

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Introdução à Teoria Qualitativa das  
Equações Diferenciais**

**Orientando:** Daniel Medeiros da Silva

**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu

*Licenciatura em Matemática*

*Sorocaba / 2014*

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal o estudo da Teoria de *Averaging* e a aplicação do Método de *Averaging* para se determinar o número máximo de ciclos limites que bifurcam do centro planar perturbado por uma classe de sistemas diferenciais polinomiais de Liénard, ou seja, um sistema do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon(f_n(x)y + g_m(x)), \end{cases}$$

onde verificaremos que o número máximo de ciclos limites do sistema acima é o valor máximo de  $[\frac{n}{2}]$ , sendo  $n$  o grau do polinômio  $f_n$ .

Outros objetivos são estudar alguns temas dos aspectos gerais da teoria qualitativa das EDOs como: O estudo de aspectos qualitativos de equações diferenciais envolvendo sistemas lineares, Teorema de Existência e Unicidade de soluções, noções básicas de campos de vetores, Teorema de Grobman-Hartman, Teorema do Fluxo Tubular, conjuntos limites das trajetórias, Teorema de Poincaré-Bendixson.

## Palavras-chave

Equações Diferenciais; Sistemas Dinâmicos, Ciclos Limites; Método *Averaging*

## Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é iniciar os estudos em sistemas dinâmicos principalmente no problema de encontrar ciclos limites em sistemas planares, através de estudos de resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais e do Método de Averaging, bem como a aplicação de tal conhecimento para o cálculo do número de ciclos limites que podem bifurcar de centros planares. Além disso, outros objetivos são:

- Aprender a fazer levantamento/pesquisa bibliográfica.
- Despertar no aluno o interesse pela matemática, principalmente no ramo de sistemas dinâmicos e, futuramente, desenvolver estes assuntos para um refinamento adicional num curso de pós-graduação.
- Possibilitar ao aluno não só o preenchimento das lacunas em sua formação mas também aprimorar seu espírito crítico.

## Introdução

Repetições ocorrem frequentemente no dia a dia das pessoas: toda manhã o Sol nasce, todo dia primeiro de janeiro celebra-se o Ano Novo, a cada quatro anos um presidente é eleito, entre outros. Todos estes fenômenos possuem um fator em comum, a *periodicidade*.

Este projeto é voltado àqueles fenômenos periódicos que são descritos por uma função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujo comportamento é governado por um sistema planar de equações diferenciais ordinárias.

Uma função  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ , onde  $X$  é um conjunto arbitrário não-nulo, é periódica de período  $T$  se  $x(t + T) = x(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $t$  é interpretada como uma variável tempo.

Um *ciclo limite* de um sistema de equações diferenciais é uma solução periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas do sistema.

A noção de ciclo limite surgiu pela primeira vez nos estudos de equações diferenciais no plano realizados por *Poincaré* entre os anos de 1880 e 1890. No final da década de 20 *Van der Pol*, *Lienard* e *Andronov*, no estudo de certos fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites idealizados por *Poincaré*. Desde então a não existência, a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limites foram estudadas extensivamente por matemáticos, físicos, químicos, biólogos, e economistas.

Um dos métodos para se estudar problemas de existência e unicidade de ciclos limites no plano é a análise da aplicação de primeiro retorno de *Poincaré*, definida numa seção transversal ao fluxo. Infelizmente, tal análise em geral não é muito simples.

Em 1900, em Paris, durante o II Congresso Internacional de Matemáticos, D. Hilbert elaborou uma lista com 23 temas de pesquisa para o próximo século. Nenhum dos problemas havia tido solução até então, e varios deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. Desta lista somente dois permanecem aberto. Um é a conjectura de Riemann e o outro é o 16º problema de Hilbert.

Durante o século XX e estes 12 primeiros anos do século XXI a pesquisa sobre ciclos limites tem sido um dos grandes objetivos da *Teoria Qualitativa de Sistemas Dinâmicos*. Porém muitas perguntas continuam sem respostas.

Considere um sistema diferencial planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $P$  e  $Q$  são polinômios reais nas variáveis  $x$  e  $y$  e o máximo entre os graus de  $P$  e  $Q$  é  $n$ . O que podemos dizer sobre o número e a configuração dos ciclos limites do sistema (1)?

- É finito seu número de ciclos limites?
- Existe uma *cota superior* para o número de ciclos limites dependendo somente de  $n$ ?

Embora *J. Écalle* e *Yu. Ilyashenko* tenham demonstrado que o número de ciclos limites em tais sistemas é finito, suas demonstrações não são muito acessíveis. Nem mesmo foi provada a existência de uma cota superior para campos quadráticos. Suspeita-se que essa cota seja 4 e a configuração do tipo (3,1).

Devido a dificuldade de se resolver o 16º Problema de Hilbert como fora proposto, vários novos enunciados foram surgindo para o problema. Um exemplo é o estudo do número máximo de ciclos limites que bifurcam de um centro, conhecida como *versão fraca do 16º Problema de Hilbert*.

Um método conhecido na literatura para o estudo das órbitas periódicas é o método *Averaging*. Resumidamente, a Teoria de *Averaging* também fornece condições suficientes para a existência de ciclos limites sobre certas hipóteses.

## Metodologia

Os estudos teóricos foram realizados através das referências bibliográficas tendo em vista os temas citados no resumo. Além disso, foram realizados reuniões, apresentações e discussões semanalmente com a orientadora para remover as possíveis dúvidas do orientando bem como discutir os resultados e aplicações do método de *Averaging* comparando os resultados de acordo com os obtidos por Jaume Llibre, Ana Cristina Mereu e Marco Antonio Teixeira em [3]

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Palavras-chave</b>	<b>iii</b>
<b>Objetivos</b>	<b>iv</b>
<b>Introdução</b>	<b>v</b>
<b>1 Aspectos Gerais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Teorema do Ponto Fixo e Teorema de Picard . . . . .	4
1.3 Campos Vetoriais e Fluxos . . . . .	9
1.4 Retrato de fase de um campo vetorial . . . . .	11
1.5 Equivalência e conjugação de campos vetoriais . . . . .	13
1.6 Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	14
1.7 A transformação de Poincaré . . . . .	16
1.8 Ciclos Limites no plano . . . . .	17
1.9 O Teorema de Poincaré - Bendixson . . . . .	18
<b>2 O Método de Averaging</b>	<b>21</b>
2.1 Introdução . . . . .	21
2.2 O Teorema de Averaging . . . . .	22
2.3 Equação de Lienard . . . . .	24
<b>3 Conclusão</b>	<b>29</b>



# Capítulo 1

## 1 Aspectos Gerais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

### 1.1 Introdução

Seja  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{R}$  é a reta real e  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  é um espaço euclidiano de dimensão  $n$ . Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  uma aplicação contínua e  $I$  um intervalo não degenerado. A função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$  é uma solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2)$$

no intervalo  $I$  quando  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$  está contido em  $\Omega$  e  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .

Sejam  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  as componentes de  $f$ ;  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , com  $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ , será solução da equação (2) somente se cada  $\varphi_i$  é diferenciável no intervalo  $I$ ,  $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$  para todo  $t \in I$  e

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt} &= f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ .

**Definição 1.1.** Seja  $\Omega$  um aberto contido em  $I \times \mathbb{E}$ , onde  $I$  é um intervalo da reta não degenerado e  $\mathbb{E}$  um espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  um aplicação contínua. Fixado o par  $(t_0, x_0)$  em  $\Omega$ , chamado de *valor inicial* para a equação diferencial ordinária dada por  $f$ , chamamos de *problema de Cauchy* associado a  $f$  com valor inicial  $(t_0, x_0)$  o problema definido por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Neste caso, a aplicação  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$  é uma solução do problema de Cauchy dado por  $f$ , com valor inicial  $(t_0, x_0)$ , se  $\varphi$  é solução da EDO dada por  $f$  e se  $\varphi(t_0) = x_0$ .

O problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial indica que sob as condições de que se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sejam contínuas no subconjunto  $\Omega$ , então  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  possui uma única solução no intervalo que contém  $t_0$ .

**Exemplo:** Resolver o problema de Cauchy

$$y' = 2t(1 + y), \quad y(0) = 0.$$

Primeiramente, iremos verificar que existe solução e posteriormente mostrar que tal solução é única dada a condição inicial. Se  $y = \varphi(t)$  temos a integral

$$\phi(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi(s)]ds,$$

que devido a condição inicial,  $\varphi_0(t) = 0$ , obtemos

$$\varphi_1(t) = \int_0^t 2s[1 + \varphi_0(s)]ds = \int_0^t 2sds = t^2.$$

Analogamente, temos

$$\varphi_2(t) = \int_0^t 2s[1 + \varphi_1(s)]ds = \int_0^t 2s[1 + s^2] = t^2 + \frac{t^4}{2}ds.$$

Sucessivamente, observamos que

$$\varphi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Assim para  $n = 1$  a expressão é verdadeira. Supomos que para  $n = k$  a expressão seja válida empregamos para  $n = k + 1$ .

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t 2s[1 + \varphi_k(s)]ds = \int_0^t 2s[1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \cdots + \frac{s^{2k}}{k!}]ds.$$

Portanto,

$$\varphi_{k+1}(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}.$$

Observe que a expressão acima é caracterizada pela série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$  conhecida como uma série de Taylor, o que nos garante que para todo  $t$  no intervalo a solução  $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$  pode ser diferenciada e integrada.

Se a série convergir, então  $\varphi(t)$  é solução do problema de Cauchy. Pelo teste da razão vemos que para cada  $t$

$$\left| \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!} \frac{k!}{t^{2k}} \right| = \frac{t^2}{(k+1)} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

ou seja,  $\varphi(t)$  é uma solução do problema de Cauchy.

Para verificar a unicidade, vamos supor que existam duas soluções  $\varphi$  e  $\phi$  para o problema de Cauchy. Como ambas são soluções, subtraímos utilizando a forma de integral, ou seja

$$\varphi(t) - \phi(t) = \int_0^t 2s[\varphi(s) - \phi(s)] ds.$$

Dessa forma, o valor absoluto para  $t > 0$

$$\begin{aligned} |\varphi(s) - \phi(s)| &= \left| \int_0^t 2s[\varphi(s) - \phi(s)] ds \right| \\ &\leq \int_0^t 2s |\varphi(s) - \phi(s)| ds. \end{aligned}$$

Tomando o intervalo  $0 \leq t \leq A/2$  com  $A$  arbitrário, temos que  $2t \leq A$ , então

$$|\varphi(s) - \phi(s)| \leq A \int_0^t |\varphi(s) - \phi(s)| ds. \quad (3)$$

Podemos definir uma função  $U$  sendo

$$U(t) = \int_0^t |\varphi(s) - \phi(s)| ds.$$

Da expressão acima observamos que  $U(0) = 0$  e  $U(t) \geq 0$  para  $t \leq 0$ . Além disso,  $U$  é diferenciável e sua derivada é  $U' = |\varphi(s) - \phi(s)|$ . Portanto, de (3) temos

$$U'(t) - AU(t) \geq 0. \quad (4)$$

Agora, multiplicaremos por  $e^{-At}$  para obtermos a derivada de (4), assim

$$[e^{-At}U(t)]' \leq 0.$$

Integrando, obtemos que  $e^{-At}U(t) \leq 0$  concluindo que  $U(t) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Observamos que  $U(t) \geq 0$  para  $t \geq 0$ . Conseqüentemente  $U(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Dessa forma  $U'(t) = 0$  o que implicaria que  $\varphi(t) = \phi(t)$  contradizendo a hipótese. Dessa forma mostramos a unicidade da solução.

Outro caso interessante é observado no problema de Cauchy,

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x - \beta y, \\y' &= \beta x + \alpha y, \\x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0.\end{aligned}$$

Temos um caso homogêneo de uma equação linear complexa com coeficientes constantes onde ilustraremos as possibilidades para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

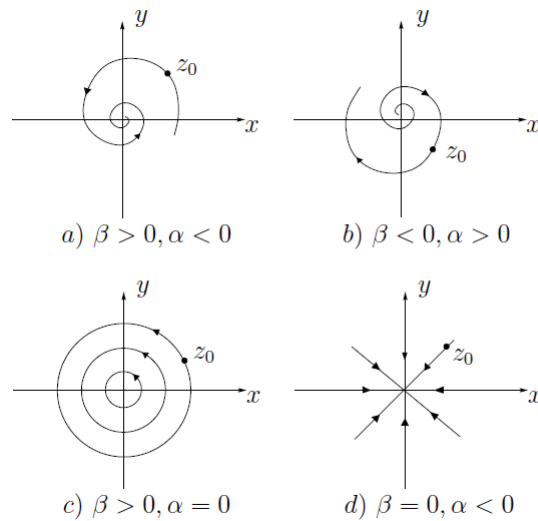


Figura 1: Possibilidades para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$

## 1.2 Teorema do Ponto Fixo e Teorema de Picard

Para se demonstrar a unicidade e existência de soluções é usual a utilização do Teorema de Picard, que utiliza o método de aproximações sucessivas para a demonstração, juntamente com o resultado do lema da contração ou teorema do ponto fixo garantindo a unicidade da solução. Antes disso, definiremos o que é uma aplicação *Lipschitziana*.

**Definição 1.2.** Uma aplicação  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se *Lipschitziana* em  $\Omega$  em relação à segunda variável se existe uma constante  $K$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ ;  $K$  chama-se *constante de Lipschitz* de  $f$ .

Dizemos que a aplicação  $f$  é localmente lipschitziana em  $\Omega$  se para todo  $(t_0, x_0)$  existe uma vizinhança  $V = V(t_0, x_0)$  tal que  $f|_V$  é lipschitziana em  $V$ .

**Teorema 1.3** (Teorema do Ponto Fixo). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração, isto é  $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$  com  $0 \leq K < 1$ . Então,  $F$  possui um único ponto fixo  $p$ , por  $F$ , isto é  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ , ou seja,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in X$  e  $F^n(x)$  é definido por  $F(F^{n-1}(x))$ .*

**Demonstração:** Demonstraremos primeiro a unicidade do ponto fixo. Sejam  $p$  e  $p_1$  dois pontos fixos. Então

$$d(p, p_1) = d(F(p), F(p_1)) \leq Kd(p_1, p).$$

Como  $0 \leq K < 1$ , então  $d(p, p_1) = 0$ . Logo  $p = p_1$ , o que garante a unicidade.

Sejam  $x \in X$  e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = F^n(x)$ , mostraremos que a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy. Por indução, mostraremos que  $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1)$  é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n = 0$  a desigualdade é trivialmente verdadeira pois

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1).$$

Vamos supor agora que a desigualdade seja verdadeira para  $n$  e então mostraremos que é válida para  $n + 1$ . Como  $F$  é uma contração, segue-se que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) = d(F(F^n(x)), F(F^{n+1}(x))) = d(F(x_n), F(x_{n+1})) \leq \\ &\leq Kd(x_n, x_{n+1}) \leq K^{n+1}d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

logo, por indução,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sejam  $n, p \in \mathbb{N}$ . Pela desigualdade triangular obtemos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Pela hipótese de indução, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq K^n d(x_0, x_1) + K^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n+p} d(x_0, x_1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq K^n d(x_0, x_1) + \cdots + K^{n+p-1} d(x_0, x_1) \leq K^n (1 + \cdots + K^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} d(x_0, x_1) = \frac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1) - \frac{K^{n+p}}{1 - K} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

portanto,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x_0, x_1).$$

Como  $0 \leq K < 1$  observamos que quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $K^n \rightarrow 0$ , logo  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  a partir de um  $n, m \geq n_0$  com  $n, m \in \mathbb{N}$  o que mostra que a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, logo convergente. Provemos que  $\lim x_n = p$  é ponto fixo de  $F$ . De fato:

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

□

**Corolário 1.4.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto  $p$  fixo por  $F$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ .*

**Demonstração:** Seja  $p$  o ponto fixo atrator de  $F^m$  dado pelo Lema da Contração. Seja  $n = mk + l$ , com  $0 \leq l < m$ . Dado  $x \in X$ ,  $F^l$  é um ponto de  $X$ . Como  $p$  é atrator de  $F^m$ , temos  $[F^m]^k(F^l(x)) \rightarrow p$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $F^n(x) = [F^m]^k(F^l(x))$ , segue que  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo,  $p$  é ponto atrator de  $F$ . Além disso,  $p$  é ponto fixo. De fato,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p).$$

□

**Teorema 1.5** (Teorema de Picard). *Se  $F : D \rightarrow D$  é contínua e Lipschitziana na segunda variável de  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , dados  $(t_0, y_0) \in D$  existe uma única solução  $y = \varphi(t)$  satisfazendo*

$$\begin{aligned} y' &= F(t, \varphi(t)) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

*A solução existe em qualquer intervalo  $I$  não degenerado onde  $t_0 \in I$  com  $(t, \varphi(t)) \in D$  para todo  $t \in I$  com  $\varphi$  contínua.*

**Demonstração:** Inicialmente, tomemos  $a, b > 0$  onde  $R : \{(t, y) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  esteja contido em  $D$ . Como  $R$  é compacto (limitado e fechado), então existe  $m > 0$  tal que

$$\|F(t, y)\| \leq m, \quad \forall (t, y) \in R.$$

Se  $F$  é Lipschitziana, então seja  $k > 0$  a constante de Lipschitz no conjunto  $R$ , isto é,

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in R.$$

Tomando  $d = \min\{a, \frac{b}{m}\}$  e o intervalo  $I = [t_0 - d, t_0 + d]$ , iremos construir uma seqüência de funções  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  da seguinte forma,

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0, \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y_0(s)) ds, \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y_{n-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

As funções são contínuas no intervalo  $I$  e satisfazem

$$\begin{aligned} \|y_n(t) - y_0\| &\leq b \quad \forall t \in I, \quad \forall n \geq 0, \\ \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| &\leq \frac{m(kd)^n}{k n!} \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Mostraremos por indução que as condições acima são válidas. Para  $n = 1$  temos

$$\|y_1(t) - y_0\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, y_0(s))\| ds \leq m(t - t_0) \leq md \leq b.$$

Vamos supor agora que as condições são válidas para  $n$  e vamos verificar se vale para  $n + 1$ .

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, y_n(s))\| ds - \int_{t_0}^t \|F(s, y_{n-1}(s))\| ds.$$

Como  $F$  é Lipschitziana, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|F(s, y_n(s))\| ds - \int_{t_0}^t \|F(s, y_{n-1}(s))\| ds \leq K \int_{t_0}^t \|y_n(s) - y_{n-1}(s)\| ds \\ &\leq \frac{m k^{n+1}}{k n!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \leq \frac{m (k|t - t_0|)^{n+1}}{k n!(n+1)!} \leq \frac{m (k|t - t_0|)^{n+1}}{k (n+1)!}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq \frac{m (k|t - t_0|)^n}{k n!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos então que as condições são válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim sendo, temos que verificar agora se a sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Podemos escrever  $y_n(t)$  em forma de série

$$y_n(t) = y_0 + [y_1(t) - y_0(t)] + \cdots + [y_n(t) - y_{n-1}(t)]. \quad (5)$$

Como (5) é uma série de funções, podemos compará-la com a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m (k|t - t_0|)^n}{k n!} \quad (6)$$

para verificar sua convergência.

Dessa forma, como a série (6) converge, utilizando o critério de convergência de Weierstrass, verificamos que a série (5) converge uniformemente, ou seja, para uma função contínua  $y(t)$  temos que  $y_n(t) \rightarrow y(t)$  que justamente é a solução do problema de valor inicial dado.

Para a unicidade, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k|t-t_0|)^n}{n!}$  é convergente e é do tipo de soma infinita de  $e^n$ , consequentemente  $S_n = \frac{1}{1-x}$  para  $|x| < 1$ , logo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m (k|t-t_0|)^n}{k n!} \leq 1$ . Como  $F$  é contínua e lipschitziana,  $y_n$  é uma contração em  $D$  pois  $0 \leq k < 1$ . Pelo Teorema do Ponto Fixo, existe uma única solução  $y(t)$ .  $\square$



### 1.3 Campos Vetoriais e Fluxos

O sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}x'_1 &= X_1(x_1, \dots, x_n), \\x'_2 &= X_2(x_1, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= X_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

é dito autônomo, quando as funções  $X_i$  independem de  $t$ . Exemplo:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

**Definição 1.6.** Um campo vetorial de classe  $C^k$  com  $1 \leq k \leq \infty$  é uma aplicação  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  também de classe  $C^k$ . Associamos a esse campo a equação diferencial

$$x' = X(x). \tag{7}$$

São soluções de (7) as aplicações  $\varphi : I \rightarrow \Omega$ , tais que,  $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ ,  $\forall t \in I$ . Tais soluções são chamadas *curvas integrais* ou *trajetórias*.

**Definição 1.7.** Um ponto  $x$  é dito *ponto singular* ou *ponto de equilíbrio* do campo  $X$  se  $X(x) = 0$  e é chamado *ponto regular* de  $X$  se  $X(x) \neq 0$ .

Observe que se  $x$  é um ponto singular, então  $\varphi(t) = x$ ,  $\forall t \in I$  e se  $\varphi(t) = x$  então  $\varphi'(t) = 0 = X(\varphi(t)) = X(x) = 0$ . Logo, por definição,  $x$  é ponto singular. Uma curva integral chama-se *máxima* se para toda curva  $\psi : J \rightarrow \Omega$ , tal que  $I \subseteq J$  e  $\varphi = \psi|I$  então  $I = J$ , por sua vez  $\varphi = \psi$ . O intervalo  $I$  é dito intervalo máximo.

Utilizaremos três resultados para o estudo do comportamento das equações diferenciais autônomas, são eles:

- (a) (*Existência e unicidade de soluções máxima*). Para cada  $x \in \Omega$  existe um intervalo aberto  $I_x$ , onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x$  de tal modo que  $\varphi_x(0) = x$ .
- (b) (*Propriedade de grupo*). Se  $y = \varphi_x(s)$  e  $s \in I_x$ , então  $I_y = I_x - s = \{r - s; r \in I_x\}$ ,  $\varphi_y(0) = y$  e  $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$ ,  $\forall t \in I_y$ .

(c) (*Diferenciabilidade em relação às condições iniciais*). O conjunto  $D = \{(t, x); x \in \Omega, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^k$ . Além disso  $\varphi$  satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x), D_2 \varphi(t, x)|_{t=0} = E,$$

para todo  $(t, x) \in D$ . Aqui  $E$  denota a identidade de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.8.** A aplicação  $\varphi : D \rightarrow \Omega$  é chamada de *fluxo gerado* pelo campo  $X$ .

Observe que o fluxo gerado satisfaz as condições da definição de Fluxo, isto é,  $\varphi(0, x) = x$  e  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ .

Posteriormente utilizaremos o resultado dos lemas apresentados na sequência para o estudo de retrato de fase de um campo vetorial. Seguem os lemas:

**Lema 1.9.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $x \in \Omega$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  então  $\varphi_x(t) \rightarrow \partial\Omega$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$  ou  $t \rightarrow \omega_-(x)$ , ou seja, para todo compacto  $K \subseteq \Omega$ , existe  $\epsilon = \epsilon(K) > 0$  tal que se  $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x)]$ , então  $\varphi_x(t) \notin K$*

**Demonstração:** Suponhamos que exista um compacto  $K \subseteq \Omega$  e uma sequência  $t_n \rightarrow \omega_+(x) < \infty$  tal que  $\varphi_x(t_n) \in K$ , para todo  $n$ . Então, existe uma subsquência, denotada por  $\varphi_x(t_k)$ , tal que  $\varphi_x(t_k)$  converge para um ponto  $x_0 \in K$ . Agora, tomemos  $b > 0$  e  $\alpha > 0$ , tais que  $B_b \times I_\alpha \subseteq D$ , sendo  $D = \{(t, x) : x \in \Omega, t \in I_x\}$ , onde  $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x_0| \leq b\} \subseteq \Omega$  e  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t| \leq \alpha\}$ .  $D$  é aberto pela definição 1.4 (c). Além disso, por (b),  $\varphi_x(t_k + s)$  está definido para  $s < \alpha$  e coincide com  $\varphi_y(s)$  para  $k$  suficientemente grande, onde  $y = \varphi_x(t_k)$ . Decorrendo que  $t_k + s > \omega_+(x)$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Lema 1.10.** *Seja  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial tal que  $|X(x)| \leq C$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Para esta demonstração, mostraremos que  $\omega_+(x) = \infty$ . Suponha por absurdo que  $\omega_+(x) < \infty$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $t > 0$ , sendo assim

$$|\varphi_x(t) - \varphi_x(0)| = \left| \int_t^0 \frac{d}{dt}(\varphi(s, x)) ds \right| = \left| \int_t^0 X(\varphi(s, x)) ds \right| \leq ct \leq c(\omega_+(x)).$$

Assim,  $\forall t \in [0, \omega_+(x)]$ ,  $\varphi_x(t)$  é uma bola fechada de centro  $x = \varphi_x(0)$  e raio  $\omega_+(x)$  contradizendo o Lema 1.9.

**Lema 1.11.** Se  $\varphi_x$  é uma solução regular de (7) definida no intervalo máximo  $I_x$  e  $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$ , então  $I_x = \mathbb{R}$ ,  $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$ , para todo  $t$ , onde  $c = t_2 - t_1$ .

**Demonstração:** Definimos a aplicação  $\psi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $\psi(t) = \varphi_x(t - c)$ . Dessa forma temos  $\psi'(t) = \varphi'_x(t - c) = X(\varphi_x(t - c)) = X(\psi(t))$  e  $\psi(t_2) = \varphi_x(t_2 - t_2 + t_1) = \varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ . Pela unicidade de soluções, tem-se  $\varphi_x(t) = \varphi_x(t + c)$  com  $[t_2, t_2 + c] \in I_x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Obtemos então  $I_x = \mathbb{R}$ .

## 1.4 Retrato de fase de um campo vetorial

A imagem da curva integral de  $X$  pelo ponto  $p$  definida como  $\gamma_p = \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$  é chamada *órbita de  $X$  pelo ponto  $p$* . Duas órbitas ou são iguais ou são disjuntas, ou seja,  $\Omega$  é decomposta numa união disjunta de curvas diferenciáveis onde cada curva pode ser:

- (a) imagem biunívua de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,
- (b) um ponto, ou,
- (c) difeomorfa a um círculo.

No caso (b),  $p = \gamma_p$  a órbita chama-se *ponto singular*, no caso (c) a órbita chama-se *fechada* ou *periódica*.

Um *retrato de fase* de um campo  $X$  é um conjunto aberto  $\Omega$  contendo a decomposição das órbitas de  $X$ . Essas órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais de campo  $X$ .

**Exemplo:** Um campo  $X$  de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , em  $\mathbb{R}$ , onde  $X$  possui um número finito de pontos singulares. Sejam  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  e  $a_0 = -\infty$  e  $a_{n+1} = \infty$ . Na Figura 2 ilustramos o gráfico e o retrato de fase de  $X$  em  $\mathbb{R}$ .

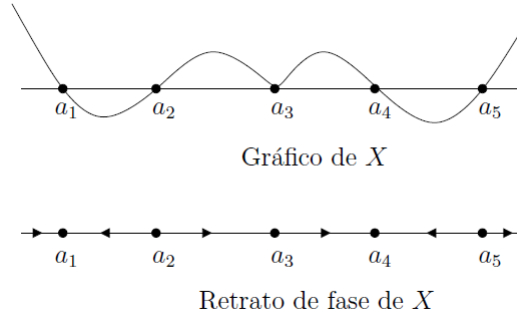


Figura 2: Gráfico e Retrato de Fase do campo  $X$

**Lema 1.12.** *Todo subgrupo aditivo  $K \neq \{0\} \in \mathbb{R}$  é da forma  $K = \sigma\mathbb{Z}$ ,  $\sigma > 0$  ou é denso em  $\mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Como, por hipótese,  $K \neq \{0\}$ , então  $K \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ , onde  $\mathbb{R}_+$  denota os reais positivos, pois existe  $k \in K$ , com  $k \neq 0$ , o que implica que  $k$  ou  $-k$  está em  $K \cap \mathbb{R}_+$ . Seja  $\sigma = \inf[K \cap \mathbb{R}_+]$ . Se  $\sigma > 0$ ,  $K = \sigma\mathbb{Z}$ , pois se  $k \in K - \sigma\mathbb{Z}$ , existe um único  $c \in \mathbb{Z}$ , tal que  $c\sigma < k < (c+1)\sigma$  e, portanto,  $0 < k - c\sigma < \sigma$  e  $k - c\sigma \in K \cap \mathbb{R}_+$ , o que contraria o fato de  $\sigma = \inf[K \cap \mathbb{R}_+]$ . Se  $\sigma = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $k \in K$  tal que  $|k - t| < \epsilon$ , o que implica que  $K$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.13.** *Se  $\varphi_x$  é uma solução máxima de  $x' = X(x)$  em  $I_x$ , então verifica-se uma única das seguintes alternativas:*

- (a)  $\varphi_x$  é injetiva ;
- (b)  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante ( $\varphi(t) = p, \forall t \in I_x$ );
- (c)  $I_x = \mathbb{R}$  e  $\varphi_x$  é periódica.

**Demonstração:** Se  $\varphi_x$  não é injetiva então  $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$  para algum  $t_1 \neq t_2$ . Pelo Lema 1.11,  $I_x = \mathbb{R}$ ,  $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  com  $c = t_2 - t_1$  e  $\varphi_x$  é uma solução periódica. Para continuar a demonstração, precisamos provar que o conjunto

$$K = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(t+c) = \varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

é um subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$  pois todo subgrupo aditivo  $K \neq \{0\}$  de  $\mathbb{R}$  é da forma  $K = \sigma\mathbb{Z}$  onde  $\delta > 0$  ou  $K$  é denso em  $\mathbb{R}$ . Basta mostrar que:

- O conjunto  $K$  é não vazio.

- O conjunto é fechado para soma.
- Todo elemento do conjunto possui inverso aditivo.

$K$  é diferente do vazio pois  $c = t_2 - t_1 \in K$ . Tomando  $a, b \in \mathbb{R}$  temos que  $\varphi(t + a + b) = \varphi(t + a) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . Por fim, seja  $d \in \mathbb{R}$  temos  $\varphi(t) = \varphi(t - d + d) = \varphi(t - d), \forall t \in \mathbb{R}$ , logo  $-d \in \mathbb{R}$ . Por outro lado, se  $C_n \in K$  é uma sequência, tal que,  $C_n \rightarrow c$ , então  $c \in K$  pois

$$\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t + \lim_{n \rightarrow \infty} C_n) = \varphi_x(\lim_{n \rightarrow \infty} (t + c_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_x(t + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,  $K$  é fechado e é um subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ . Portanto  $K$  é denso em  $\mathbb{R}$  ou  $K = \sigma\mathbb{Z}$ .

## 1.5 Equivalência e conjugação de campos vetoriais

Para compararmos campos vetoriais e seus retratos de fase, utilizamos alguns recursos de equivalência utilizando homeomorfismo conforme as definições que seguem. Essas definições são de suma importância para o entendimento do Teorema do Fluxo Tubular onde podemos tratar de uma conjugação de um campo com determinadas condições em relação ao campo constante  $Y = (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.14.** Sejam  $X_1, X_2$  campos vetoriais nos abertos  $\Omega_1, \Omega_2$  de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  é topologicamente equivalente (resp.  $C^k$ -equivalente) a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^k$ )  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  levando órbita de  $X_1$  em órbita de  $X_2$  preservando a orientação. O homeomorfismo  $h$  é dito equivalência topológica entre  $X_1$  e  $X_2$ .

**Definição 1.15.** Sejam  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos gerados pelos campos  $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Diz-se que  $X_1$  é topologicamente conjugado (resp.  $C^k$ -conjugado) a  $X_2$  quando existe o homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^k$ )  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  de tal modo que  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D_1$ .

**Lema 1.16.** Sejam  $X_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos  $C^k$  e  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ . Então  $h$  é uma conjugação entre os campos  $X_1$  e  $X_2$  se, e somente se,

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \forall p \in \Omega_1. \quad (8)$$

**Demonstração:** Sejam  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \Omega_1$  e  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \Omega_2$  os fluxos de  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Vamos supor que  $h$  satisfaz (8). Dado  $p \in \Omega_1$ , seja  $\psi(t) = h(\varphi_1(t, p)), t \in I_1(p)$ . Então  $\psi$  é solução do problema de Cauchy  $x' = X_2(x), x(0) = h(p)$  pois

$$\psi'(t) = Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) = Dh(\varphi_1(t, p)) X_1(\varphi_1(t, p)) = X_2(h(\varphi_1(t, p))) = X_2(\psi(t)).$$

Portanto  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ . Reciprocamente, suponhamos que  $h$  seja uma  $C^r$  - conjugação. Como  $h$  é difeomorfismo, pela definição 1.8. dado  $p \in \Omega_1$  temos  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)), t \in I_1(p)$ . Derivando em relação a  $t$  com  $t = 0$  temos

$$Dh(\varphi_1(0, p)) = D\varphi_2(0, h(p)) \Rightarrow Dh(\varphi_1'(t, p)) = \varphi_2'(h(p)) \Rightarrow DhX_1(p) = X_2(h(p)).$$

O exemplo a seguir ilustra como verificar a conjugação entre campos através do Lema 1.16.

**Exemplo:** Tomando os campos  $X(x, y) = (x, -y)$  e  $Y(x, y) = (x, -y + x^3)$  verificaremos se  $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$  é uma conjugação. Aplicando o Lema, em termos de matrizes temos a jacobiana,

$$DhX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3x^2}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3x^3}{4} - y \end{bmatrix} \quad (9)$$

Observe que  $Y(h(x, y)) = [x, -y + \frac{3x^3}{4}]$ , portanto  $Dh(x, y)X(x, y) = Y(h(x, y))$ .

## 1.6 Teorema do Fluxo Tubular

O intuito e objetivo desse teorema é estudar o comportamento local de soluções próximas a um ponto que não seja estacionária. Se  $p$  é um ponto regular de um campo vetorial  $X$ , de classe  $C^k$  com  $k \geq 1$ , o teorema de Fluxo Tubular nos garante que existe um difeomorfismo de classe  $C^k$  conjugando  $X$ , em uma vizinhança de  $p$  com o campo constante  $Y = (1, 0, \dots, 0)$ . Dessa forma, dois campos  $X$  e  $Z$  são localmente  $C^k$ -conjugados em torno de pontos regulares.

**Definição 1.17.** Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$  com  $k \geq 1$  e  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  aberto e além disso  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  um aberto. Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow \Omega$  chama-se seção transversal local de  $X$  quando para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$  e  $X(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida. Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo então  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $X$ .

**Teorema 1.18. (Teorema de Fluxo Tubular)** *Seja  $p$  um ponto não singular do campo  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  e  $f : A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $X$  de classe  $C^k$  com  $f(0) = p$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\Omega$  e um difeomorfismo  $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$  de classe  $C^k$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centro na origem  $0 = f^{-1}(p)$  de tal forma que*

$$(a) \ h(\Sigma \cap V) = 0 \times B;$$

(b)  $h$  é uma  $C^k$ -conjugação entre  $X|_V$  e o campo constante  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração:** Seja  $\varphi : D \rightarrow \Omega$  o fluxo do campo  $X$ . Definimos a aplicação  $\psi : D_A \rightarrow U$  onde  $D_A = \{(t, u) : (t, f(u)) \in D\}$  de tal modo que  $\psi(t, u) = \varphi(t, f(u))$ , em outras palavras a aplicação  $\psi$  leva as linhas paralelas ao eixo  $t$  em curvas integrais do campo  $X$  passados  $t$  unidades de tempo. Verificaremos que  $\psi$  é um difeomorfismo local em uma vizinhança da origem. Pelo Teorema da Função Inversa (demonstrado em [5], p.115), basta mostrarmos que  $D\psi(0)$  é um isomorfismo. De fato,

$$D_t\psi(0, 0) = \varphi'(0, f(0)) = X(\varphi(0, p)) = X(p).$$

Além disso,  $D_u\psi(0, 0) = \varphi'(0, f(u)) = Df(u)$ ,  $\forall u \in A$ . Portanto  $D\psi(0)$  é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, existem  $\epsilon > 0$  e uma bola  $B \in \mathbb{R}^{n-1}$  com centro na origem tal que  $\psi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$  é um difeomorfismo sobre  $V = \psi((-\epsilon, \epsilon) \times B)$ . Definindo  $h = (F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B})^{-1}$  e como  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo constante, verificaremos que  $h^{-1}$  conjugua os campos  $Y$  e  $X$ , pelo Lema 1.16:

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u).Y(t, u) &= D\psi(t, u).(1, 0, \dots, 0) = D_1\psi(t, u) \\ &= X(\varphi(t, f(u))) = X(\psi(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

o que prova a conjugação. □

**Definição 1.19.** Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , chama-se hiperbólico se todos autovalores de  $DX(p)$  tem parte real diferente de zero.

**Teorema 1.20. Teorema de Hartman-Grobman.** *Sejam  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças  $W$  de  $p$  em  $\Omega$  e  $V$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X|_W$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_V$ .*

Em suma o Teorema de Hartman-Grobman nos diz que dado um sistema não linear e sua linearização em torno de um ponto hiperbólico, então o teorema garante a existência de um homeomorfismo que faz uma conjugação topológica entre os dois sistemas. Dessa forma podemos estudar o comportamento qualitativo do sistema original em torno desses pontos singulares hiperbólicos.

## 1.7 A transformação de Poincaré

O objetivo de se utilizar a transformação de Poincaré é buscar entender o comportamento das trajetórias (soluções da EDO) por meio do comportamento de certas transformações. A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada  $\gamma$  de um campo vetorial é um difeomorfismo  $\pi$  que definiremos a seguir. Esta transformação descreve o comportamento do campo numa vizinhança de  $\gamma$ .

Seja  $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq \tau_0\}$  uma órbita periódica de período  $\tau_0$  de um campo  $X$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , definido em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  em  $p$ . Em virtude da continuidade do fluxo  $\varphi$  de  $X$ , para todo ponto  $q \in \Sigma$  próximo de  $p$  a trajetória  $\varphi(t, q)$  permanece próxima a  $\gamma$ , com  $t$  em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo,  $[0, 2\tau_0]$ . Define-se  $\pi(q)$  como o primeiro ponto onde esta órbita, partindo de  $q$ , volta a interceptar novamente a seção  $\Sigma$ . Seja  $\Sigma_0$  o domínio de  $\pi$ . Naturalmente  $p \in \Sigma_0$  e  $\pi(p) = p$ . Em outras palavras, estamos observando o comportamento das trajetórias passando pelos pontos  $\pi(q_i) \in \Sigma$  próximos de uma vizinhança do ponto  $p$  que respeitam a continuidade do fluxo.

Muitas propriedades do retrato de fase de  $X$  perto de  $\gamma$  se refletem em  $\pi$  e reciprocamente. Por exemplo, as órbitas periódicas de  $X$  vizinhas de  $\gamma$  correspondem aos pontos periódicos de  $\pi$ , que são pontos  $q \in \Sigma_0$  para os quais  $\pi^n(q) = q$  para algum inteiro  $n \geq 1$ . O comportamento assintótico das órbitas de  $X$  perto de  $\gamma$  também é descrito por  $\pi$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ , onde  $d(\varphi(t, q), \gamma) = \inf\{|\varphi(t, q) - r|, r \in \gamma\}$ .

A aplicação  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  sobre sua imagem. Tomando  $\varphi(\tau_0, p) = p$ , pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\Sigma$  tal que  $\varphi(\tau_0, q) \in V$  para todo  $q \in \Sigma_0$ . Seja a aplicação  $\xi : V \rightarrow \Sigma$  temos que  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ , onde  $\pi(q) = \xi(\varphi(\tau_0, q))$ . Podemos expressar  $\pi$  como sendo:  $\pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$  onde



tal  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$  significa o tempo  $\tau(x)$  que a órbita passando por  $x$  leva para interceptar a transversão  $\Sigma$ .

## 1.8 Ciclos Limites no plano

**Definição 1.21.** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $F : U \rightarrow U$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $F$  chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $F$  que intercepta  $V$ .

**Proposição 1.22.** *Existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites:*

- (a) *Estável, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;*
- (b) *Instável, quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;*
- (c) *Semi-estável, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap \text{Ext } \gamma$ ; e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap \text{Int } \gamma$ , ou o contrário.*

**Demonstração:** Diminuindo a vizinhança  $V$  se necessário, podemos supor que ela não contém singularidades. Sejam  $p \in \gamma$  e  $\Sigma$  uma seção transversal a  $F$  em  $p$ . Seja  $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré. Suponhamos que  $\Sigma$  esteja ordenado, sendo o sentido positivo de  $\text{Ext } \gamma$  para  $\text{Int } \gamma$ . Dado  $q \in \Sigma_0 \cap \text{Ext } \gamma$ , temos  $\pi(q) > q$  ou  $\pi(q) < q$ . Sem perda de generalidade, suponhamos  $\pi(q) > q$ . Considere a região  $A$  limitada por  $\gamma$ , pelo arco de trajetória  $\widehat{q\pi(q)}$  e pelo segmento  $\overline{q\pi(q)} \subset \Sigma_0$ . A região  $A$  é homeomorfa a um anel e positivamente invariante, ou seja, dado  $x \in A$ ,  $\varphi(t, x) \in A$  para todo  $t \geq 0$ . Isto segue pela unicidade de soluções e pela orientação das órbitas. Além disso,  $\varphi(t, x)$  intercepta  $\Sigma$  numa sequência estritamente monótona de pontos  $x_n$  que converge para  $p$ . Concluí-se então que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$ .

Se  $\pi(q) < q$ , considerando o campo  $-F$ , fica provado que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$  para todo  $x \in A$ . Podemos fazer as mesmas considerações em  $\text{Int } \gamma$ . Basta agora combinar as possibilidades para concluir a demonstração.  $\square$

**Observação 1.23.** Com as notações introduzidas na Proposição 1.22, temos que  $\gamma$  é um ciclo limite  $\Leftrightarrow p$  é um ponto fixo isolado de  $\pi$ . Além disso,

- (a)  $\gamma$  é estável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p| \forall x \neq p$  próximo de  $p$ ;
- (b)  $\gamma$  é instável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| > |x - p| \forall x \neq p$  próximo de  $p$ ;

(c)  $\gamma$  é semi-estável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p| \forall x \in \Sigma \cap \text{Ext } \gamma$  próximo de  $p$ , e  $|\pi(x) - p| > |x - p| \forall x \in \Sigma \cap \text{Int } \gamma$  próximo de  $p$  ou o contrário.

## 1.9 O Teorema de Poincaré - Bendixson

**Definição 1.24.** Seja  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , com  $U$  um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  a curva integral de  $F$  passando pelo ponto  $p$ , definida no intervalo máximo  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$ , definimos os seguintes conjuntos:

$$\omega(p) = \{q \in U, \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

De forma analoga, temos para  $\omega(p) = -\infty$

$$\alpha(p) = \{q \in U, \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

**Teorema 1.25.** *Sejam  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  definido em  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\gamma^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$  a semiórbita positiva do campo  $F$  pelo ponto  $p$ . Se  $\gamma^+(p)$  está contida num subconjunto compacto  $K \subset U$ , então:*

- (a)  $\omega(p) \neq \emptyset$  (respectivamente,  $\alpha(p)$ );
- (b)  $\omega(p)$  é compacto, (respectivamente  $\alpha(p)$ );
- (c)  $\omega(p)$  é invariante por  $F$ , isto é, se  $q \in \omega(p)$ , então a curva integral de  $F$  por  $q$  está contida em  $\omega(p)$ ;
- (d)  $\omega(p)$  é conexo, (respectivamente,  $\alpha(p)$ ).

**Demonstração:** É suficiente mostrar o teorema para o conjunto  $\omega$ -limite.

- (a)  $\omega(p) \neq \emptyset$ .

Seja  $t_n = n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{\varphi(t_n)\} \subset K$  é compacto, existe uma subsequência  $\{\varphi(t_{n_k})\}$  que converge para algum ponto  $q \in K$ . Então,  $t_{n_k} \rightarrow \infty$ , quando  $n_k \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$ . Logo,  $q \in \omega(p) \neq \emptyset$ .

- (b)  $\omega(p)$  é compacto.

Como  $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$ , basta mostrar que  $\omega(p)$  é fechado. Seja  $q_n \rightarrow q$ ,  $q_n \in \omega(p)$ . Vamos mostrar que  $q \in \omega(p)$ . De fato, para cada  $q_n \in \omega(p)$ , existe uma sequência  $\{t_m^{(n)}\}$  tal que  $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$ , quando  $m \rightarrow \infty$ .

Tomemos, para cada sequência  $\{t_m^{(n)}\}$ , um ponto  $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$  e tal que  $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$ . Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \leq \frac{1}{n} + d(q_n, q).$$

Segue, então, que  $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ . Como  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , concluí-se que  $q \in \omega(p)$ .

(c)  $\omega(p)$  é invariante por  $F$ .

Seja  $q \in \omega(p)$  e seja  $q_0 = \varphi(t_0, q)$ . Como  $q \in \omega$ , existe  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$  quando  $t_n \rightarrow \infty$ . Pela continuidade de  $\varphi$ , segue que

$$q_0 = \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n + t_0, p).$$

Observe que a sequência  $(s_n) = (t_n + t_0)$  é tal que  $s_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(s_n, p) \rightarrow q_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $q_0 \in \omega(p)$ .

(d)  $\omega(p)$  é convexo.

Suponhamos, por absurdo, que  $\omega(p)$  seja não convexo. Então existem  $A$  e  $B$  fechados e não vazios tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $\omega(p) = A \cup B$ . Como  $A \neq \emptyset$ , existe uma sequência  $\{t'_n\}$  tal que  $t'_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t'_n) \rightarrow a \in A$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Analogamente, existe uma sequência  $\{t''_n\}$  tal que  $t''_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t''_n) \rightarrow b \in B$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Seja  $d = d(A, B) > 0$ . Podemos construir uma sequência  $\{t_n\}$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e tal que  $d(\varphi(t_n), A) < d/2$  e  $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$  para todo  $n$  ímpar.

Como a função  $g(t) = d(\varphi(t), A)$ ,  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ , para todo  $n$  ímpar é contínua e  $g(t_n) < d/2$  e  $g(t_{n+1}) > d/2$ , segue-se do Teorema do Valor Intermediário ([4]) que existe  $\tilde{t}_n$ ,  $t_n < \tilde{t}_n < t_{n+1}$  tal que

$$g(\tilde{t}_n) = d(\varphi(\tilde{t}_n), A) = d/2.$$

Desde que a sequência  $\{\varphi(\tilde{t}_n)\}$  está contida no compacto  $Q = \{x \in U; d(x, A) = d/2\} \cap K$ ,  $\{\varphi(\tilde{t}_n)\}$  possui uma subsequência convergente, que denotaremos por  $\{\varphi(\tilde{t}_k)\}$ . Seja  $\tilde{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tilde{t}_k)$ . Então  $\tilde{p} \in \omega(p)$ . Mas  $\tilde{p} \notin A$ , pois  $d(\tilde{p}, A) = d/2 > 0$ ; além disso,  $\tilde{p} \notin B$ , pois  $d(\tilde{p}, B) \geq d(A, B) - d(\tilde{p}, A) = d/2 > 0$ . O que mostra a contradição.  $\square$

Enunciaremos agora o Teorema de Poincaré-Bendixson.

**Teorema 1.26. Teorema Poincaré-Bendixson** *Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  uma curva integral de  $X$ , definida para todo  $t \leq 0$ , tal que  $\gamma^+(p)$  esteja contida num compacto  $K \subset \Omega$ . Suponha*

também que o campo  $X$  possua um número infinito de singularidade em  $\omega(p)$ . Temos as afirmativas.

(a) Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica.

(b) Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares, então  $\omega(p)$  consiste em um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando  $t \rightarrow +\infty$

(c) Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto singular.

# Capítulo 2

## 2 O Método de Averaging

Neste capítulo enunciaremos o teorema de Averaging de primeira ordem e apresentaremos uma aplicação do método para obter o número de ciclos limites de casos particulares dos resultados obtidos por Jaume Llibre, Ana Cristina Mereu e Marco Antonio Teixeira encontrados em [3].

### 2.1 Introdução

Em 1687, Isaac Newton apresentou a Lei da Gravitação Universal. Nesta época a ideia de que os planetas realizavam órbitas perfeitamente circulares já havia sido derrubada. Pela terceira lei de Newton, dois corpos interagem entre si influenciando a trajetória de ambos. Neste caso, a força de atração entre dois corpos já era compreendida devido a lei da gravitação universal. Com o problema de dois corpos resolvido e entendido, expandiu-se generalizando para a interação de três ou mais corpos entre si através da força gravitacional. As equações que descreviam o comportamento de três ou mais corpos eram inviáveis de se resolver analiticamente. Devido a complexidade de se trabalhar com esse problema surgiu a necessidade de se obter aproximações das soluções utilizando séries de potências. Dessa forma, Levantaram-se questões sobre a estabilidade do sistema solar bem como preocupações sobre artefatos na trajetória da Terra e sua órbita.

O método de averaging foi construído a partir dos trabalhos de Laplace sobre estabilidade do sistema solar. Lagrange e Clairaut corroboraram também com seus trabalhos contendo vários elementos e ideias que se encontram na teoria de Averaging. Em um dos trabalhos de Clairaut continha um método de integração a qual se preocupava também com os termos da série que cresciam ilimitadamente. Laplace trouxe vários elementos do método de averaging principalmente considerando perturbações de ordem alta. Lagrange contribuiu com o que conhecemos hoje como a forma padrão, bem como considerar apenas a primeira aproximação da expansão em séries de potência do parâmetro de perturbações no averaging de primeira ordem.

Outro grande contribuidor para a teoria de Averaging foi Poincaré. Poincaré provou que é possível descrever soluções periódicas usando séries convergentes em potências inteiras de um parâmetro  $\epsilon$  onde os coeficientes são funções limitadas no tempo. Essa ideia de Poincaré foi introduzida no método e formalizada na década de trinta, onde posteriormente foi apresentado o primeiro teorema de Averaging. Essa nova ferramenta tornou-se útil no estudo de existência de ciclos limites e principalmente trouxe uma nova abordagem para tratar de problemas como o conhecido *16º problema de Hilbert*.

De maneira geral o método de averaging permite relacionarmos quantitativamente soluções de sistemas autônomo e não autônomo e assim encontrar uma cota inferior de números de ciclos limites quando perturbamos o sistema com um parâmetro pequeno (denotado aqui como  $\epsilon$ ). O método permite reduzir o problema em apenas obter os zeros simples de uma função. Para isso, precisamos que a função esteja em sua forma padrão dada por:

$$f(t, x, \epsilon) = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 G(t, x, \epsilon).$$

## 2.2 O Teorema de Averaging

Seja o sistema na forma padrão

$$\begin{cases} \dot{x} &= \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 G(t, x, \epsilon), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (10)$$

com  $F$   $T$ -periódica na variável  $t$ . Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{y} &= \epsilon F^{-1}(y), \\ y(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (11)$$

onde

$$F^{-1}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Dessa forma podemos relacionar as soluções de (10) com as soluções do sistema (11). Abaixo enunciaremos o Teorema de Averaging Clássico onde a demonstração pode ser encontrada em [2] e [6].

**Teorema 2.1.** *Considere os problemas de valor inicial de (10) e (11) com  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  e  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ . Suponha que*

1.  $F, G$  são contínuas, limitadas por uma constante  $M$  independente de  $\epsilon \in [t_0, \infty] \times D$  e estão definidas.

2.  $G$  é lipschitziana em  $x \in D$ ;

3.  $F$  é  $T$ -periódica em  $t$ , com  $T$  constante independente de  $\epsilon$ ;

4.  $y(t)$  pertence a um subconjunto interior de  $D$  no tempo escala  $\frac{1}{\epsilon}$

Então,  $x(t) - y(t) = \zeta(\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  no tempo escala  $\frac{1}{\epsilon}$ , onde  $\zeta(\epsilon) = \epsilon^n$  tal que,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \zeta(\epsilon)$  existe.  $\zeta(\epsilon)$  é chamado de função ordem.

**Exemplo: Equação de Van der Pol**

Considere a equação

$$\ddot{x} + x = -\epsilon(1 - x^2)y.$$

Podemos rescreve-la na forma de sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\epsilon(1 - x^2)y - x. \end{cases} \quad (12)$$

Fazendo a mudança de coordenadas  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta = r \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta = -\epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin \theta - r \cos \theta. \end{cases} \quad (13)$$

Com algumas manipulações algébricas o sistema (13) pode ser escrito da seguinte forma,

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta \\ \dot{\theta} = -\epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin \theta \cos \theta - 1. \end{cases} \quad (14)$$

Tomando  $\theta$  como variável independente obtemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta}{\epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin \theta \cos \theta + 1}.$$

Pela expansão em série de Taylor, escrevemos  $\frac{dr}{d\theta}$  como,

$$\dot{r} = \epsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta + \zeta(\epsilon^2).$$

Aplicando o método de averaging podemos encontrar o número de ciclos limites da equação de Van der Pol. Pelo Teorema (2.1), basta encontrar os zeros simples de

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \sin^2 \theta d\theta.$$

Calculando a integral acima, obtemos a expressão  $F(r) = \frac{1}{8}\pi r(r^2 - 4)$  onde temos como raízes deste polinômio os valores de  $r = 0$  e  $r = \pm 2$ . Como  $r > 0$ , a única solução válida é  $r = 2$ , concluindo assim que temos apenas um ciclo limite para equação de Van der Pol.

### 2.3 Equação de Lienard

Lienard analisou a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

que ficou conhecida como equação de Lienard. Se tomarmos  $f(x) = \epsilon(x^2 - 1)$  e  $g(x) = x$  obtemos a equação de Van der Pol, sendo um caso particular da equação de Lienard.

Um dos objetivos desse trabalho é estudar e aplicar o Teorema de Averaging Clássico para descobrir o número de ciclos limites que bifurcam do centro linear

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

quando o mesmo é perturbado pela seguinte classe de sistemas diferenciais polinomiais de Lienard

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon(f_n(x)y + g_m(x)), \end{cases} \quad (15)$$

onde  $f_n$  e  $g_m$  são polinômios em  $x$  de grau  $n$  e  $m$ , respectivamente. Inicialmente iremos estudar o caso geral em que os polinômios citados possuem grau  $n$  e  $m$  e, em seguida, estudaremos alguns casos particulares do sistema (15) apresentando valores para  $n$  e  $m$  juntamente com alguns exemplos.

**Teorema 2.2.** *Considere o sistema (15), onde  $f_n(x)$  e  $g_m(x)$  são polinômios em  $x$  de grau  $n$  e  $m$  respectivamente. Então para um  $|\epsilon|$  arbitrariamente pequeno, o número máximo de*



ciclos limites do sistema diferencial de Lienard acima, de acordo com a teoria de Averaging de primeira ordem é  $\left[\frac{n}{2}\right]$ , ou seja, o maior inteiro positivo menor ou igual a  $n/2$ .

**Demonstração:** Utilizamos o Teorema (2.1) para provar esse teorema. Do sistema (15) escrevemos  $f_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$  e  $g_m(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i x^i$ . Utilizando coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , onde  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , escrevemos (15) como sendo:

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = r \sin \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = -r \cos \theta H(r, \theta). \end{cases} \quad (16)$$

Onde

$$H(r, \theta) = r \sin \theta \sum_{i=0}^n \alpha_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=0}^m \beta_i r^i \cos^i \theta.$$

Por meio de manipulação algébrica, o sistema (16) é escrito como

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon \sin \theta H(r, \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\epsilon}{r} \cos \theta H(r, \theta). \end{cases} \quad (17)$$

Tomando  $\theta$  como variável independente e utilizando a expansão em série de Taylor, temos a forma padrão

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \sin \theta H(r, \theta) + \zeta(\epsilon^2).$$

Pelo Teorema (2.1), obtemos

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta H(r, \theta) d\theta.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} \theta \sin^2 \theta d\theta &= 0, k = 0, 1, \dots \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \sin^2 \theta d\theta &= \mu_{2k} \neq 0, k = 0, 1, \dots \\ \int_0^{2\pi} \cos^k \theta \sin \theta d\theta &= 0, k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Resolvendo a integral acima, obtemos que

$$F(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i \mu_i r^{i+1}, \quad i = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que o polinômio  $F(r)$  tem no máximo  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  raízes positivas, conseqüentemente pode possuir a mesma quantidade de ciclos limite.

□

É interessante notar que o polinômio  $F(r)$  não depende do grau do polinômio  $g_m(x)$  e de seus coeficientes  $\beta_i$  e sim exclusivamente de  $f_m$  como acabamos de mostrar.

Iniciaremos agora o estudo de alguns casos particulares juntamente com alguns exemplos.

**Caso 1:**  $n = 4$  e  $m = 5$

Pelo resultado do Teorema (2.2) observamos que  $F(r)$  não depende do polinômio  $g_m(x)$ . Neste caso, temos que encontrar os zeros simples de

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta \sum_{i=0}^4 \alpha_i r^i \cos^i \theta d\theta.$$

Segue então que,

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta (\alpha_0 + r \cos \theta \alpha_1 + r^2 \cos^2 \theta \alpha_2 + r^3 \cos^3 \theta \alpha_3 + r^4 \cos^4 \theta \alpha_4) d\theta \Rightarrow$$

$$F(r) = \frac{(8\alpha_0 r + 2\alpha_2 r^3 + \alpha_4 r^5)}{16} = \frac{r(8\alpha_0 + 2\alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^4)}{16}.$$

Como queremos encontrar os zeros simples de  $F(r)$ , note que  $r = 0$  é uma raiz do polinômio. Tomando  $R = r^2$  temos

$$0 = 8\alpha_0 + 2\alpha_2 R + \alpha_4 R^2,$$

podendo possuir até duas soluções positivas  $R_1, R_2$ . Concluimos então que  $F(r)$  pode possuir no máximo dois zeros positivos  $r_1 = \sqrt{R_1}$  e  $r_2 = \sqrt{R_2}$  para  $r > 0$  e, portanto, para  $n = 4$  obtemos no máximo 2 ciclos limites conforme esperado pelo Teorema 2.2.

**Exemplo 2.3.** Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon[(1 - 3x^2 + x^3 + x^4)y + 3x^2] \end{cases}$$

Como já demonstrado, para  $n = 4$  temos o polinômio

$$F(r) = \frac{r(8a_0 + 2a_2 r^2 + a_4 r^4)}{16},$$

neste caso temos  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = -3$  e  $a_4 = 1$ . Agora basta obter as raízes da equação

$$0 = 8 - 6r^2 + r^4.$$

Substituindo  $R = r^2$  obtemos

$$0 = 8 - 6R + R,$$

tendo como raízes  $r = \pm\sqrt{2}$  e  $r = \pm 1$ . Como  $r > 0$  temos duas raízes possíveis. Portanto o sistema possui dois ciclos limites.

**Caso 2:**  $n = 6$

Novamente, utilizando o Teorema (2.1), temos o polinômio

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta \sum_{i=0}^6 \alpha_i r^i \cos^i \theta d\theta,$$

onde

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta ( \alpha_0 + r \cos \theta \alpha_1 + r^2 \cos^2 \theta \alpha_2 + r^3 \cos^3 \theta \alpha_3 + r^4 \cos^4 \theta \alpha_4 + r^5 \cos^5 \theta \alpha_5 + r^6 \cos^6 \theta \alpha_6 ) d\theta.$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$F(r) = \frac{r(64\alpha_0 + 16\alpha_2 r^2 + 8\alpha_4 r^4 + 5\alpha_6 r^6)}{128}.$$

Substituindo  $R = r^2$  e igualando a zero para obtermos as raízes do polinômio,

$$0 = 64\alpha_0 + 16\alpha_2 R + 8\alpha_4 R^2 + 5\alpha_6 R^3.$$

A equação acima possui três raízes positivas e podendo ter no máximo três ciclos limites.

**Exemplo 2.4.** Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \epsilon [(-\frac{1}{8} + \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{7}x^3 - \frac{7}{8}x^4 + \frac{1}{5}x^6)y]. \end{cases}$$

Onde  $\alpha_0 = -\frac{1}{8}$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \frac{7}{8}$ ,  $\alpha_3 = \frac{1}{7}$ ,  $\alpha_4 = -\frac{7}{8}$ ,  $\alpha_5 = 0$  e  $\alpha_6 = \frac{1}{5}$ . Temos o polinômio

$$F(r) = \frac{r(-8 + 14r^2 - 7r^4 + r^6)}{128}.$$

Tomando  $R = r^2$  e igualando a zero, obtemos

$$0 = r^3 - 7r^2 + 14r - 8,$$

onde possui raízes  $r = \pm 1$ ,  $r = \pm\sqrt{2}$ ,  $r = \pm 2$ . Como  $r > 0$  temos exatamente três raízes positivas, portanto a sistema acima possui no máximo três ciclos limites

### 3 Conclusão

A primeira parte dos estudos, focada no estudo teórico, foi de fundamental importância e serviu como base para o estudo do Método de *Averaging*. No desenvolvimento do estudo da Teoria de *Averaging* viu-se como uma excelente ferramenta para obter o número máximo de ciclos limites em sistemas planares perturbados por uma classe específica de sistemas diferenciais polinomiais de Lienard. Concluímos que o número máximo nessas condições pode ser  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  como mostrado no Teorema 2.2. Além disso, esse trabalho serviu como complemento de estudo para a graduação pois, contempla conteúdos que não foram abordados na formação. Outro fator importante foi o desenvolvimento e aprendizagem na utilização dos softwares *LaTeX* e *Mathematica* que são ferramentas fundamentais para elaboração de relatórios, gráficos e cálculos numéricos.

## Referências

- [1] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, 1979;
- [2] F. VERHULST, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991;
- [3] J. LLIBRE, A. C. MEREU AND M. A. TEIXEIRA, *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2010.
- [4] LIMA, E. L. *Análise Real*, v.1. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 189 p. (Coleção Matemática Universitária)
- [5] LIMA, E. L. *Análise Real*, v.2. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 202 p. (Coleção Matemática Universitária)
- [6] EUZÉBIO, Rodrigo D. *O Método do Averaging via Teoria do Grau de Brower e Aplicações*. 2011. 71f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto. 2011.