontrar o segmento u' com $|u'| = \dfrac{1}{n}$, dizemos que AB e u são comensuráveis.

A seguir é apresentado o que acontece se não encontramos segmentos que são múltiplos entre si. Daremos início aos segmentos incomensuráveis.

Capítulo 3

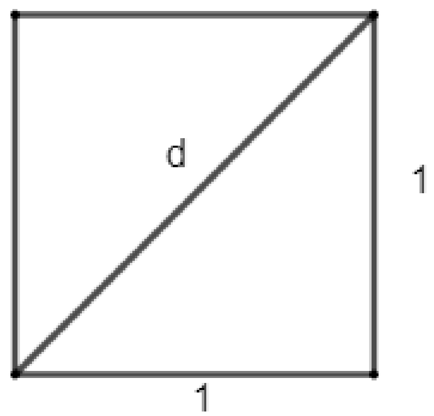
Segmentos Incomensuráveis e Números Irracionais

O presente capítulo aborda como os pitagóricos compreenderam os segmentos incomensuráveis, aqueles que não podem ser escritos como uma razão entre dois inteiros, e como esta descoberta influenciou o desenvolvimento da matemática grega.

Na Grécia antiga, acreditava-se que dado dois segmentos distintos quaisquer, sempre seria possível obter um terceiro segmento submúltiplo de ambos. Ou seja, dado dois segmentos AB e CD, existe o segmento unitário u de forma que $AB = nu$ e $CD = mu$. Contudo, não é em todo caso que dois segmentos quaisquer são comensuráveis, existem segmentos que não possuem uma unidade comum com um terceiro, como mostra a Figura 3.1.

Acredita-se que os pitagóricos evidenciaram os segmentos incomensuráveis ao se observar que o comprimento do lado de um quadrado unitário não pode ser expresso por nenhum número racional com relação ao comprimento da diagonal deste mesmo quadrado, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

Figura 3.1: Quadrado unitário.



Fonte: Próprio autor.

Logo, temos o seguinte Problema: *a diagonal e o lado de um quadrado não podem ser* *expressos como múltiplos inteiros de uma unidade comum.* Neste momento, utilizamos da linguagem moderna para apresentar uma forma de resolução.

Argumentação Lógica Dedutivo. Sejam os segmentos AB e AC o lado e a diagonal de um quadrado unitário, respectivamente. Suponhamos, por absurdo, que AB e AC são comensuráveis, logo

Existe AB' tal que $|AB| = n|AB'|$, e simultaneamente $|AC| = m|AB'|$, ou seja, AB e AC são múltiplos de AB'. Daí:

$|AC| = \dfrac{m}{n}$ um número fracionário irredutível, onde $mdc(m, n) = 1$.

Pelo Teorema de Pitágoras, em que $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$|AC|^2 = 2|AB|^2 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2, m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1}$$

Pela Equação (3.1) m^2 é par, logo:

$$m : par \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{N} \mid m = 2\alpha. \tag{3.2}$$

Substituindo a Equação (3.2) na Equação (3.1) temos:

$$(2\alpha)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2\alpha^2 \Rightarrow n^2 : par \Rightarrow n : par \Leftrightarrow \exists\ \beta \in \mathbb{N} \mid n = 2\beta. \tag{3.3}$$

Calculando:

$$mdc(m, n) = mdc(2\alpha, 2\beta) = 2mdc(\alpha, \beta). \tag{3.4}$$

Assim, $mdc(m, n)$ é par $\Rightarrow mdc(m, n) \neq 1$, logo $\dfrac{m}{n}$ não é uma fração irredutível, o que é um absurdo.

Portanto, AB e AC são incomensuráveis. $\square$

Os segmentos incomensuráveis, resultaram no surgimento do que conhecemos hoje por números irracionais e, de acordo com Barbosa, Sousa e Santos (2021), tal descoberta impactou seriamente o desenvolvimento da matemática grega, tema que será melhor discutido na próxima seção.

Outra maneira de se resolver o problema das grandezas incomensuráveis foi dada por Eudoxo (408a.C., 355a.C.), discípulo de Platão (427a.C., 347 a.C.), criando uma teoria de proporções que lida com grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Esta teoria encontra-se no livro V de *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009). Entretanto, no livro X, é possível encontrar diversos problemas que envolvem as grandezas comensuráveis e incomensuráveis, o de maior interesse para este trabalho é o Problema 7: *As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.*

Iremos demonstrar este Problema de forma vertical, com a utilização do Grupo de Formulários para Demonstração (GFD). A demonstração vertical é uma abordagem que organiza o raciocínio lógico de maneira hierárquica, onde as premissas são apresentadas no início e as conclusões são deduzidas passo a passo, seguindo uma estrutura rigorosa. Essa estruturação permite uma compreensão clara do processo de raciocínio e demonstração, facilitando a análise e a validação do argumento apresentado (GALO, 2021).

A técnica do trabalho de Galo (2021) consiste em formulários divididos em seções como: (1) Enunciado do Problema; (2) Formulário A (argumentação) onde ocorre a identificação dos elementos do enunciado como as premissas, hipóteses e teses; (3) Espaço Teórico e Observações onde pode ser descrito teorias, conceitos, definições, desenhos entre outras fundamentações teóricas que auxiliam e justificam as etapas de construção do raciocínio lógico; e (4) Formulário B (demonstração) momento de utilizar as informações apresentadas anteriormente para desenvolver a estratégia de demonstração escolhida.

Segue a demonstração vertical, com o uso do GFD e estratégia de redução ao absurdo, do Problema 7. Apesar de se tratar de uma tradução do método utilizado por Euclides (300 a.C.), onde podemos perceber a utilização de palavras como *magnitudes* e a representação $\frac{A}{B}$, também fazemos uso da linguagem moderna, de modo a adaptar essa demonstração.

1. Enunciado: Problema 7. As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.

2. Formulário A - Argumento

L		**Descrição simbólica/Texto**
A1	P1: Premissa 1	A e B: magnitudes
A2	P2: Premissa 2	$\frac{m}{n}$: razão
A3	p1: Hipótese 1	A e B incomensuráveis
	"$\rightarrow$" ou "$\leftrightarrow$"	$\rightarrow$
A4	q1: Tese 1	$\nexists$ razão $\frac{m}{n} \mid \frac{A}{B} = \frac{m}{n}$

*L: linha.

3. Espaço Teórico e Observações

Definição (D_1). Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.

Proposição 1 (R_1). *As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.*

Proposição 2 (R_2)**.** *Caso duas magnitudes tenham entre si uma razão que um número, para um número, as magnitudes serão comensuráveis.*

Proposição 3 (R_2' - (em símbolos))**.** *Sejam A e B magnitudes*
$\exists\ m, n \in \mathbf{N} \mid \dfrac{A}{B} = \dfrac{m}{n} \Longrightarrow$ *A e B são comensuráveis.*

4. **Formulário B - Demonstração**

Estratégia: Redução ao absurdo				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição simbólica**
B1	Sejam válidas	A3		A e B incomensuráveis
B2	Supondo, por absurdo ∼q1	A4		$\exists\ \frac{m}{n} \mid \frac{A}{B} = \frac{m}{n}$
B3	logo	B2	R_2'	A e B comensuráveis
B4	Temos uma contradição	B1 e B3		
B5	Portanto	B2 e B4		$\nexists\ \frac{m}{n} \mid \frac{A}{B} = \frac{m}{n}$
B6	C.q.d			

*LN: linha utilizada. *TN: teoria utilizada.

3.1 Crise dos pitagóricos: foi mesmo uma crise?

A visão mais disseminada sobre a descoberta dos incomensuráveis é que esta gerou uma crise no pensamento pitagórico. A incomensurabilidade conflitava com a filosofia pitagórica de que "tudo é número", mostrando-se, assim, contrária ao senso intuitivo de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional.

Há diversos mitos de que o escândalo lógico foi tão grande que os pitagóricos tentaram manter em sigilo a tal descoberta. Uma lenda, não muito precisa, conta que "o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto" (EVES, 2011, p. 107).

De acordo com Gonçalves e Possani (2009), desde a década de 1960 estudos na área indicam uma falta de rigor histórico no parecer de que a descoberta da incomensurabilidade teria ocasionado uma crise entre os pitagóricos. Esta versão, menos difundida, indica que as fontes mais confiáveis para o estudo e pesquisa do assunto, não apresentam evidências de uma crise, mas que esta teria sido gerada pela leitura pouco rigorosa de fontes menos fidedignas.

Os autores que discordam que a descoberta dos segmentos incomensuráveis tenha causado uma crise no pensamento pitagórico, apresentam como um de seus argumentos que comentadores como Aristóteles não a mencionam em seus escritos. O historiador David Fowler (1937-2004) apresenta, em seus trabalhos, diversos apontamentos sobre como os matemáticos gregos poderiam ter lidado com a incomensurabilidade sem gerar uma crise, seu argumento principal é de que a geometria grega tinha um caráter fortemente desvinculado com a aritmética, sendo possível fazer geometria sem necessariamente ter de associar um número a cada segmento (FOWLER, 1999 apud GONÇALVES; POSSANI, 2009).

De fato, a ideia de uma crise pode ser um anacronismo de alguns gregos posteriores ou até mesmo um mal entendido, visto que a crise dos incomensuráveis parece só existir quando interpretamos os textos gregos em nossos termos atuais, esquecendo-nos do modo como os gregos viam e faziam a matemática naquela época.

Atualmente, o rigor historiagráfico mais aceito mostra que a versão da história da matemática grega sem a crise dos pitagóricos é a mais compatível com as fontes. No entanto, isso não significa que todos os trabalhos que defenderam a crise não tem valor, pelo contrário, é preciso, ao analisarmos estes historiadores, que possamos entender que sua historiografia estava condicionada a outras conjecturas sobre a matemática grega e até mesmo a história da Grécia Antiga.

Avançando no tempo iremos deixar a Grécia Antiga de lado e pensar sobre como os segmentos incomensuráveis, para nós o conjunto dos números irracionais, são abordados no decorrer da educação básica atualmente.

Capítulo 4

Os Números Irracionais na Educação Básica

Neste capítulo o foco está voltado para a Educação Básica brasileira e como os documentos normativos, livros didáticos e professores apresentam e lidam com o conteúdo de números irracionais durante os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Além de estar presente nos livros didáticos e livros técnicos, o conteúdo sobre números irracionais está presente em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de estar presente em matrizes de referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil e matrizes de referência para o Exame Nacional do Ensino Médio (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019).

A utilização dos PCN e da BNCC como referência neste trabalho se justifica pela sua natureza e âmbito nacional. Os PCN representam um documento balizador que estabelece diretrizes e orientações para o ensino em todo o país, oferecendo uma estrutura curricular ampla e flexível (BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental, 1998). Por sua vez, a BNCC é um documento normativo que define os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que todos os estudantes brasileiros devem desenvolver ao longo de sua trajetória educacional (BRASIL. Ministério da Educação, 2018). Ambos os documentos são fundamentais para nortear a elaboração de currículos escolares e o planejamento de atividades pedagógicas, visando garantir uma educação de qualidade e equidade em todo o território nacional.

De acordo com Broetto e Santos-Wagner (2019) as pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem dos números irracionais destacam problemas relacionados à três aspectos principais: conhecimentos de professores e alunos sobre o tema; tratamento dado ao tema pelos livros didáticos; e formação de professores de Matemática.

Nos documentos oficiais encontramos orientações sobre a abordagem dos números irracionais. Os PCN recomendam evitar uma abordagem formal, não associá-los diretamente aos radicais e discutir temas como a notação decimal infinita e não periódica, bem como a aproximação por números racionais. Além disso, sugerem explorar a necessidade e as consequências do arredondamento de números com infinitas casas decimais. Uma sugestão do PCN é que

> O estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita e não periódica. Outra é o problema clássifo de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$.(BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p. 106).

A BNCC traz pontos em comum com os PCN e também adiciona novos alertas e considerações. De acordo com a Base, não é adequado desenvolver uma construção conceitual dos números irracionais no 9º ano, pois os estudantes ainda não possuem maturidade suficiente para compreender esse conteúdo de forma mais aprofundada.

Conforme estabelecido, o estudo dos números irracionais é iniciado no 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, abrangendo o desenvolvimento de duas habilidades específicas, são elas

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.(BRASIL. Ministério da Educação, 2018, p. 317).

No entanto, no âmbito do Ensino Médio, a BNCC não faz menção direta aos números irracionais.

De modo geral, o conceito de número irracional não é tratado de forma apropriada no decorrer do Ensino Fundamental e Médio. Os livros didáticos apresentam explicações superficiais quando comparadas ao tratamento relativo aos números naturais, inteiros e racionais; privilegiam exemplos e definições baseadas na representação decimal, classificação como racional ou irracional e notas históricas que apenas destacam datas e nomes relacionados ao conteúdo (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019); dão mais ênfase ao número π e pouco mencionam os números irracionais que não são obtidos através de raízes.

Prejudicando, assim, a conceituação do conteúdo pelos alunos, uma vez que não é abordado questões como segmentos incomensuráveis e as tarefas propostas são, em sua maioria, de caráter mecânico, impedindo a compreensão da complexidade dos números irracionais.

A conceituação dos números irracionais na educação básica costuma ser empírica ou teórica, sem uma relação clara entre esses dois pólos. Em alguns casos, os livros didáticos apresentam exemplos práticos, como a medição da circunferência de um círculo para introduzir o número π, mas sem fornecer uma definição formal dos números irracionais. Por outro lado, certos manuais preferem abordagens teóricas, utilizando termos como "dízima não periódica" ou "números reais que não podem ser expressos por meio de uma razão entre números inteiros". Essas explicações, muitas vezes, não são acompanhadas de um aprofundamento que traga significado ao aprendizado dos alunos.

Pommer e Pommer (2012) em sua pesquisa, analisando diversos livros didáticos, como por exemplo "Fundamentos da Matemática Elementar" de Iezzi et al; "Matemática para Todos" de Imenes e Lellis e "Matemática Completa" de Giovanni e Bonjorno, apontam que, em seguida, os livros introduzem o conjunto dos Números Reais como sendo a união dos conjuntos dos Números Racionais e o Números Irracionais, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, mas de nada adianta este tipo de representação se os alunos não compreendem de fato quais números compõem o conjunto dos Irracionais, logo, quem são os números Reais?

Ademais, os livros didáticos privilegiam atividades com contexto tecnicista, com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual. Essa falta de aprofundamento e explicações significativas reforça uma concepção tecnicista no ensino de Matemática, limitando a compreensão da complexidade dos números irracionais na educação básica. Os estudantes podem ser apresentados apenas a alguns números irracionais notáveis, sem uma visão ampla do conjunto desses números e suas propriedades. Isso dificulta a formação de uma compreensão sólida dos números irracionais como elementos matemáticos fundamentais.

Os livros didáticos também deixam a desejar na exploração de recursos tecnológicos, como calculadoras e planilhas eletrônicas, que poderiam enriquecer o ensino dos números irracionais. O uso dessas ferramentas poderia auxiliar os alunos a visualizar e compreender a natureza dos números irracionais, especialmente no que diz respeito às suas infinitas casas decimais não-periódicas. A falta de significação e conexão entre diferentes linguagens matemáticas nas obras, ficando restrita ao registro algébrico e aritmético, também dificulta a assimilação dos conceitos por parte dos estudantes.

Pommer (2018) realiza uma análise minuciosa dos contextos e contribuições histórico-epistemológicas dos números irracionais, situando sua presença e abordagem em livros de referência. Nesse sentido, o autor enfatiza a relevância da utilização da História da Matemática como uma metodologia valiosa para o ensino desse tema.

> Levando-se em consideração os números irracionais, cujo aperfeiçoamento matemático levou séculos, a forma usual de apresentação deste tema em muitos dos livros didáticos de ensino básico, sem vínculos com a gênese histórica é um dos fatores que causa dificuldades na aprendizagem deste conhecimento escolar (POMMER, 2018, p. 191).

Durante seu estudo, Pommer (2018) escolhe dois livros didáticos para analisar, são eles "As Ideias Fundamentais da Matemática", de Manuel Amoroso Costa, e "Conceitos Fundamentais da Matemática", de Bento de Jesus Caraça, que têm como característica principal uma abordagem narrativa das ideias e conceitos matemáticos fundamentais. Essa opção didática busca promover o entendimento semântico dos números, percorrendo a história do desenvolvimento da Matemática desde os números naturais até os irracionais e reais. A conexão entre a história e a teoria matemática possibilita uma compreensão mais ampla e significativa da natureza dos números irracionais. Essa abordagem alternativa abre caminho para um tratamento didático mais adequado dos números irracionais no ensino básico.

Amoroso Costa destaca o marco pitagórico da descoberta da incomensurabilidade, quando os antigos gregos se depararam com a relação entre a diagonal e o lado do quadrado, percebendo que esses segmentos não eram comensuráveis. O autor apresenta a dedução da incomensurabilidade, utilizando elementos geométricos, além disso, discute a concepção dos números irracionais pelos gregos e a influência de Descartes na compreensão da natureza dos números reais. A ideia de continuidade geométrica, conhecida como o postulado de Cantor-Dedekind, direcionou os números irracionais a uma caracterização aritmética pela metáfora do corte. O livro sugere a utilização do "corte de Dedekind" como uma forma de apresentar os números irracionais em conjunto com os números racionais no ensino básico, proporcionando uma compreensão mais abrangente desses conceitos matemáticos. A abordagem qualitativa e dedutiva de Costa é vista como uma possibilidade de tornar a Matemática acessível através de argumentações simples e diretas, incentivando uma transposição didática para o ensino fundamental e médio, algo geralmente negligenciado nos livros didáticos.

Por outro lado, Caraça destaca a essência do conjunto dos Números Reais e a "Crise dos Incomensuráveis". O autor define medir como comparar duas grandezas de mesma espécie e apresenta o problema da incomensurabilidade entre segmentos. Ele discute a possibilidade de medir um segmento utilizando outro como unidade e a evolução da "arte de medir" que levou dos números naturais aos racionais. A análise do "Problema da medida" envolve compreender a relação entre segmentos comensuráveis e incomensuráveis, remetendo aos números racionais e irracionais, respectivamente. O ponto de vista prático aborda a questão da exatidão e aproximação na medida dos segmentos, enriquecendo o repertório de conhecimentos matemáticos. No entanto, a análise dos livros didáticos em (POMMER; POMMER, 2012), revela uma abordagem insuficiente do tema das aproximações nos livros didáticos.

Apesar de terem sido escritos em períodos e locais diferentes, ambos os livros tratam dos conceitos fundamentais da Matemática e oferecem respostas a questões desafiadoras da área. A exposição histórico-epistemológica dos números irracionais permite compreender o embate entre o pragmático e o teórico, essencial para entender a natureza dos números irracionais.

A análise desses livros ressalta a importância de uma abordagem didática dos números irracionais no ensino básico, levando em conta as reflexões históricas sobre contagem, medida, finito e infinito. As narrativas presentes nos livros destacam a cultura matemática e encorajam uma visão mais ampla da Matemática, além de enfatizarem a necessidade de entender a construção contínua do conhecimento matemático, algo muitas vezes ignorado nos livros didáticos atuais.

Os livros de Caraça (1970) e Costa (1981) oferecem referências para significar os números irracionais, considerando o exato e o aproximado, e abordam o tema de forma mais profunda e completa do que os demais manuais escolares. Essa análise histórica revela que o exato e o aproximado coexistiram na evolução do conhecimento matemático e destaca a importância de uma transposição didática mais adequada dos números irracionais nos currículos escolares.

Mosca, Carvalho e Carvalho (2016) abordam a problemática relacionada à definição e conceituação do conjunto dos números reais na Matemática da Educação Básica. Destacam a circularidade presente na conceituação dos números reais, quando se define o conjunto dos números irracionais como o complemento dos números racionais no conjunto dos reais, ou seja $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, e apresenta o conjunto dos reais como a união dos conjuntos dos números irracionais e racionais, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, assim $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Para evitar essa circularidade, Mosca, Carvalho e Carvalho (2016) propõem um caminho mais natural, reforçando a extensão das operações aritméticas, semelhante à introdução dos conjuntos dos números inteiros e racionais. Discutem a possibilidade de utilizar métodos numéricos para introduzir um número irracional, com base em problemas conhecidos e relacionados ao Ensino Médio. Sendo assim, é apresentado um levantamento quantitativo e qualitativo realizado com alunos do 1º ano do Ensino Médio sobre a irracionalidade de $\sqrt{34}$. Foram aplicadas quatro tarefas com o objetivo de verificar a compreensão dos estudantes sobre os conceitos de números racionais e irracionais, indicadas nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3.

Figura 4.1: Tarefas 1 e 2

Atividade 1: Números Racionais

a) Observe os números a seguir:

$\frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{12}{24}, \frac{15}{21}, \frac{15}{21}, \frac{24}{64}, \frac{1}{5}, \frac{5}{7}, \frac{3}{6}, \frac{9}{8}, \frac{75}{105}, \frac{3}{24}, \frac{13}{26}, \frac{3}{15}$

b) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{1}{2}$?

c) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{3}{8}$?

d) Quais entre os números acima representam a quantidade $\frac{5}{7}$?

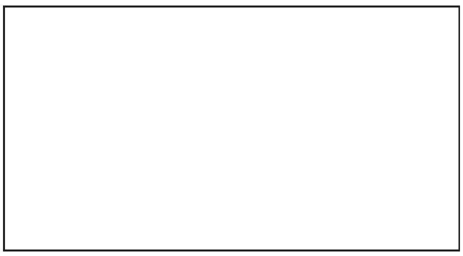
Existem quantidades diferentes representadas? Quais?

Sejam os números p e q pertencentes ao conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ A fração ordinária $\frac{p}{q}$ chama-se **irredutível** se p e q não têm fatores comuns, isto é, p e q **não são divisíveis por um mesmo número.**

Dentre os números fracionários acima, quais são irredutíveis?

Atividade 2: Diagonal de um retângulo

a) Considere o retângulo a seguir:



b) Se a altura desta figura é igual a 3cm e a largura é igual a 5cm, qual a medida da diagonal da figura?

c) Escreva uma equação matemática para obter a medida da diagonal.

d) O valor encontrado no item (b) satisfaz a equação acima? Explique sua resposta.

e) A que conjunto de números pertence a medida da diagonal do retângulo do item (a)?

Fonte: (MOSCA; CARVALHO; CARVALHO, 2016, p. 329).

O estudo revelou problemas na aprendizagem dos números racionais, com uma baixa percentagem de acertos em questões que deveriam ser resolvidas facilmente. Na primeira tarefa, os alunos tiveram dificuldades em reconhecer frações equivalentes e irredutíveis, conteúdo estudado desde o 7º ano do Ensino Fundamental. Na segunda tarefa, que envolvia o Teorema de Pitágoras e a obtenção da medida de uma diagonal de um retângulo, a maioria dos alunos não conseguiu chegar ao resultado desejado, evidenciando a falta de familiaridade com esse tipo de cálculo.

Figura 4.2: Tarefa 3

Atividade 3: Decimais finitas e infinitas

a) Com o uso da calculadora, encontre o valor de $\sqrt{34}$ e anote. Em seguida, desligue a calculadora.

b) Esse número pode ser escrito na forma de uma fração ordinária. Se sim, qual?

c) Escreva o número obtido em (a) e com o uso da calculadora eleve-o ao quadrado. Compare a resposta com 34. O que aconteceu?

d) Como você faria para ter certeza matemática de que a medida da diagonal do retângulo é um número racional, ou não?

Fonte: (MOSCA; CARVALHO; CARVALHO, 2016, p. 329).

A terceira tarefa explorou o uso de calculadoras para mostrar que os resultados obtidos são aproximações, mas não abordou a noção de números irracionais. Por fim, a quarta tarefa apresentou a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{34}$ e propôs que os alunos aplicassem a mesma ideia a outros números irracionais. No entanto, poucos alunos conseguiram seguir os procedimentos da demonstração, o que indica a falta de compreensão desse conceito.

Figura 4.3: Tarefa 4

Atividade 4: Demonstração de que $\sqrt{34}$ é irracional

Suponha que $\sqrt{34} = \frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q}$ irredutível. Então $34 = \frac{p^2}{q^2}$ e $34\,q^2 = p^2$. Segue que p é par, ou seja, $p = 2j$. Substituindo na equação, $34\,q^2 = 4j^2$. Dividindo ambos os membros por 2, concluímos que $17q^2 = 2j^2$ e isto finalmente implica que q também é par, contrariando o ponto de partida, quando assumimos $\frac{p}{q}$ irredutível.

Demonstre agora, modificando as passagens necessárias, que

a) $\sqrt{26}$ é número irracional b) $\sqrt{19}$ é número irracional

Fonte: (MOSCA; CARVALHO; CARVALHO, 2016, p. 330).

Os resultados apontam para a necessidade de melhorar a abordagem dos números racionais e irracionais no currículo escolar. Os alunos demonstraram dificuldades em operações básicas com frações, no entendimento de que as calculadoras fornecem apenas aproximações e na compreensão das demonstrações formais. Isso sugere que os conceitos de ordem e corpo dos números reais devem ser mais enfatizados e explorados através de situações-problema, buscando aprofundar o conhecimento matemático dos alunos. Diminuindo a distância entre as definições acadêmicas para os números reais e seu tratamento no ensino escolar, buscando oferecer uma abordagem apropriada dos números irracionais no Ensino Básico.

Considerações Finais

A presente pesquisa realizou uma análise na história da construção dos conjuntos numéricos, com foco nos números irracionais. Percorremos a trajetória da matemática grega, examinando conceitos fundamentais como retas, semirretas e segmentos, além dos conjuntos numéricos e a própria noção de incomensurabilidade que precedeu o desenvolvimento dos irracionais.

A trajetória delineada no Capítulo 2 conduziu-nos por uma exploração dos segmentos comensuráveis, fornecendo bases sólidas para o estudo subsequente dos conjuntos numéricos. A análise dos postulados de Euclides e outras definições ressalta a importância intrínseca da geometria na compreensão dos conjuntos numéricos. No exame dos números inteiros, notamos a complexidade de sua formação, permeada por resistência e desconfiança entre filósofos e matemáticos gregos, destacando a gradual aceitação dos números negativos ao longo de séculos de debates.

O terceiro capítulo, dedicado aos segmentos incomensuráveis e à suposta crise pitagórica, revelou-se como um ponto crucial na evolução matemática, impulsionando a concepção dos números irracionais, de modo que ficou evidente o processo complexo e, por vezes, controverso que marcou o desenvolvimento do pensamento matemático.

Além de analisar aspectos epistemológicos, investigamos os desafios do ensino de irracionais na educação básica contemporânea. Identificamos lacunas nos materiais didáticos, formação docente insuficiente e abordagens fragmentadas que prejudicam a assimilação significativa do tema pelos estudantes.

Diante do exposto, ressaltamos a importância de rever práticas, investir na capacitação de professores e aprimorar recursos pedagógicos. Uma compreensão mais rica e integrada dos irracionais, aliada a um ensino contextualizado e interdisciplinar, pode fortalecer sobremaneira a aprendizagem deste tópico na Educação Básica.

O papel das abordagens histórico-epistemológicas, associando os números irracionais com sua evolução temporal, também foi enfatizado. Os materiais didáticos que empregam esse método tendem a ser mais eficazes na promoção da compreensão. O estudo ressalta a importância de evitar a circularidade na definição dos números reais, favorecendo uma abordagem que destaque a extensão das operações aritméticas.

Conclui-se que reavaliar a forma como os números irracionais são ensinados é crucial. A modificação dos materiais didáticos, alinhada às orientações oficiais e à adoção de tecnologias, pode fomentar um ensino mais aprofundado. A compreensão dos números irracionais é vital para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio e resolução de problemas, preparando os alunos para futuros desafios acadêmicos e profissionais. Assim, a superação dos desafios identificados poderá favorecer uma formação matemática mais robusta, permitindo aos estudantes utilizar os números irracionais de maneira consciente e crítica.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, F. E.; SOUSA, D. M.; SANTOS, M. I. A. d. Números irracionais: Irracionalidade e incomensurabilidade. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 20, p. 440–450, 2021.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Brasília.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. 1998. Brasília.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? *Bolema, Rio Claro SP*, v. 33, n. 64, p. 728–747, 2019.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CIDRÃO, G. G.; ALVES, F. R. V. Contributos da didática profissional na formação de professores: um estudo sobre conjuntos numéricos. *Revista de Educação Matemática, São Paulo*, v. 16, n. 23, p. 426 – 448, 2019.

CORBO, O. *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica*. 2012. 289 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2012.

COSTA, M. A. *As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios*. 3. ed. São Paulo: Edusp, 1981.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar 9*: Geometria plana. São Paulo: Saraiva, 2013.

DUARTE, C. E. d. L. *Conjuntos Numéricos*. 2013. 40 p. Dissertação (Mestrado) Centro de Ciências Exatas e da Terra — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, P. M. *Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica*: um estudo a partir da teoria histórico-cultural. 2021. 70 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação de Licenciatura em Matemática) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2021.

FOWLER, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy*: A new reconstruction. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1999.

GALO, B. C. *Técnica de Demonstração Matemática aplicada em Análise na reta*. 2021. 76 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação de Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Sorocaba, 2021.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. *Matemática Universitária*, v. 47, p. 16–24, 2009.

IFRAH, G. *Os números*: História de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. *Bolema, Rio Claro - SP*, v. 7, n. 8, 1992.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números*: Uma introdução à Matemática. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

MOSCA, M. A.; CARVALHO, T. O. d.; CARVALHO, A. M. F. T. d. Acerca da circularidade no estudo inicial dos números irracionais: uma proposta para a Educação Básica. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 18, n. 2, p. 319 – 334, 2016.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Como sabemos sobre a matemática grega?* 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Greek_sources_1/>. Acesso em: 29 out 2023.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Pitágoras de Samos*. 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras/>. Acesso em: 29 out 2023.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Proclo Diádoco*. 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Proclus/>. Acesso em: 22 out 2023.

POMMER, W. M. Números Irracionais na Escolaridade Básica: As contribuições didático-epistemológicas advindas da história da matemática. *REnCiMa*, v. 9, n. 3, p. 183 – 199, 2018.

POMMER, W. M.; POMMER, C. P. C. R. A abordagem de alguns números irracionais notáveis nos livros didáticos do ensino fundamental e médio. *Interfaces da Educação, Paranaíba*, v. 2, n. 6, p. 5–22, 2012.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.