



**Universidade Federal De São Carlos**

***Campus Sorocaba***

**As transformações geométricas produzidas por alunos  
do 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo via  
registros de representação semiótica**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Bruno Luiz Freire**

**Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira**

**Sorocaba**

**2015**



**Universidade Federal De São Carlos**

***Campus Sorocaba***

**As transformações geométricas produzidas por alunos  
do 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo via  
registros de representação semiótica**

**Autor: Bruno Luiz Freire**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física, Química e Matemática (DFQM) da UFSCar, Campus Sorocaba, como requisito parcial para a obtenção da graduação em Licenciatura em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira**

**Licenciatura em Matemática  
Sorocaba 2015**



## Folha de Aprovação

**Bruno Luiz Freire**

As transformações geométricas produzidas por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo via registros de representação semiótica

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus Sorocaba*

Sorocaba 16/12/2015

Orientador: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Paulo César Oliveira – UFSCar (DFQM)

Membro 1: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires - UESC

Membro 2: \_\_\_\_\_

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Graciele Paraguaia Silveira – UFSCar (DFQM)

## **Dedicatória**

Àqueles que apesar de todas as adversidades sempre acreditaram que eu seria capaz de atingir meus objetivos.

## **Agradecimentos**

Agradeço à Deus.

Aos meus pais, por terem me deixado em condições de chegar até aqui.

À Thaís, minha noiva, pelas horas de incentivo e dedicação durante todo o percurso do trabalho.

Ao meu orientador, que ao aceitar orientar este trabalho, teve muita dedicação durante todo o percurso.

À Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, pelas condições de realização deste trabalho de conclusão de curso.

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo analisar a perspectiva moderna para simetria a partir da aplicação de tarefas para alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do município de Sorocaba-SP. Mais especificamente, apresentamos resultados de investigação em sala de aula apoiados na relação que o sujeito (aluno) estabelece com o saber (conceito de simetria) nas interações com os colegas e com o professor-pesquisador. Neste processo levamos em conta que se o aluno aprende, a sua relação com o saber é externalizada por meio de representações (CHARLOT, 2000). No caso do objeto matemático que é abstrato e, portanto, não perceptível; seu acesso se dá por meio de registros de representação semiótica (DUVAL, 2009). Para alinharmos nosso percurso teórico com o metodológico, nossa investigação de natureza qualitativa contou com a participação de 25 alunos. A coleta de dados foi obtida via registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula ou extra-classe. Trata-se de uma pesquisa de intervenção, devido à presença do professor-pesquisador na análise da aprendizagem de um conteúdo matemático específico. Os resultados da análise do material empírico de pesquisa apontaram que os alunos estabeleceram relações com o referido saber, sob diferentes isometrias (reflexão, translação e rotação), tanto do ponto de vista intuitivo (apreensão discursiva da figura construída) quanto do ponto de vista do desenho (construções realizadas ou não com instrumentos geométricos). Sob este último aspecto, destacamos a importância do desenho geométrico na aprendizagem do conceito de simetria na perspectiva moderna, especialmente, quando valorizamos a preservação de distâncias.

**Palavras chaves:** Simetria, Semiótica, Ensino Fundamental, Isometria, Ensino-aprendizagem.

## **Abstract**

This course work aims to analyze the modern perspective for symmetry based on the applications of tasks to sixth grades from a private school in Sorocaba-SP. More specifically, we presented the results of an investigation in the classroom, supported by the relationship between the individual( student) and the knowledge( symmetry concept), in the interactions with the colleagues and the teacher – researcher. In this process, we consider that, if the students learn, their relation with knowledge is outsourced by representations (CHARLOT, 2000). In this case of the mathematical object, which is abstract, and therefore, isn't perceptible, its access is carried out in registration of semiotic representation (DUVAL, 2009). To align our theoretical path with the methodological, our investigation of a qualitative nature, counted with the presence of 25 students. The data collection was obtained by written records of the activity performed by the students in the classrooms or extra-class. This is an intervention research, due to the presence of the teacher-researcher in the analysis of the learning of mathematical specific content. The result of the empirical material of the research analysis, pointed out that the students provided relationship with the referred knowledge under several isometrics (reflexion, translation and rotation), both from the intuitive point of view( discursive apprehension of the built figure) and for the point of view of the drawing (constructions realized or not with geometrical instruments). Under this last aspect, we emphasize the importance of geometric design in learning the concept of the symmetry in the modern perspective, especially, when we appreciate the distance preservation.

**Keywords:** Symmetry, semiotic, elementary school, isometrics, teaching-learning.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1: Simetria Axial (Reflexões)</b>	<b>14</b>
<b>Figura 2: Simetria de Translação</b>	<b>14</b>
<b>Figura 3: exercícios de congruência</b>	<b>16</b>
<b>Figura 4: Reflexão em relação à reta <math>r</math></b>	<b>19</b>
<b>Figura 5: Translação</b>	<b>19</b>
<b>Figura 6: Rotação</b>	<b>20</b>
<b>Figura 7: Distinção de zonas de atividades cognitivas mobilizadas em geometria.</b>	<b>24</b>
<b>Figura 8: Objetivo Sorocaba Centro</b>	<b>30</b>
<b>Tabela 1: Rendimento dos alunos na primeira fase das tarefas</b>	<b>37</b>
<b>Figura 9: protocola da questão 1 - 1ª fase</b>	<b>38</b>
<b>Tabela 2: Rendimento dos alunos na terceira fase das tarefas</b>	<b>40</b>
<b>Figura 10: protocolo da questão 1 - 3ª fase.</b>	<b>41</b>
<b>Figura 11: protocolo da questão 1- 3ª fase</b>	<b>42</b>

## **Sumário**

INTRODUÇÃO .....	9
1 – A CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA .....	10
1.1 Motivação: o marco inicial desta investigação.....	10
1.2 Simetria nos PCN do terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental.	11
<b>2 - NA TRILHA DO DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA.....</b>	<b>23</b>
2.1 O objeto matemático simetria sob a perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica.....	23
2.1.1 Análise da simetria de reflexão.....	28
2.1.2 Análise da simetria de translação.....	28
2.1.3 Análise da simetria de rotação.....	28
2.2 Escolha da metodologia de pesquisa.....	29
2.3 Objetivo Sorocaba – Unidade Centro.....	30
2.4 A turma do 6º ano.....	32
2.5 O planejamento das tarefas envolvendo o conceito de simetria.....	33
<b>3. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS TAREFAS.....</b>	<b>36</b>
3.1 Tarefas da 1ª e 2ª fase.....	36
3.2 Tarefas da 3ª fase.....	39
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>42</b>

## **INTRODUÇÃO**

O conceito de simetria no sistema apostilado do Objetivo é tratado sem uma perspectiva de construção conceitual. Neste sentido, elaboramos um conjunto de tarefas as quais foram aplicadas em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental II. Este trabalho mostra a possibilidade de inclusão deste conceito nas aulas de geometria, bem como a necessidade de rever a forma de tratamento dado às construções geométricas.

Nossa pesquisa é composta de três capítulos. O primeiro capítulo contém a construção do problema de pesquisa a partir da análise de vários documentos curriculares. No segundo capítulo apresentamos o viés metodológico para a coleta de dados da pesquisa. O terceiro capítulo é dedicado à análise dos dados. Reservamos o restante da redação do TCC para as considerações finais e referências bibliográficas.

# **1. A CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA**

## **1.1 Motivação: o marco inicial desta investigação**

O embrião desta pesquisa foi gerado a partir da leitura da Monografia de Mendes (2014) apresentada no Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio, ofertado pela Universidade Federal Fluminense.

Neste trabalho, analisou-se a perspectiva moderna do conceito de simetria apoiada em três ideias fundamentais: o conceito de função (transformação), o conceito de isometria e o conceito de invariância.

Além de apresentar aspectos históricos do conceito que culminou na definição moderna para simetria, Mendes (2014) confrontou-a tanto com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental I e II, quanto com a exposição do assunto em três coleções didáticas de Matemática do Ensino Fundamental II; utilizadas tanto no ensino público como no privado, escolhidas a partir do Programa Nacional do Livro Didático.

Em relação aos documentos curriculares (BRASIL, 1997, 1998) Mendes (2014) destacou que somente nos anos finais do Ensino Fundamental I, o estudo da simetria é abordado, não como um objeto em si, mas, sim, como um instrumento para identificar, reconhecer e descrever formas geométricas.

No que diz respeito aos anos iniciais do Ensino Fundamental II, Mendes (2014) destacou que a noção de simetria não fez parte do desenvolvimento do pensamento geométrico por meio de situações-problema.

Nos anos finais, o autor avaliou, entre outros itens, que nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) é feita menção às transformações de uma figura que deixam medidas invariantes (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados). Porém, segundo Mendes (2014), é relevante destacar a ausência conceitual para simetria.

Já em relação à análise de três coleções didáticas voltadas ao ensino da Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, Mendes (2014, p.45) enfatizou que “um erro frequente encontrado nas coleções didáticas foi o dos autores tentarem analisar simetrias de objetos tridimensionais usando, para isto, fotografias e ilustrações bidimensionais destes objetos”. Outro aspecto relevante é que apenas uma coleção tratou o conceito de simetria na perspectiva moderna.

O relato desta pesquisa bibliográfica motivou a construção de um projeto de pesquisa cujo desenvolvimento gerou o relato de pesquisa para o nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Para a construção do nosso problema de pesquisa, que será apresentado no final da seção 1.4 e 1.5, realizamos a leitura minuciosa dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental II (BRASIL, 1998) com o objetivo de tirarmos nossas próprias conclusões quanto ao que é proposto para o ensino e aprendizagem de simetria e confrontarmos com os resultados apontados por Mendes (2014). Em seguida analisamos o conteúdo programático das aulas do Sistema Objetivo para o Ensino Fundamental II, no qual ministramos aulas para turmas de sexto ano em uma das unidades de Sorocaba, interior de São Paulo.

Ao confrontar sobre o que é proposto nos documentos curriculares nacionais e o que é efetivamente trabalhado na sala de aula da referida Unidade do Sistema Objetivo, formulamos nossa questão de investigação presente no relato do TCC.

Para que o leitor possa acompanhar nossa trajetória de pesquisa apresentamos primeiramente nossas considerações sobre o conceito de simetria nos PCN (BRASIL, 1998) e, posteriormente a análise do conteúdo programático de geometria no referido material apostilado.

## **1.2 Simetria nos PCN do terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental**

A leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) deve-se ao fato que desenvolvemos nossa pesquisa de campo com alunos do Ensino Fundamental II, especificamente, estudantes do sexto ano.

Aprender e ensinar Matemática neste segmento escolar pressupõe a análise da tríade aluno-professor-saber. O professor deve desempenhar o papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, levando em conta, que tornar o saber matemático acumulado um saber escolar exige um tratamento deste conhecimento de modo a transformá-lo em informação (BRASIL, 1998)

No bloco temático Espaço e Forma, destacamos para o 6º e 7º ano

a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

Em termos de conceitos e procedimentos os PCN (Brasil, 1998) contemplaram a classificação de figuras bidimensionais e tridimensionais segundo diversos critérios, entre eles, pela determinação dos eixos de simetria de um polígono. Vale ressaltar que no caso dos objetos tridimensionais devemos utilizar planos de simetria. Ainda em relação ao conceito de simetria vale destacar as isometrias de reflexão, translação e rotação, além da identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, ângulos e comprimentos).

Para o oitavo e nono ano do Ensino Fundamental não observamos uma amplitude no estudo de simetria, conforme fragmento a seguir:

Construindo figuras a partir de reflexão por translação, por rotação, de uma figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). (BRASIL, 1998, p.86)

Na seção orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, “o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência” (BRASIL, 1998, p.124). Além disso, recomenda-se

que o conceito seja também observado em situações cotidianas, enfatizando que em inúmeros casos temos aproximações de planos simétricos e nas respectivas representações planas tais planos reduzem a eixos de simetria.

Extrapolando o contexto geométrico, os PCN associaram simetria com eventos probabilísticos equiprováveis:

Ao se realizarem experiências para calcular probabilidades, é interessante utilizar materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da “simetria” (dados, moedas), como também os que não possuem essa “simetria” (roletas com áreas desiguais para os números). (BRASIL, 1998, p.137)

Concordamos com Mendes (2014) que as orientações didáticas são relevantes para o estudo da simetria, porém, há ausência sobre a definição de simetria e o enfoque que deve ser apresentado aos alunos.

Passamos a seguir à análise do conteúdo programático de geometria, especificamente sobre o que é proposto para o conceito de simetria no Caderno do Professor da Coleção Didática do Sistema de Ensino Objetivo.

### **1.3 Simetria no Caderno do Professor do Sistema de Ensino Objetivo**

O Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2015) traz orientações didáticas que acompanham todas as propostas de trabalho, inclusive a programação aula a aula de todos os conteúdos programáticos para os diversos segmentos da Educação Básica. Especificamente em relação ao Ensino Fundamental II, debruçamos em descrever o que é proposto ao longo dos anos escolares sobre a abordagem do conceito de simetria.

A simetria é abordada somente no material do 2º bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental, restrito à descoberta do eixo de simetria de uma figura geométrica plana, bem como a quantidade do referido eixo. O propósito para esta abordagem é que o aluno utilize lápis, borracha e régua para dividir cada figura proposta nos exercícios de modo que cada parte seja reflexo da outra. Não há orientações para que o professor discuta questões pertinentes sobre o que significava obter figuras simétricas, tampouco uma abordagem conceitual sobre as isometrias de reflexão, translação e rotação. Contudo no 4º bimestre

do 6º ano são apresentadas as malhas quadrangulares para os alunos por meio de algumas atividades e a partir daí começamos a introduzir o conceito de simetria a partir desta série.

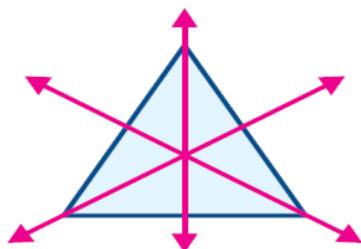
O roteiro desse Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2015) foi previsto para ser desenvolvido em quatro horas-aulas, apresentando apenas exercícios divididos em duas seções: a parte A refere-se à simetria axial (reflexões), e a da parte B envolve simetria de translação.

Com o objetivo de conhecermos o conteúdo dos enunciados dos exercícios, escolhemos primeiramente uma tarefa da parte A, para ilustrar melhor como o conteúdo é apresentado neste caderno, como segue:

**Figura 1:** simetria axial (reflexões)

Para cada figura, trace todas as retas que dividem cada uma, de modo que cada parte seja reflexo da outra, e complete a tabela.

1)



2)

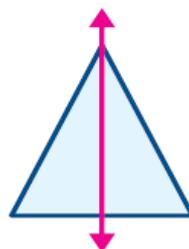


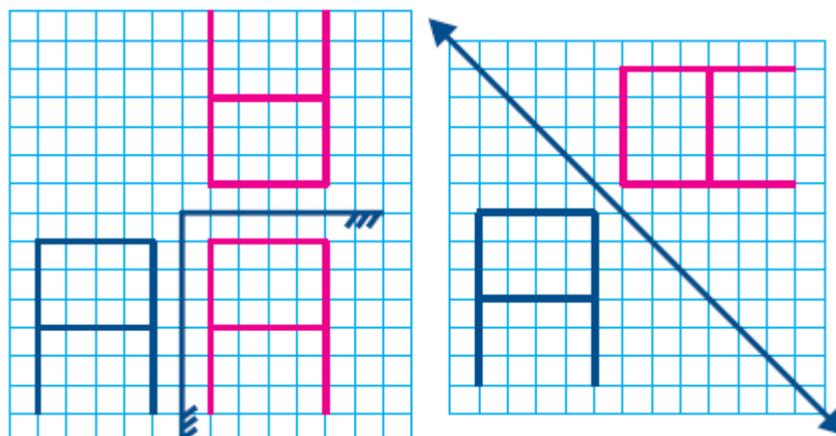
Figura	Nº de eixos de simetria	Figura	Nº de eixos de simetria
1	3	4	5
2	1	5	6

Fonte: Caderno do Professor, 8º ano, 2º bimestre, p.39

Como exemplo de exercício da parte B (simetria de translação), destacamos:

**Figura 2:** simetria de translação

Para cada figura, reproduza as letras “A”, de modo que uma seja reflexo da outra.



Fonte: Caderno do Professor, 8º ano, 2º bimestre, p.40

No caderno propor-se que as figuras na cor vermelha seja a resposta ideal para que o aluno responda. Neste exercício a ausência de uma direção, sentido e comprimento (amplitude) de deslocamento para a ocorrência da transformação do plano compromete a aprendizagem do aluno sobre o que é uma translação.

A análise do conteúdo das duas figuras, na verdade, implicitamente mostra uma transformação do plano via rotação. Porém, uma rotação necessita de um centro  $O$ , um ângulo de rotação ( $\alpha$ ) e um sentido, que pode ser horário ou anti-horário. Tais elementos também não são indicados no exercício. Esses conceitos serão mostrados na seção 1.4.

Tomando por base os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), cujo texto orienta que as atividades de transformação do plano podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias), verificamos se esta relação foi articulada nos planos de aula do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2015).

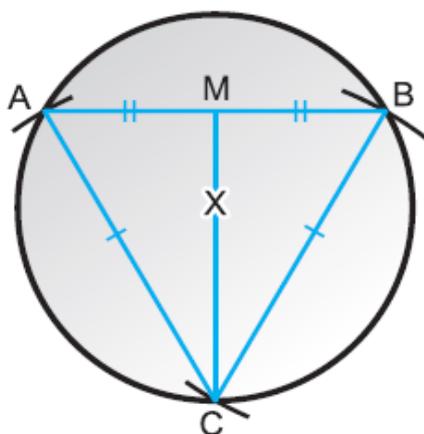
No mesmo Caderno do Professor (2º bimestre do 8º ano) há quatro horas-aulas previstas para abordar o conteúdo de congruência. No entanto, o plano de aula não foi desenvolvido a partir das transformações no plano. O objetivo destas aulas é identificar os casos de congruência entre dois

triângulos. O procedimento pedagógico para atingir tal objetivo visa exposição e exercícios, que poderão ser resolvidos em duplas ou grupos de três ou quatro alunos.

No plano de aula do conteúdo de congruência não há uma abordagem conceitual e, sim, apenas exercícios relacionados à figura plana triângulo inscrita ou não na circunferência, o que sugere que o aluno identifique os casos de congruência apenas de forma mecânica e não conceitual. A seguir apresentamos um exemplo de exercício para ratificar nosso parecer:

**Figura 3:** exercício de congruência

Para cada exercício, verifique se os pares de triângulos indicados são congruentes e, em caso afirmativo, indique os elementos congruentes e o caso de congruência.



Fonte: Caderno do Professor, 8º ano, 2º bimestre, p.66

Assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), constatamos que também no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2015) há ausência sobre a definição de simetria e o enfoque que deve ser apresentado aos alunos, limitou-se em exercícios cujo conteúdo revelou-nos apenas a identificação de eixos de simetria e reflexão de figuras planas em malhas quadriculadas.

Utilizando os conceitos apresentados no trabalho de Mendes (2014) ratificamos as considerações feitas pelo autor, além de acrescentar nossas próprias conclusões sobre o que é proposto para o ensino e aprendizagem de simetria.

Como professor de Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental da unidade Objetivo de Sorocaba, disponibilizamos de 6 aulas semanais para esta turma. Deste número de horas-aulas, temos a permissão por parte da coordenação deste segmento escolar, que uma hora-aula semanal seja destinada para ajustes quanto ao desenvolvimento dos conteúdos programáticos do material apostilado. Concebemos a palavra ajustes como um período médio de 7 horas-aulas bimestrais, no qual o professor tem flexibilidade de adaptar as orientações didático-metodológicas estabelecidas; contribuindo no processo de aprendizagem do aluno.

Dado o desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), na condição de se constituir como professor-pesquisador; passamos a apresentar a formulação do nosso problema de pesquisa.

Em nossa análise dos Cadernos do Professor do Ensino Fundamental II, averiguamos uma valorização do uso de malhas geométricas triangulares e quadrangulares no desenvolvimento de diversos conteúdos geométricos. Por exemplo, no 6º ano, a planificação de prismas e pirâmides envolve a sua construção geométrica com lápis, régua, compasso e esquadro em malhas quadrangulares.

O uso de malhas geométricas também é presente em tarefas dos Cadernos do Professor da rede pública do Estado de São Paulo e é considerado como um recurso útil para o trabalho com simetrias.

Com esse material, o professor pode propor inúmeras atividades em que o aluno tenha de desenhar figuras com simetria, completar figuras para que tenham simetria ou, ainda, exercitar movimentos de reflexão, translação e rotação de figuras no plano. (SÃO PAULO, 2014, p.62)

Por isso, parte da sequência didática que foi planejada e aplicada com os alunos do 6º ano utilizou as malhas triangulares e quadrangulares para o

desenvolvimento de atividades matemáticas pertinentes ao conceito de simetria, na perspectiva moderna.

Na seção seguinte dedicamos à apresentação da perspectiva do conceito de simetria tratado em nosso TCC.

#### **1.4 O conceito moderno de simetria**

Historicamente, na Grécia antiga, o significado do conceito de simetria foi utilizado como proporcionalidade. De acordo com Bortolossi, Pasquini (2015) o uso da simetria pode ser distinguido em dois contextos: matemático e avaliativo. Na matemática o significado dado à palavra simetria por Euclides é o que hoje conhecemos como comensurável. Segundo Bortolossi (2015, p.79) “duas magnitudes são comensuráveis significa dizer que a razão entre elas pode ser expressa por um número racional”. No contexto avaliativo, simetria significava proporção adequada, como no caso do Homem Vitruviano presente na teoria arquitetônica de Vitruvius .

Proporção é uma correspondência entre as medidas das partes do trabalho inteiro e do todo com uma certa parte escolhida como padrão. A partir disto resultam os princípios de simetria. Sem simetria e proporção não podem existir princípios na construção de qualquer edifício (...) (VITRUVIUS, 1914, p72 apud BORTOLUSSI, 2015, p.76)

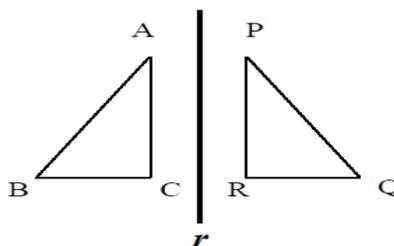
Já o conceito moderno de simetria surgiu em 1794 com a obra Elementos de Geometria de Adrien-Marie Legendre. Este conceito utiliza transformações ao denotar uma função, para definir simetria: “toda simetria de um conjunto  $X$  do plano é, em particular, uma função cujo domínio é o plano e o contradomínio é o plano (e que, também, preserva distâncias e deixa o conjunto  $X$  invariante)” (BORTOLOSSI, PASQUINI, 2015, p.36)

As transformações no plano que geram invariâncias denominadas isometrias são: reflexão em relação a uma reta, translação e rotação. Aqui seguiremos Nasser, Sousa e Pereira (2004) para sucintamente apresentarmos a definição de cada um destes três elementos das classes de transformações. Este texto cuja natureza é um mini-curso, contém tarefas de

transformações no plano, dentre as quais selecionamos algumas que foram aplicadas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Os detalhes do nosso trabalho de campo, abordamos no capítulo destinado à metodologia de pesquisa.

A reflexão em relação a uma reta  $r$  (eixo de simetria) do plano, caracteriza-se por obter uma nova figura isométrica à figura original, devido ao fato de manter invariantes os comprimentos e a forma da figura. Porém, ao designarmos na figura original um determinado sentido ele aparece invertido na figura final, ou seja, a reflexão altera a orientação dos pontos do plano, conforme ilustração a seguir:

**Figura 4:** Reflexão em relação á reta  $r$

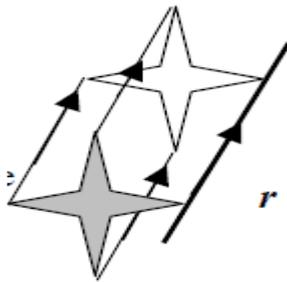


Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.4)

Em termos de definição, dada uma reta  $r$ , uma figura é obtida de outra por uma reflexão de eixo  $r$  se cada ponto da figura original (por exemplo, os vértices do triângulo ABC) está na mesma perpendicular a  $r$  que o ponto P correspondente da figura refletida. Os pontos A e P, por exemplo, distam igualmente de  $r$ , e situam-se em semi-planos distintos em relação a  $r$ . (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004)

Uma figura é obtida de outra via translação se dada uma direção  $r$ , todos os pontos da figura original se deslocam paralelamente a  $r$ , no mesmo sentido e direção, percorrendo a mesma distância. “A imagem de uma figura por translação mantém sua forma e tamanho” (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004, p.7), conforme exemplo a seguir:

**Figura 5:** Translação



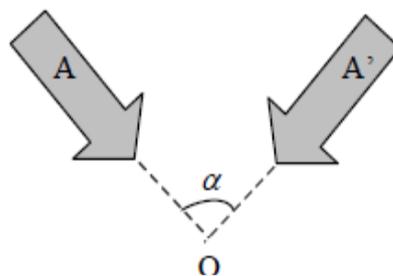
Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.7)

Diferentemente da translação é necessário na rotação, um eixo ou um ponto para que todos os pontos do plano se movimentem, girando em torno deste referencial de rotação. Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.10) afirmaram que

uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um dos seus pontos segundo o arco de circunferência de centro  $O$ , correspondente ao ângulo  $\alpha$ , no sentido fixado, que pode ser horário ou anti-horário.

Na imagem a seguir é possível observar que a rotação mantém invariantes os ângulos e comprimentos das figuras geométricas:

**Figura 6:** Rotação



Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.9)

Como integrante do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Atividades Matemáticas) sob a liderança do professor-orientador desta pesquisa; desenvolvemos nossa investigação apoiada em aportes teóricos estudados e difundidos neste núcleo de pesquisa.

Este trabalho teve como objetivo analisar a relação com o saber de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental envolvidos com tarefas destinadas à

aprendizagem do conceito de simetria, na perspectiva que acabamos de apresentar.

Pautamos nosso trabalho em estudos desenvolvidos por Mendes (2014); Bortolossi e Pasquini (2015); Nasser, Sousa e Pereira (2004); Pino (2014), além de embasar-se na teoria da Relação com o Saber (CHARLOT (2000), SOUZA (2011)) e na teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009, 2014). Tais referências nortearam a construção do problema de pesquisa; o qual sistematizamos a seguir.

### **1.5 A formulação da questão de investigação**

Este trabalho traz resultados de investigação em sala de aula apoiados na relação que o sujeito (aluno) estabelece com o saber (conceito de simetria) nas interações com os colegas e com o professor-pesquisador. Ao entrevistar o educador Bernard Charlot, Souza (2011, p.17) descreveu que *a relação com o saber é a relação com lugares, pessoas, atividades, etc., em que se aprende.*

Mais do que uma definição descritiva o que é interessante para Bernard Charlot, é que questões a noção da relação com o saber permite enfrentar. Uma delas que converge com o trabalho que desenvolvemos neste TCC, a partir do que discutimos no âmbito do GEPLAM é *que o homem nasce inacabado. A educação é o movimento pelo qual a criança se hominiza, se socializa, entra em uma cultura; e se singulariza, torna-se sujeito. Isso tem muitas consequências* (SOUZA, 2011, p.17-18).

Uma das consequências que tratamos em nosso trabalho de pesquisa é a transição da “criança, do adolescente, na sua vida cotidiana, empírica, para um aluno que aprende, um aluno que estuda” (SOUZA, 2011, p.19). No estudo desta transição para o contexto escolar, levamos em conta que se o aluno aprende, a sua relação com o saber é externalizada por meio de representações (CHARLOT, 2000). No caso do objeto matemático que é abstrato e, portanto, não perceptível; seu acesso se dá por meio de registros de representação semiótica.

A semiótica é “a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido” (SANTAELLA, 2002, p.13). No caso da matemática, a comunicação extrapola o uso da língua materna, principalmente via registros escritos; pois nos comunicamos também por meio de gráficos, tabelas, simbologias algébricas, entre outras formas de registros de representação semiótica.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009, 2014) é um dos pilares teóricos-metodológicos utilizados nas produções acadêmicas vinculadas ao GEPLAM, por concentrar seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma. Do ponto de vista cognitivo, o processo de aprendizagem requer a mobilização de diferentes registros semióticos de representação para que não haja confusão entre o objeto matemático e a representação do mesmo, bem como, a coordenação entre os diferentes registros.

No próximo capítulo abordamos em detalhes a teoria dos registros de representação semiótica levando em conta o objeto matemático simetria. Neste momento apresentamos sucintamente os aportes teóricos que fundamentam parte das pesquisas desenvolvidas no GEPLAM, os quais embasam nossa questão de pesquisa: **que relações com o saber são desenvolvidas por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental envolvidos com tarefas sobre o conceito de simetria?**

## **2. NA TRILHA DO DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA**

Destinamos este capítulo para apresentar o percurso metodológico envolvendo o planejamento e aplicação de tarefas matemáticas para nossos alunos de 6º ano do Ensino Fundamental da unidade Objetivo Sorocaba, no qual assumimos o papel de professor-pesquisador nesta turma de alunos.

### **2.1 O objeto matemático simetria sob a perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica**

Raymond Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. A natureza desta representação é semiótica e, de um modo geral, precisamos considerar a tríade: signo que é relacionado a um objeto concreto, para a especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito).

A palavra abstrato diz respeito ao fato de que o objeto matemático não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de representações semióticas. Com efeito, outro argumento se constrói, desta vez em relação ao binômio objeto-representação: “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (Duval, 2009, p14). Há uma ênfase para a necessidade de não confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Se considerarmos o objeto matemático simetria podemos representar no plano cartesiano o simétrico de um ponto em relação ao eixo y. Este registro de representação não tem o mesmo conteúdo que o registro semiótico via par ordenado, ou seja,  $(a, b) \rightarrow (a, -b)$ .

A teoria dos registros de representação desenvolvida por Raymond Duval estabelece que, para um indivíduo desenvolver o funcionamento do seu pensamento na aquisição de um conhecimento matemático é necessário tanto diferenciar uma noção científica dos registros semióticos que a representam, quanto conhecer a funcionalidade desses registros. Neste contexto, ocorre no funcionamento cognitivo do pensamento humano, aquisições funcionais

relativas tanto aos sistemas orgânicos, disponíveis desde o nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória; quanto aos sistemas semióticos, usados para se comunicar e também para organizar e tratar as informações.

Com isso, numa atividade de aquisição de conhecimento matemático, tem que ser levados em conta dois componentes: os próprios conteúdos desse conhecimento, nos quais existem métodos e processos para descobrir e estabelecer resultados e, o cognitivo, que segundo Duval (2009), a identificação de uma noção matemática com seus registros de representação semióticos pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção.

Um registro de representação semiótico de um objeto matemático pode ser um símbolo, uma figura ou a língua natural. Cada tipo de registro apresenta um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido.

A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar transformações nos registros, seja na forma de tratamento (operações internas a um mesmo registro, como por exemplo, “completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria” (DUVAL, 2003, p.16)) e/ou na coordenação de registros que garantam a atividade de conversão (passagem de um registro a outro, com mudança na forma pela qual determinado registro é representado).

Duval (2014) apresentou uma distinção de zonas de atividades cognitivas mobilizadas em geometria, conforme figura a seguir.

**Figura 7:** Distinção de zonas de atividades cognitivas mobilizadas em geometria

	Realidade: objetos físicos (2D-3D)	Verbalização silenciosa à ser explicitada	Registro de figuras: unidades figurais nD-2D	Emprego de termos matemáticos	Registro discursivo: propriedades e relações entre unidades figurais 2D, 1D, 0D
Formas 2D percebidas e de construção	Operações 3D (reversão e superposição)	Dissociar ação e operação (transformação)	Operações 2D. Prolongamento de traçados e busca de alinhamentos	Designação de relações entre duas unidades figurais	Encadeamento (de instruções ou de proposições), dupla designação, inferência
Grandezas	Medidas de distâncias entre duas marcas	medidas dos lados de uma figura			Fórmulas: relação com propriedades

Fonte: Duval (2014, p.32)

Em termos de conversão de transformação com base na figura 7; podemos citar a mudança de registro entre o aspecto qualitativo (formas

bidimensionais percebidas e de construção: intuição e raciocínio) e numérico (grandezas; por exemplo, medidas dos lados de uma figura).

As atividades geométricas contidas na figura 7 “dividem-se em três grandes zonas, cada uma dando lugar a uma aproximação diferente da geometria” (DUVAL, 2014, p.33).

A primeira zona situa-se entre o aspecto qualitativo e numérico, cuja fronteira foi demarcada com uma linha de espessura maior. Segundo Duval (2014), nesta zona questiona-se sobre a abordagem apropriada para introduzir e ensinar geometria e o papel da demonstração no decorrer do Ensino Fundamental II e parte do Ensino Médio (alunos com até 16 anos de idade).

O conteúdo desta zona contempla dois aspectos: a visualização que articula a compreensão e mobilização das propriedades geométricas a partir da deconstrução dimensional das formas 2D perceptivamente reconhecidas. O outro aspecto diz respeito à condição de resolver sozinho problemas de geometria e de maneira mais prática: *“para reconhecer quando e como aplicar fórmulas para calcular grandezas (distância, área, etc), é necessário se apropriar desta maneira de ver as figuras”* (itálico do autor) (DUVAL, 2014, p.34).

Duval (2012) afirma que ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra. Há três maneiras diferentes de ver as figuras segundo o seu papel na atividade matemática: a apreensão perceptiva, operatória e discursiva.

A apreensão perceptiva é o reconhecimento visual imediato da forma. A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações: mereológica, ótica e posicional.

Podemos dividi-la em partes que sejam como várias subfiguras, incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura: esta modificação é uma **modificação mereológica**, ela se faz em função da relação parte e todo. Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma **modificação ótica**, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. Pode-se, enfim, deslocá-

la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma **modificação posicional** de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente (...) (negrito do autor) ((DUVAL, 2012, p.125).

A segunda grande zona (linha de divisão) da figura 7 separa a coluna 1 e 2 das colunas 3 e 5. Trata-se de opor a transformação de figuras para fins exploratórios (manipulação de figuras visando a invariância das formas) em relação ao encaixe de “enunciados em um programa de construção ou em um procedimento de prova, e utilizar fórmulas” (DUVAL, 2014, p.34).

A utilização da linguagem interfere em todas as etapas de uma sequência de atividade geométrica na abordagem qualitativa e numérica, cumprindo primeiramente as seguintes funções cognitivas para aquele que está em condição de se expressar: tomada de consciência (fala-se ou escreve-se para si sobre o que se faz ou se pensa), conceitualização (coordena-se o que se percebe com uma palavra que a designa na sua generalidade) e tratamento (a produção escrita deve contemplar as operações discursivas que provam uma conjectura).

A apreensão discursiva de uma figura é de natureza dedutiva e explicita propriedades matemáticas por meio de legendas ou pelas hipóteses e tem como função a demonstração (DUVAL, 2012).

Em síntese, Duval (2014, p.37) afirmou que o acesso aos objetos matemáticos, inclusive geométricos, “não é jamais empírico, é semiótico, o que não quer dizer teórico. Isto significa que a atividade matemática exige a utilização de *muitos sistemas de representação semióticos* e, também, a língua natural, mesmo que não sirva para calcular” (itálico do autor). No caso da geometria estabelece-se que toda atividade geométrica requer um diálogo contínuo entre visualização (registro figural) e o discurso (registro na língua natural, dado o contexto da geometria euclidiana plana).

Para a análise das tarefas que propomos e aplicamos em sala de aula apropriamos do trabalho de Lino (2014) que teve por objetivo apresentar uma concepção ampla das transformações geométricas, uma visão de geometria com uma nova organização e significado ao estudo destas transformações e

também pautamos nossas atividades baseadas no conceito de representação semiótica apresentada por Duval. Dentre os quadros teóricos (geometria euclidiana, analítica e álgebra linear) que esta autora utilizou, apropriamos dos registros de representação semiótica aplicados no ponto de vista intuitivo e do desenho geométrico, na perspectiva euclidiana da geometria plana. É importante salientarmos que Lino concorda com Duval em relação aos registros de representação semiótica, no qual a maneira intuitiva que é tratado no trabalho dele, propõe o deslocamento do registro da língua falada para o registro figural.

No que diz respeito ao ponto de vista intuitivo Lino (2014, p.58) buscou “maneiras de olhar a simetria a partir de recursos, geralmente, materiais a fim de que tanto suas definições, quanto de algumas de suas propriedades sejam construídas a partir da observação, ou seja, da apreensão discursiva da figura construída”.

Em relação ao ponto de vista do desenho geométrico, Lino (2014) privilegiou objetos matemáticos mobilizados a partir de construções feitas, principalmente; por meio de régua não graduada e compasso. Porém, em nossa pesquisa, optamos por designar ponto de vista do desenho; devido ao fato do desenho não ser necessariamente obtido pela utilização de instrumentos citados pela autora.

Outro aspecto que justifica a utilização do trabalho de Lino (2014) na análise da produção escrita dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental; foi o fato da autora ter desenvolvido seu estudo teórico sobre o conceito de simetria na concepção moderna.

A seguir apresentamos as categorias de análise definidas *a priori*, ou seja, elencadas sem a análise prévia das produções das atividades matemáticas dos alunos.

### 2.1.1 Análise da simetria de reflexão

Do ponto de vista intuitivo Lino (2014, p59) recomendou que o uso de dobradura no papel propicia a superposição de figuras configurando a simetria por reflexão. Outros recursos podem instigar a observação a respeito das características deste tipo de simetria, como por exemplo, o uso de naipes do baralho. A discussão do registro de língua natural destas representações “permite a construção da ideia de simetria de uma maneira intuitiva e faz com que as crianças desenvolvam suas primeiras noções”.

A intervenção do desenho promove a conversão do registro de língua natural para o registro figural.

### 2.1.2 Análise da simetria de translação

A análise da translação de uma figura sob o ponto de vista intuitivo, considerando o plano euclidiano, “consiste em ‘empurrar’ a figura de uma posição para outra, sem levantá-la, sem girá-la ou deformá-la durante o movimento” (LINO, 2014, p. 78). Em termos de situações do cotidiano podemos citar o movimento de elevadores, como forma do estudante intuitivamente perceber as características que regem esta modalidade de simetria.

A formalização das características observadas no movimento de translação na forma de registro de língua natural; transforma o desenho em figura.

### 2.1.3 Análise da simetria de rotação

Do ponto de vista intuitivo, objetos como as pás do ventilador, podem ser instigantes para observar as características de simetria no contexto de movimento.

Na construção do registro de língua natural seu conteúdo deve levar em conta a rotação como uma transformação geométrica que “é obtida quando fixamos um ponto no plano e giramos a figura de um ângulo qualquer, ao redor

desse ponto. Pode-se ainda discutir a medida do ângulo e dos sentidos horário e anti-horário” (LINO, 2014, p.93).

Do ponto de vista do desenho o registro figural contém as propriedades da rotação necessárias na construção da figura simétrica à original:

- A figura original e seu transformado são geometricamente congruentes.
- Um ponto e seu transformado estão a mesma distância do centro de rotação.
- Um ponto da figura pertencente ao centro de rotação é transformado em si próprio.
- A imagem de uma reta é outra reta.
- A imagem de uma semirreta é outra semirreta.
- A imagem de um segmento de reta é um segmento de reta geometricamente congruente.
- A imagem de um ângulo é outro ângulo equipolente (geometricamente igual e de mesmo sentido) (LINO, 2014, p.96).

Esses dois pontos de vista apresentados foram importantes tanto no planejamento quanto na aplicação das tarefas voltadas aos alunos da turma do 6º ano do Colégio Objetivo de Sorocaba, pois os alunos não possuíam o conceito de simetria até aquele momento.

## 2.2 Escolha da metodologia de pesquisa

Para responder a questão **que relações com o saber são desenvolvidas por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental envolvidos com tarefas sobre o conceito de simetria?**; norteadora desta pesquisa, a opção metodológica adequada é a pesquisa qualitativa por estarmos interessados em noções de compreensão, significado e ação (COUTINHO, 2008). De acordo com esta autora estamos interessados em saber com os referidos alunos interpretam as tarefas propostas e, conseqüentemente, que atividades matemáticas são produzidas neste processo.

O percurso qualitativo desta pesquisa é permeado pela modalidade de estudos naturalistas ou de campo, especificamente, uma pesquisa de intervenção (NACARATO et al, 2005). A produção de informações para nossa pesquisa foi obtida via registros escritos das atividades desenvolvidas pelos

alunos em sala de aula ou extra-classe. Trata-se de uma pesquisa de intervenção, devido à presença do professor-pesquisador na análise da aprendizagem de um conteúdo matemático específico.

Nas próximas seções apresentamos características do contexto investigado: a escola, a turma do 6º ano e as tarefas planejadas e aplicadas na sala de aula.

### **2.3 Objetivo Sorocaba – Unidade Centro**

O colégio Objetivo é uma instituição de ensino localizada no município de Sorocaba, Estado de São Paulo, que abrange todos os níveis de ensino, Berçário, Educação Infantil, Ensino Fundamental I (1º ao 5º ano), Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), Ensino Médio, curso pré-vestibular. Na cidade, a escola conta com três unidades, uma localizada na região central do município, unidade Centro, outra localizada no bairro Campolim, unidade Portal e outra localizada na região norte, unidade Zona Norte.

A unidade Centro teve seu prédio próprio em 1978; no início dos anos de 1990 inauguram a segunda escola, unidade Portal. Por fim, em 2012, a unidade Zona Norte é inaugurada.

Da estrutura física e dos recursos o colégio conta com amplo espaço para salas de aula, todas equipadas com lousa digital, data-show, ar-condicionado e sistema de som, 1 laboratório de química e biologia, biblioteca, 2 quadras cobertas, refeitório, cozinha, horta, secretaria, sala de multimídia, sala de direção, sala da vice-direção, sala dos professores, sala de supervisão e orientação.

**Figura 8:** Objetivo Sorocaba Centro



Fonte: [www.objetivosorocaba.com.br](http://www.objetivosorocaba.com.br)

A equipe gestora desta escola é composta por um diretor e 3 vices diretores, 1 coordenador pedagógico, 1 coordenador adjunto e 1 orientador pedagógico. O corpo docente é formado por professores especializados em cada área do conhecimento, de acordo com a disciplina que ministram. A clientela dessa instituição é, em sua maioria, de classe média e média-alta, devido ao fato de ser uma escola de alto custo.

O colégio disponibiliza em seu site a quantidade de aulas e os conteúdos que devem ser aplicados durante o ano letivo. A metodologia vai além da sala de aula, através de módulos, atividades e projetos que enriquecem aquilo que cada aluno vivencia em sala de aula, criando um ambiente de integração e troca contínua nas relações. Os eixos educacionais em que a metodologia se pauta são: a linguagem, o protagonismo, a cultura e o esporte.

No Ensino Fundamental II, os alunos entram em contato com novas abordagens teóricas e práticas, dentro de cada área do conhecimento. São estimulados, pela mediação dos professores, a se engajar em busca de autonomia, responsabilidade e das relações sociais. Possui também alguns diferenciais que para potencializar o ensino, como estudos do meio com projetos que estimulam a vivencia da teoria na prática, oficinas e atividades extracurriculares que incitam potencialidades de cada aluno, aulas de apoio, plantões de dúvidas, vivência cultural, esportiva, artística e estímulo à

criatividade e protagonismo dos jovens, laboratórios de ciências e informática, auditório e biblioteca, acompanhamento do rendimento escolar por meio do projeto de tutoria, ampla infraestrutura com piscina aquecida semiolímpica, ginásio de esportes, quadras poliesportivas e quadra de squashe.

Na condição de funcionário do Objetivo, atuamos como professor de Matemática no ensino fundamental II (6º e 7º ano), professor na disciplina de Progressão Parcial, que funciona como uma dependência para os alunos do Ensino Médio que não atingiram os requisitos básicos para avançar de nível na disciplina de Matemática e como professor de Matemática do 1ª série do Ensino Médio.

Em relação à atuação docente, proporcionamos aos alunos um ambiente propício para exposição de opiniões e dúvidas em relação a qualquer conteúdo exposto em sala de aula, sempre levando em consideração o conhecimento prévio do aluno a fim de tornar o ensino da Matemática algo mais prazeroso e concreto na vida dos discentes.

#### **2.4 A turma do 6º ano**

No início do ano letivo notamos que os alunos, muitas vezes, demonstravam receio quanto à participação nas aulas e discussões, porém, no decorrer das aulas fomos construindo um ambiente diferenciado para que eles pudessem se sentir seguros ao solucionar dúvidas e colocarem suas opiniões, de maneira democrática e organizada.

A grade horária é de seis aulas semanais de matemática: quatro voltadas a conteúdos algébricos, uma para o ensino de geometria e uma para o programa de desenvolvimento matemático (PDM). No PDM, os alunos são levados a aplicar o conteúdo matemático em atividades diversas, com ênfase no lúdico, para proporcionar um aprendizado mais concreto e divertido.

As tarefas referentes ao conceito de simetria foram desenvolvidas no decorrer das aulas previstas para o 3º bimestre letivo, mais precisamente, naquele período médio de 7 horas-aulas bimestrais, denominado “ajuste”; no qual temos a flexibilidade de adaptar as orientações didático-metodológicas estabelecidas; conforme explicação dada no item 1.3 do primeiro capítulo.

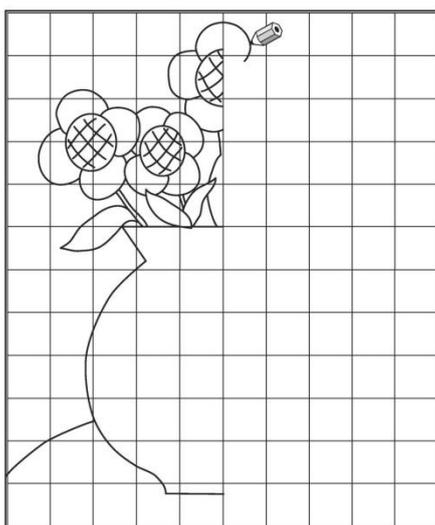
## 2.5 O planejamento das tarefas envolvendo o conceito de simetria

As tarefas foram produzidas e aplicadas em três fases. Apresentamos a estrutura e os objetivos das tarefas neste item e, no próximo capítulo, a análise das atividades matemáticas dos alunos.

Na **primeira fase** composta por quatro tarefas, o objetivo foi averiguar o saber prévio dos alunos sobre simetria e suas relações, iniciando por uma tarefa de completar figura para que haja simetria, conforme recomendação do Caderno do Professor da rede pública do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014). As outras três tarefas são de natureza diagnóstica, com objetivo de construir o conceito de simetria, valorizando a bagagem matemática de nossos estudantes.

A seguir apresentamos a formulação do conteúdo das referidas tarefas:

- 1) Observe a figura e complete a outra metade, depois pinte.



Fonte: arquivo do pesquisador

- 2) O que é simetria para você?
- 3) Na sua opinião, o que significa dizer que uma figura é simétrica ?
- 4) Na sua opinião, o que significa dizer que uma figura é simétrica a outra ?

A atividade matemática produzida nesta primeira fase foi recolhida pelo professor-pesquisador, em comum acordo com os alunos, para constituir parte do repertório de informações a serem analisadas. Em seguida, solicitamos aos alunos que utilizassem em casa, diversos meios de pesquisa para produzir um relato escrito para cada uma das questões: o que é simetria? O que significa

dizer que uma figura é simétrica? O que significa dizer que uma figura é simétrica a outra?

O referido relato escrito foi entregue em sala de aula e constituiu parte da **segunda fase** do trabalho de campo. A finalização desta etapa da produção de informações para posterior análise e redação do TCC, deu-se com a comparação entre as respostas das três questões da primeira fase com a segunda fase. Este confronto de respostas foi relevante para a socialização do conceito de simetria na perspectiva moderna entre os alunos da turma do 6º ano, sob a mediação do professor-pesquisador.

Antes da próxima etapa do trabalho de campo ocorreu uma aula expositiva com os alunos com o objetivo de tratar as isometrias no plano: reflexão, translação e rotação. Nesta aula foi mostrado estes conceitos na lousa, aonde os alunos tiveram o primeiro contato com a simetria propriamente dita.

A **terceira fase** envolveu cinco tarefas com o conteúdo das isometrias: reflexão em relação a uma reta, translação e rotação. A primeira tarefa apresenta o seguinte conteúdo:

- 1) O logotipo a seguir é a marca registrada de uma fabricante de automóveis.
  - a) Construa uma malha triangular para inserir o desenho do logotipo;



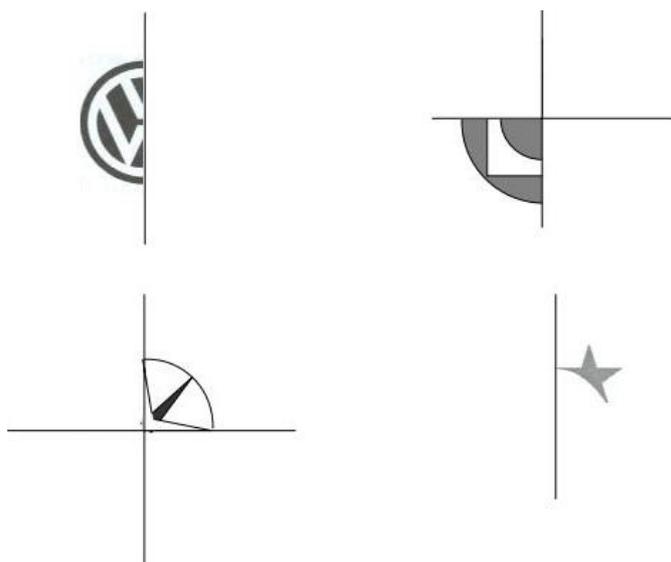
- b) Represente os eixos de simetria. Em seguida, verifique quais transformações no plano (reflexão, translação e rotação) foram aplicadas neste logotipo. Justifique sua resposta.

Esta tarefa foi planejada como uma extensão do que foi abordado no material apostilado, mais especificamente, quanto à construção de malhas triangulares para a produção de mosaicos com polígono não-convexo. Neste sentido, elaboramos uma questão que demandou a construção da malha

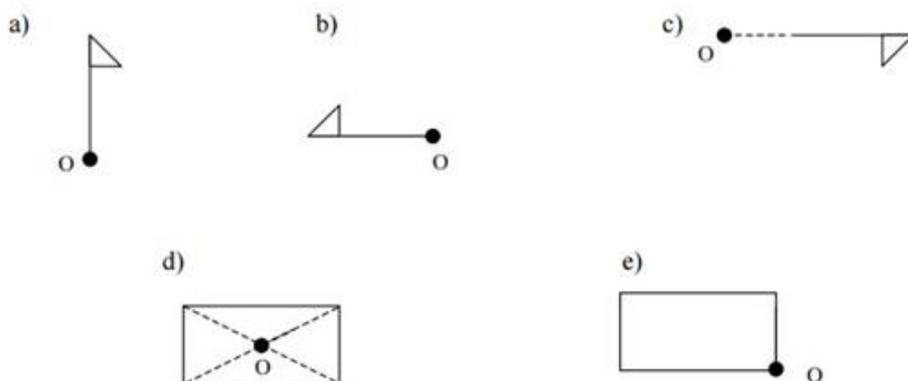
triangular para a inserção do logotipo, bem como a identificação das possíveis isometrias.

As três tarefas a seguir foram extraídas do mini-curso elaborado por Nasser, Sousa e Pereira (2004). Esperamos que na atividade matemática os alunos fossem capazes de trabalhar com as características próprias de cada isometria:

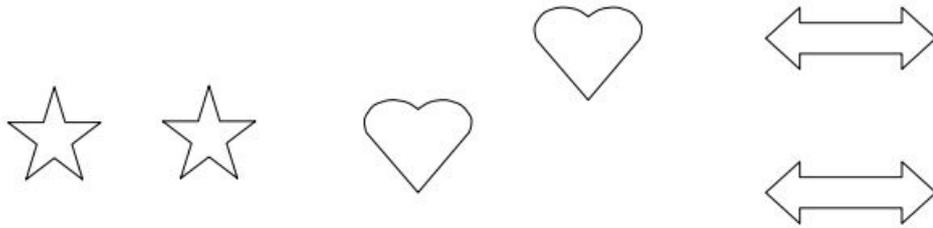
2) Em cada item abaixo aparece a parte de um logotipo e as retas representam eixos de simetria. Complete as figuras e identifique os logotipos:



3) Trace a imagem de cada figura abaixo a partir de um giro de  $90^\circ$  no sentido horário, em torno do centro O:



4) Nos pares de figuras a seguir, uma figura é imagem da outra por simetria. Em cada item, represente por uma seta a direção, o sentido e a distância (amplitude) da translação aplicada.



5) Identifique nas questões anteriores o tipo de simetria utilizado e apresente uma justificativa para cada uma delas.

Para a resolução das quatro primeiras questões desta fase orientamos que os alunos se atentassem às diferentes características das transformações do plano. Alertamos também sobre a importância do uso instrumentos geométricos como régua, compasso, transferidor e esquadro. Porém, a familiaridade com tais instrumentos é muito recente; haja visto que até o momento da aplicação destas tarefas eles não tinham trabalhado com esquadro e compasso.

### **3. APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS TAREFAS**

Neste capítulo dedicamos à apresentação da análise conjunta do que já denominamos primeira e segunda fase das tarefas e, por último, a terceira fase. Em cada uma destas partes apresentamos uma tabulação sobre o rendimento dos alunos seguido de considerações relevantes sobre a produção escrita dos alunos.

#### **3.1 Tarefas da 1ª e 2ª fase**

Para a aplicação das tarefas da primeira fase foi destinada uma aula específica para que os alunos realizassem as atividades, levando em consideração que a parte teórica ainda não havia sido apresentada a eles, ou seja, usaram seus conhecimentos prévios e percepções pessoais para completar o desenho e para responder as questões voltadas a eles.

Nesta primeira fase, ocorreu a análise dos dados de cada questão isoladamente, sendo estabelecidas três classificações: (I) o aluno apresenta o conhecimento de maneira satisfatória, (II) o aluno apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira confusa e (III) o aluno não apresenta o conhecimento desejado para a questão. Tais classificações foram

desenvolvidas baseadas no conceito de simetria na perspectiva moderna, no qual foi apresentada nas seções anteriores

As questões foram corrigidas partindo do pressuposto de que foram construídas de maneira introdutória ao assunto de simetria e que, teoricamente, os alunos não teriam base para responder os questionamentos.

A seguir apresentamos a tabulação das tarefas da primeira fase:

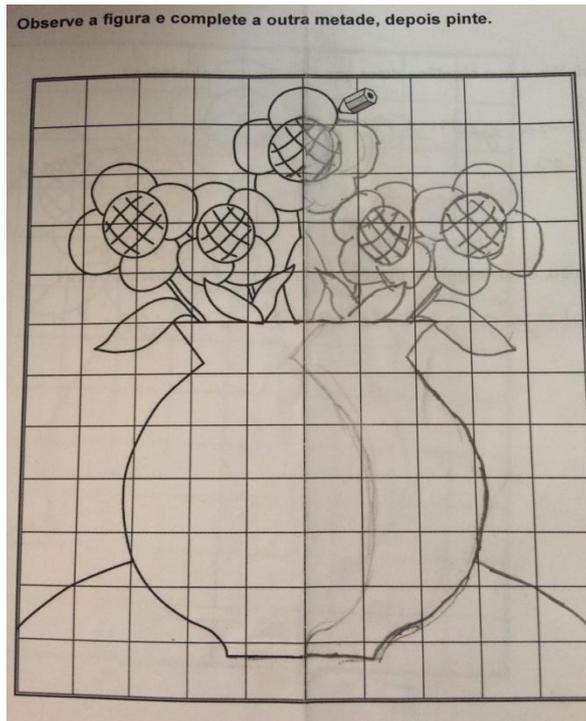
**Tabela 1:** Rendimento dos alunos na primeira fase das tarefas

	<b>Nº Alunos</b>	<b>Descrição</b>
<b>Questão 1</b>	10	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	8	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira confusa.
	7	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão
<b>Questão 2</b>	3	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	12	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira confusa.
	10	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão
<b>Questão 3</b>	2	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	12	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira confusa.
	11	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão
<b>Questão 4</b>	2	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	14	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira confusa.
	9	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão

Fonte: arquivo do pesquisador

Tendo em vista as três classificações dadas às respostas dos alunos, podemos analisá-las mais pontualmente onde, um aluno, por exemplo, apresenta na questão 1 o conhecimento de maneira satisfatória, pois apresenta em seu desenho saberes sobre o conhecimento de simetria, ou seja, a disposição de duas figuras idênticas que se correspondam ponto a ponto. A seguir, apresentamos o referido desenho:

**Figura 9:** protocolo da questão 1 – 1ª fase



Fonte: arquivo do pesquisador

Observamos que inicialmente este desenho da simetria do aluno estava errado. A revisão disto se deu pela “descoberta” do Tales (nome fictício). Tales constatou que simetria são coisas que são iguais às outras. No começo da tarefa aplicada, notamos que grande parte dos alunos tinha certa dificuldade no desenho, em reproduzir a metade da figura na malha quadriculada de maneira simétrica, até que Tales dobrou sua folha ao meio, a dobradura ficou sobre o eixo de simetria, e a colocou contra o vidro da sala, feito isto quase que a totalidade da sala de aula começou a reproduzir esta ação. Isso chamou-nos a atenção e decidimos perguntar o porquê daquele gesto. Por meio de uma captação de áudio, Tales disse: “Eles dobravam a folha e colocavam o desenho contra o reflexo, porque o desenho servia como uma espelho, a luz refletia no papel como se fosse um espelho e mostrava a linha do outro lado”.

A questão 2, perguntava aos alunos o que era simetria, em que a resposta esperada seria que simetria é quando uma imagem pode ser dividida em partes que possuem o mesmo tamanho, forma e posição relativa, diversos alunos apresentaram esse conhecimento porém, de forma um pouco confusa, como, por exemplo, em uma das respostas dadas que dizia “simetria significa que é uma imagem igual nos dois lados”.

Na questão 3 questionava o significado de uma figura ser simétrica a outra, a resposta esperada era que para uma figura ser simétrica a outra é necessário observar se ao dobrarmos a figura no eixo de simetria um dos lados cairá exatamente sobre o outro. Um aluno respondeu que “é uma figura que se precisa de uma régua para conseguir desenhar igual”, sendo essa resposta considerada insatisfatória, não apresentando o conhecimento necessário para respondê-la.

Na última questão, de número 4, a maior parte dos alunos apresentou conhecimento para responder a questão, porém, aplicaram de maneira confusa. A questão pedia aos alunos que escrevessem sobre o significado de uma figura simétrica a outra, a resposta esperada era que “todos os pontos de uma figura coincidem com os pontos da outra”, uma resposta dada considerada satisfatória foi “quando uma figura é simétrica à outra é porque a figura apresenta as mesmas medidas de figura original”.

A segunda fase do trabalho de campo consistiu na pesquisa das mesmas questões da primeira fase, como tarefa de casa. Pudemos perceber, nesse momento, que os alunos se dedicaram bastante na realização da pesquisa, apresentando as respostas bem elaboradas e que atendiam ao esperado. Um dos discentes descreveu em sua pesquisa que simetria era “quando dois lados são semelhantes, duas faces iguais em tamanho e altura”.

Na questão 2, um dos estudantes obteve como resultado da pesquisa que “podemos dizer que uma figura possui dois lados de igual tamanho e formato”.

Uma das respostas obtidas para a questão 3 foi que “uma figura tem a mesma distância da outra porque ela é proporcionalmente igual”.

Após a realização das duas tarefas, realizamos uma comparação entre as respostas dadas pelos alunos na primeira atividade e a pesquisa realizada pelos mesmos em casa e a partir daí, juntamente com a explicação e exposição em sala de aula, formalizamos o conceito de simetria.

### **3.2 Tarefas da 3ª fase**

Na terceira fase de atividade os alunos já possuíam o conhecimento de simetria, partimos então para a realização de duas tarefas, sendo destinadas

duas horas-aulas para cada atividade. Quanto ao rendimento dos alunos em cada questão, classificamos em (I), (II) e (III); conforme classificação no item 3.1.

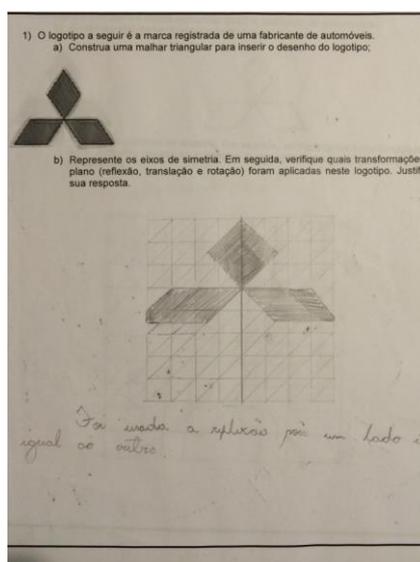
A tabela construída levou em conta a análise do rendimento dos alunos na atividade que continha o símbolo da Mitsubishi e solicitava que os alunos desenhassem uma malha triangular, depois redesenhassem o símbolo nela e por último citassem e explicassem quais as transformações que ocorriam no plano:

	Nº Alunos	Descrição
<b>Letra A</b>	9	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	10	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira <u>confusa</u>
	6	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão
<b>Letra B</b>	11	Apresenta o conhecimento de maneira satisfatória
	6	Apresenta o conhecimento, porém aplica-o de maneira <u>confusa</u>
	7	Não apresenta o conhecimento desejado para a questão

**Tabela 2:** Rendimento dos alunos na terceira fase das tarefas

No item A, algumas construções chamaram atenção, cerca de 40% dos alunos apresentaram o que era pedido na questão, porém de maneira confusa. Abaixo segue algumas das construções citadas:

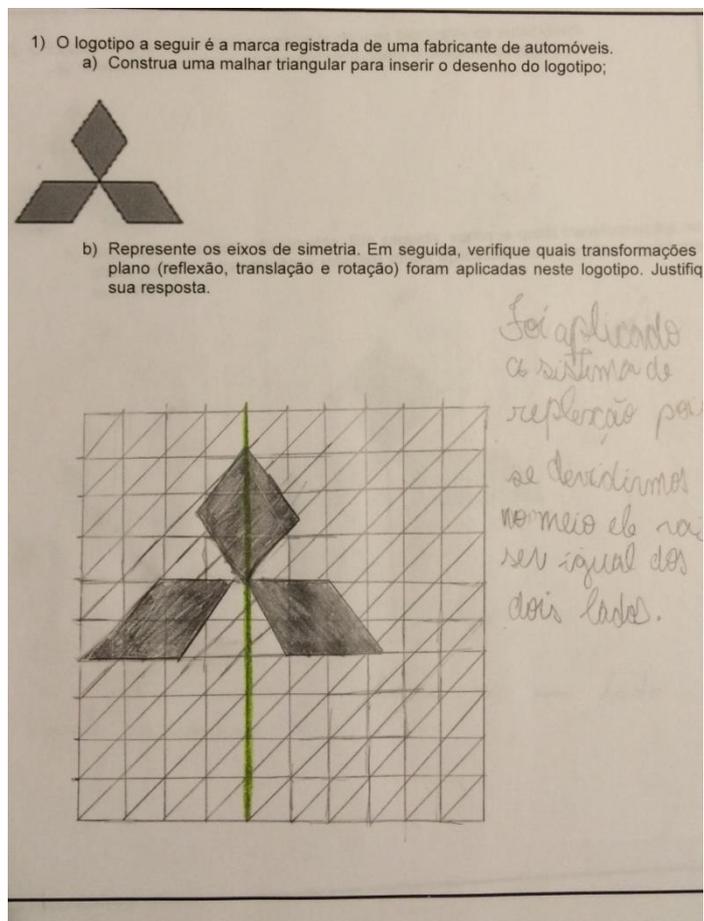
**Figura 10:** protocolo da questão 1 – 3ª fase



Fonte: arquivo do pesquisador

O aluno que fez tal atividade disse que :”Foi usada a reflexão pois um lado é igual a outro”.

**Figura 11:** protocolo da questão 1 – 3ª fase



Fonte: arquivo do pesquisador

Já neste exemplo o aluno disse:”Foi aplicado o sistema de reflexão para se dividirmos no meio ele vai ser igual dos dois lados”

Nos dois exemplos podemos observar que os alunos entenderam de maneira satisfatória o que é simetria e suas transformações, porém não fizeram uso adequado dos instrumentos de construção que são oferecidos a eles. Pudemos notar que grande parte desta dificuldade no manuseio dos instrumentos geométricos para a produção desta atividade se deu especificamente a dois motivos, o primeiro era a falta de prática dos alunos com tais instrumentos, já que verificamos que esse ano era o primeiro contato deles com o compasso, transferidor e esquadro. O segundo motivo foi a falta

de calibragem nos instrumentos, principalmente no compasso, pois a grande maioria dos alunos apesar de ter o instrumento apresentava algum problema, desde não ter grafite até mesmo estar faltando a “ponta seca” dele.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A aplicabilidade destas tarefas aproveitando o potencial das malhas geométricas mostrou-se viável para a construção do conceito de simetria, desde o início do Ensino Fundamental II. Porém, observamos a necessidade de aprimorarmos a aprendizagem dos alunos quanto ao uso dos instrumentos geométricos de modo que a construção de figuras simétricas preserve a invariância.

Em relação à questão apresentada na página 22 que diz, “que relações com o saber são desenvolvidas por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental envolvidos com tarefas sobre o conceito de simetria?” podemos concluir que os alunos apresentam o saber, no nosso caso o conceito de simetria na perspectiva moderna e desenvolve com satisfação as atividades voltadas a este conceito para esta determinada série.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORTOLOSSI, Humberto José; PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Simetria:** história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. São Paulo: Editora Livraria da Física, Série história da matemática para o ensino, v.9, 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – Ensino Fundamental II. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais :** Matemática – Ensino Fundamental I. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

COUTINHO, Clara Pereira. A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. **Educação Unisinos**, v.12, n.1, p.5-15, jan./abr. 2008.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012.

DUVAL, Raymond. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu (orgs). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, 2014, p. 15-38.

LINO, Eliedete Pinheiro. **As transformações geométricas em um jogo interativo entre quadros:** um estudo teórico. 2014. 114 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.

NACARATO, Adair Mendes et al. Modalidades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do GT-19 da Anped. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28., 2005, Caxambu. **Anais...** 19p. Caxambu, 2005. CD-ROM.

NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci A. de ; PEREIRA, José Alexandre. Explorando a geometria do ensino fundamental por meio de reflexões,

translações e rotações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 19p. Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

MENDES, Carlos Octávio de Abreu e Silva. **O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental:** uma análise. Monografia (Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio). Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2002.

SÃO PAULO. **Caderno do professor:** coleção didática do Sistema de Ensino Objetivo (6º ao 9º ano – Matemática). São Paulo: Sistema Educacional Ciências e Letras, 2015, 8º ano, 2º bimestre.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor:** 7º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014, v.1.

SOUZA, Helena Beatriz Mascarenhas de. Professores, Alunos, Escola, Saber – relações atravessadas pela contradição: entrevista com Bernard Charlot. **Cadernos de Educação,** Pelotas, v.39, p.15-35, 2011.