



Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba
Departamento de Física, Química e Matemática

Adriano Ortiz Souza

Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo motivado por aplicações.

Sorocaba-SP
2022.

Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba
Departamento de Física, Química e Matemática
Licenciatura em Matemática

Adriano Ortiz Souza

Equações Diferenciais Ordinárias: Um estudo motivado por aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ana Cristina de Oliveira Mereu.

Sorocaba-SP
2022.



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 3/2022/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ADRIANO ORTIZ SOUZA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO MOTIVADO POR APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 28 de abril de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

| Cargo/Função | Nome Completo |
|---------------------|--|
| Orientadora | Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu |
| Membro da Banca 1 | Profa. Dra. Luciana Takata Gomes |
| Membro da Banca 2 | Prof. Dr. Sadao Massago |



Documento assinado eletronicamente por **Luciana Takata Gomes, Docente**, em 29/04/2022, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago, Docente**, em 29/04/2022, às 21:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Cristina de Oliveira Mereu, Docente**, em 03/05/2022, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código



verificador **0665336** e o código CRC **F8F6E369**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº
23112.010640/2022-80

SEI nº 0665336

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Resumo

O presente trabalho foi desenvolvido tendo como objetivo principal o estudo das equações diferenciais, além de tópicos como: sistemas de equações diferenciais, álgebra linear, sistemas planares, entre outros. Ao longo do trabalho realizou-se três aplicações, sendo cada uma desenvolvida utilizando diferentes técnicas estudadas ao longo do texto.

A primeira aplicação consistiu na utilização dos métodos do crescimento logístico e do método dos quadrados mínimos com o intuito de realizar um estudo sobre o crescimento de casos sobre o COVID-19. Já a segunda aplicação consistiu na análise e interpretação de diferentes sistemas planares, tendo como contexto uma interessante aplicação sugerida por Strogatz (1994). Por fim, a última aplicação consistiu no estudo do modelo Lokta-Volterra, buscando compreender as relações advindas da competição entre ovelhas e coelhos.

Ao finalizar o trabalho pôde-se perceber a importância de tais tópicos na compreensão da realidade e do mundo que fazemos parte. Foi possível também consolidar e aprimorar os meus próprios conhecimentos, tendo assim um crescimento pessoal em múltiplos sentidos.

Palavra-Chave: Equações diferenciais, Álgebra Linear, Sistemas Planares, Aplicações.

Abstract

The present work was developed with the main objective of studying differential equations, as well as topics such as: systems of differential equations, linear algebra, planar systems, among others. Throughout the work, three applications were carried out, each one being developed using different techniques studied throughout the text.

The first application consisted of using the methods of logistic growth and the least squares method in order to carry out a study on the growth of cases on COVID-19. The second application consisted of the analysis and interpretation of different planar systems, having as context an interesting application suggested by Strogatz (1994). Finally, the last application consisted in the study of the Lokta-Volterra model, seeking to understand the relations arising from the competition between sheep and rabbits.

At the end of the work, it was possible to perceive the importance of such topics in the understanding of reality and the world we are part of. It was also possible to consolidate and improve my own knowledge, thus having a personal growth in multiple ways.

Keywords: Differential Equations, Linear Algebra, Planar Systems, Applications.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 9 |
| 2 | Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem | 11 |
| 2.1 | Modelo de Crescimento Populacional | 14 |
| 2.2 | Colheita Constante e Bifurcações | 16 |
| 2.3 | Colheita Periódica e Soluções Periódicas | 17 |
| 2.4 | COVID-19 em Sorocaba: Análise do número de casos | 18 |
| 2.4.1 | Introdução | 18 |
| 2.4.2 | Crescimento Logístico | 19 |
| 2.4.3 | Método dos Quadrados Mínimos | 22 |
| 2.4.4 | Análise dos Dados | 23 |
| 3 | Sistemas de Equações Diferenciais | 25 |
| 3.1 | Equações Diferenciais de Segunda Ordem | 27 |
| 3.2 | Sistemas Planares | 28 |
| 3.3 | Fundamentos de Álgebra Linear | 30 |
| 3.4 | Sistemas Lineares Planares | 33 |
| 3.5 | Autovalores e Autovetores | 33 |
| 3.6 | Resolvendo Sistemas Lineares | 36 |
| 4 | Retratos de Fase de Sistemas Planares | 39 |
| 4.1 | Primeiro Caso: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ | 39 |
| 4.2 | Segundo Caso: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ | 42 |
| 4.3 | Terceiro Caso: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ | 42 |
| 4.4 | Autovalores Complexos | 43 |
| 4.5 | Autovalores Repetidos | 46 |
| 4.6 | Mudança de Coordenadas | 47 |
| 4.7 | Plano Traço-Determinante | 50 |
| 4.8 | Aplicação: Romeu e Julieta | 51 |
| 4.8.1 | Primeiro Caso: Diagonal Principal Nula | 52 |
| 4.8.2 | Segundo Caso: Diagonal Secundária Nula | 56 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Sistemas Planares não lineares | 59 |
| 5.1 | Ponto de Equilíbrio e Linearização | 59 |
| 5.2 | Linearização em Sistemas Planares | 60 |
| 5.3 | Modelo Lokta-Volterra | 61 |
| 5.4 | Aplicação: Competição entre ovelhas e coelhos | 61 |
| 6 | Considerações Finais | 67 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a > 0$. | 13 |
| 2.2 | Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a < 0$. | 13 |
| 2.3 | Gráfico das soluções de $x' = ax(1 - x)$ | 15 |
| 2.4 | Gráfico da função $f_a(x) = ax(1 - x)$ | 16 |
| 2.5 | Gráfico da função $f_h(x) = x(1 - x) - h$ | 16 |
| 2.6 | Aplicação de Poincaré para $x' = 5x(1 - x) - 0,8(1 + \text{sen}(2\pi t))$ | 18 |
| 2.7 | Ajuste linear de pontos isolados | 22 |
| 2.8 | Código em python do Método dos quadrados mínimos | 24 |
| 2.9 | Comparação entre os métodos e os dados experimentais | 24 |
| 3.1 | Campo vetorial para o sistema $x' = y, y' = -x$. | 28 |
| 4.1 | Retrato de fase de autovalores reais e distintos. | 40 |
| 4.2 | Retrato de fase de autovalores reais e negativos. | 43 |
| 4.3 | Retrato de fase de autovalores reais e positivos. | 43 |
| 4.4 | Retrato de fase de centros com sentido horário. | 45 |
| 4.5 | Retrato de fase de focos instáveis. | 46 |
| 4.6 | Plano Traço-Determinante. | 51 |
| 4.7 | Plano cartesiano Romeu-Julietta. | 53 |
| 4.8 | Caso em que $b > 0$ e $c > 0$. | 53 |
| 4.9 | Caso em que $b < 0$ e $c < 0$. | 54 |
| 4.10 | Caso em que $b < 0$ e $c > 0$. | 55 |
| 4.11 | Caso em que $b > 0$ e $c < 0$. | 55 |
| 4.12 | Caso em que $a, d > 0$. | 56 |
| 4.13 | Caso em que $a, d < 0$. | 57 |
| 5.1 | Retrato de fase próximo ao ponto fixo $(0,0)$. | 63 |
| 5.2 | Retrato de fase próximo ao ponto fixo $(0,2)$. | 63 |
| 5.3 | Retrato de fase próximo ao ponto fixo $(3,0)$. | 64 |
| 5.4 | Retrato de fase próximo ao ponto fixo $(1,1)$. | 64 |
| 5.5 | Retrato de fase para $x' = x(3 - x - 2y)$ e $y' = y(2 - x - y)$. | 65 |

Capítulo 1

Introdução

O início deste trabalho se deu durante uma iniciação científica realizada no ano de 2021, em que o foco era o estudo da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, tendo também como objetivos: aprender a fazer pesquisa bibliográfica, despertar no aluno o interesse pela matemática, aprender utilizar software Mathematica, utilizar LaTeX, possibilitar ao aluno não só o preenchimento das lacunas em sua formação mas também aprimorar seu espírito crítico.

Justamente por afinidade e no interesse em estabelecer relações e modelos que descrevem diferentes comportamentos, optou-se por, na realização do TCC, focar no estudo das equações diferenciais, realizando diferentes aplicações.

O primeiro capítulo deste trabalho consiste no estudo e na definição de importantes conceitos relacionados às equações diferenciais. No término do capítulo é realizada a primeira aplicação, consistindo na comparação entre diferentes técnicas para a modelagem do crescimento do Covid-19, sendo elas o crescimento logístico e o método dos quadrados mínimos. Percebendo que é possível estabelecer uma proximidade até certo ponto, mas para além deste ponto, os modelos se distanciam cada vez mais da realidade.

Já o segundo capítulo consiste no estudo de importantes técnicas nas quais o restante do trabalho utilizará como suporte. Conceitos importantes como autovalores e autovetores são estudados neste capítulo.

O terceiro capítulo consiste no estudo detalhado dos sistemas planares, separando em diferentes casos em que, simplesmente o fato de saber os autovalores associados ao sistema já é o suficiente para compreender o comportamento das suas soluções. No término do capítulo é realizada a segunda aplicação, uma sugestão de Strogatz (1988) que estabelece uma relação entre o futuro amoroso de um casal através da resolução de sistemas planares.

Já o quarto e quinto capítulo consistem no estudo ao redor dos pontos de equilíbrio de determinado sistema, realizando então a terceira e última aplicação, consistindo no modelo competitivo entre ovelhas e coelhos. É interessante perceber que, diferente dos modelos competitivos usuais em que uma espécie é presa e a outra predador, neste modelo ambas as espécies estão sujeitas aos mesmos recursos (neste sentido os recursos se referem

à alimentação), que por sua vez são limitados, isso faz com que seja possível realizar uma interessante conclusão acerca de qualquer modelo em que ambas as espécies se sujeitam ao compartilhamento de recursos em comum.

Tomando como principais referências Hirsch (1974) e Strogatz (1988), pôde-se concluir que todos os objetivos foram concluídos de forma extremamente satisfatória, despertando no interesse ainda maior em continuar pesquisando e estabelecendo relações com a matemática e o mundo.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Muitos comportamentos e leis físicas são regidos por relações envolvendo a taxa nas quais as coisas variam, isto é, são regidos por equações envolvendo derivadas. Tais equações quando descrevem algum fenômeno natural são chamadas de *modelo matemático*. Equações envolvendo derivadas são chamadas de *equações diferenciais*. Quando essas derivadas são simples, ou seja, a função incógnita da equação é uma função de uma variável real então a equação é chamada de *equação diferencial ordinária*. Além disso, quando a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação é um, ela é então chamada de *equação diferencial de primeira ordem*.

Este capítulo consiste em introduzir alguns elementos da teoria de equações diferenciais de primeira ordem, isto é, equações da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (2.1)$$

em que f é uma função de duas variáveis. Tem-se também que, uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação (2.1) para todo t em algum intervalo I , isto é,

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t)), \quad \forall t \in I$$

é chamada de *solução* da equação diferencial (2.1) (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Exemplo 2.1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ay. \quad (2.2)$$

Tem-se que

$$y(t) = ke^{at} \quad (2.3)$$

é solução para toda constante $k \in \mathbb{R}$. Isso é simples de se verificar, uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{d(ke^{at})}{dt} &= ake^{at} \\ &= ay(t).\end{aligned}$$

Notamos que no exemplo anterior, a solução tem infinitas soluções correspondendo à infinidade de valores que a constante k pode assumir. Caso o comportamento da solução seja identificado ou especificado em um determinado tempo t_0 , ou seja,

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.4)$$

encontramos, muitas vezes, um único elemento da família de soluções, ou seja, o valor da constante k é especificado. Essa condição adicional é chamada *condição inicial*.

A equação diferencial (2.1) juntamente com a condição inicial (2.4) define um *problema de valor inicial (P.V.I)*. Uma solução para um P.V.I é uma função y que é solução da equação diferencial que satisfaz $y(t_0) = y_0$.

Exemplo 2.2. Considere a equação (2.2) com a condição inicial $y(t_0) = y_0$. Então, teremos $ke^{at_0} = y_0$, então $k = y_0e^{-at_0}$. Com isso concluímos que a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0e^{-at_0}e^{at} \\ &= y_0e^{a(t-t_0)}.\end{aligned} \quad (2.5)$$

Quando a variável independente não aparece explicitamente na equação diferencial, ela é dita *autônoma*, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (2.6)$$

Gostaríamos de compreender o comportamento das soluções. Primeiramente podemos buscar por soluções mais simples, ou seja, funções constantes. Essas soluções são chamadas de *soluções de equilíbrio* da equação (2.6), que segundo Hirsch, Smale e Devaney (1974), são definidas como sendo soluções constantes da equação diferencial, isto é, não há variação de y quando t varia. Assim para tais soluções devemos ter $y'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, para encontrar as soluções de equilíbrio devemos resolver a equação $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ são também chamados de *pontos críticos*. A importância e o significado de tais pontos serão discutidos com mais detalhamento no decorrer do trabalho.

Exemplo 2.3. No caso da equação (2.5), a solução de equilíbrio é a função constante $y(t) = 0$.

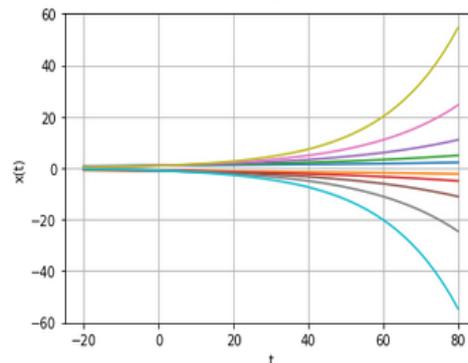
A constante a na equação (2.2) pode ser considerada um parâmetro, uma vez que a mudança em a altera significativamente o comportamento da solução.

1. Se $a > 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = \infty$ se $k > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = -\infty$ se $k < 0$.

2. Se $a = 0$ então $ke^{at} = k$.
3. Se $a < 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$.

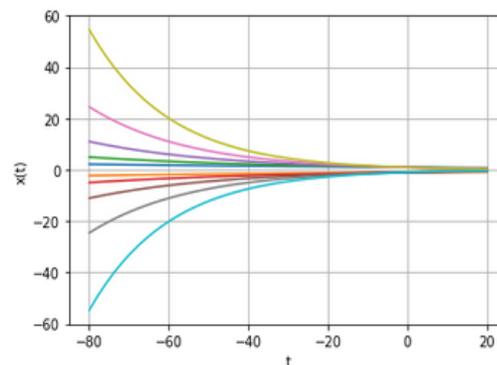
Podemos observar essas mudanças significativas de comportamento através das Figuras 2.1 e 2.2.

Figura 2.1: Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a > 0$.



Fonte: do próprio autor.

Figura 2.2: Gráfico das soluções de $x' = ax$ para $a < 0$.



Fonte: do próprio autor.

Percebe-se que o comportamento das soluções são diferentes dependendo do sinal do parâmetro a . Quando $a > 0$, todas as soluções não nulas tendem a se afastar do ponto crítico ($y = 0$). Entretanto, quando $a < 0$, todas as soluções não nulas tendem a se aproximar do ponto de equilíbrio. O ponto crítico é considerado um *repulsor* quando as soluções tendem a se afastar dele, e *atrator* quando as soluções tendem a se aproximar dele.

A solução é *estável* se $a \neq 0$, ou seja, caso a seja substituído por outra constante b de tal forma que o sinal seja igual ao de a , então a solução terá o mesmo comportamento. Porém se $a = 0$, então a mais sutil alteração em a resultará em uma grande mudança

de comportamento da solução. Desta forma, considera-se que existe uma bifurcação em $a = 0$.

2.1 Modelo de Crescimento Populacional

Como o próprio nome já diz, o modelo de crescimento populacional nos trará a variação de determinada população em relação ao tempo. Segundo Hirsch, Smale e Devaney (1974), alguns fatores são imprescindíveis para realizar a modelagem:

1. Conforme maior for a população, mais rapidamente ela cresce (Exemplo: procriação).
2. É impossível crescer infinitamente, diversos fatores impedem que isso seja possível (Exemplos: recursos, espaço geográfico).

Desta forma, uma possível equação diferencial que satisfaz esses fatores é o *modelo logístico* de crescimento populacional:

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right), \quad (2.7)$$

sendo a e N parâmetros positivos, a nos dá a taxa de crescimento populacional quando x é pequeno, enquanto N representa o tamanho da população "ideal" de tal forma que a população decresce caso $x > N$ e cresce caso $x < N$.

Considerando $N = 1$, o modelo se reduz a:

$$x' = f_a(x) = ax(1 - x). \quad (2.8)$$

Que é um exemplo de uma equação autônoma de primeira ordem, uma vez que não depende explicitamente do tempo, sendo a sua solução dada pelo método da separação de variáveis:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a dt.$$

Pelo método da integração por frações parciais, podemos reescrever a primeira parte da igualdade como:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx.$$

Assim, chamando de C a constante de integração,

$$\begin{aligned} \ln(x) - \ln(1-x) &= at + C \Rightarrow \\ e^{\ln(x) - \ln(1-x)} &= e^{at+C}. \end{aligned}$$

Fazendo $e^C = K$ temos,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} &= Ke^{at} \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{Ke^{at}}{1+Ke^{at}}.\end{aligned}$$

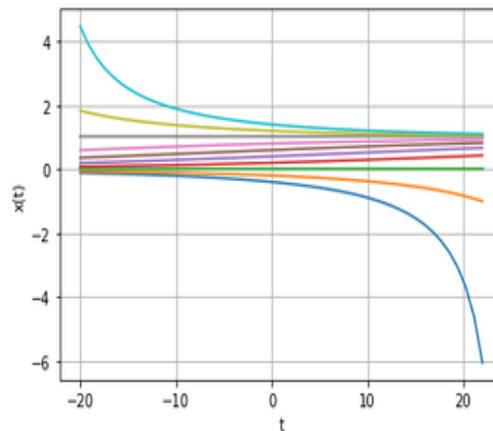
Calculando o valor de $x(0)$ encontramos $K = \frac{x(0)}{1-x(0)}$, de tal forma que:

$$x(t) = \frac{x(0)e^{at}}{1-x(0)+x(0)e^{at}}. \quad (2.9)$$

Temos então que a solução é válida para qualquer valor inicial $x(0)$. Quando $x(0) = 1$, temos uma solução de equilíbrio, uma vez que $x(t) = 1$ ($\forall t \in \mathbb{R}$). Da mesma forma que $x(0) = 0$ implica em $x(t) = 0$, ($\forall t \in \mathbb{R}$).

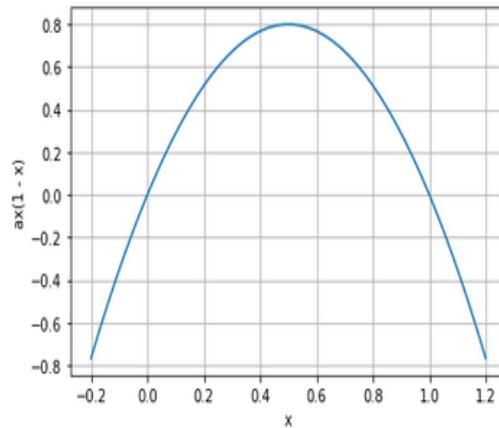
O gráfico da solução foi plotado com o intuito de compreender melhor o comportamento da solução e pode ser visualizado através da Figura 2.3. Com base nele, podemos fazer algumas considerações importantes. Quando $x(t) > 0$, todas as soluções tendem para a população ideal. Quando $x(t) < 0$ todas as soluções tendem a $-\infty$, o que não faz o menor sentido no contexto de uma modelagem populacional.

Figura 2.3: Gráfico das soluções de $x' = ax(1-x)$



Fonte: do próprio autor.

Nota-se que o mesmo comportamento é percebido através do gráfico da função $f_a(x) = ax(1-x)$, podendo ser visualizado através da Figura 2.4. A função cruza o eixo x nos pontos $x = 0$ e $x = 1$, sendo esses os seus pontos críticos. Quando $0 < x < 1$, temos que $f_a(x) > 0$, ou seja, a solução é crescente, tendendo a aumentar. Quando $x < 0$ ou $x > 1$, temos que $f_a(x) < 0$, ou seja, a solução é decrescente.

Figura 2.4: Gráfico da função $f_a(x) = ax(1 - x)$ 

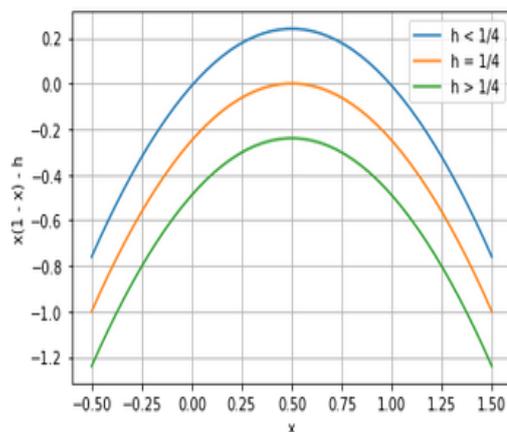
Fonte: do próprio autor.

2.2 Colheita Constante e Bifurcações

Vamos supor que determinada população seja colhida de forma constante. Considerando o modelo populacional (2.8) com o parâmetro $a = 1$, e que essa população seja colhida por uma taxa constante $h \geq 0$. A equação diferencial se torna:

$$x' = f_h(x) = x(1 - x) - h. \quad (2.10)$$

Na Figura 2.5, a função $f_h(x)$ foi separada em três diferentes casos, em que cada situação representa um comportamento diferente: $0 < h < 1/4$, $h = 1/4$ e $h > 1/4$.

Figura 2.5: Gráfico da função $f_h(x) = x(1 - x) - h$ 

Fonte: do próprio autor.

Percebe-se que quando $0 < h < 1/4$ a função f_h possui duas raízes, ou seja, possui dois pontos críticos x_l e x_r , de tal forma que $0 \leq x_l < x_r$. Através da análise da Figura

2.5, nota-se que $f'_h(x_l) > 0$, logo x_l é um repulsor. Da mesma forma que $f'_h(x_r) < 0$, logo x_r é um atrator.

Encontra-se um novo exemplo de bifurcação na medida que $h = 1/4$, de tal forma que a mais sutil alteração resultará em uma grande mudança no comportamento da solução. Os dois pontos de equilíbrio x_l e x_r se tornam um só na medida em que h se iguala $1/4$, e então desaparece quando $h > 1/4$. Ademais, percebe-se que $f_h(x) < 0$ para todos os valores de x quando $h > 1/4$, ou seja, todas as soluções decrescem até $-\infty$ na medida em que o tempo passa.

Para taxas de colheita menores ou iguais a $1/4$, a população perdura desde que a população inicial seja suficientemente grande ($x(0) \geq x_l$). Porém, a mais sutil alteração na taxa quando $h = 1/4$ terá grande influência no destino da população, uma vez que para qualquer taxa de colheita maior que $1/4$ a espécie se tornará extinta, destacando ainda mais a importância para a detecção de bifurcações.

2.3 Colheita Periódica e Soluções Periódicas

Para esta seção vamos partir de um pressuposto de que uma colheita nem sempre ocorre a uma taxa constante. Por exemplo, a taxa de pesca de muitas populações de peixe é maior no verão do que no inverno. Assumimos então que tal população é “colhida” a uma taxa periódica. Segundo Hirsch, Smale e Devaney (1974), a equação 2.11 é uma possível modelagem para a situação.

$$x' = f(t, x) = ax(1 - x) - h(1 + \text{sen}(2\pi t)), \quad (2.11)$$

onde a e h são parâmetros positivos e t é a medida de tempo em anos. Portanto, a taxa de colheita é máxima quando $t = \frac{1}{4} + n$ com n inteiro (representando o ano), e chega à taxa mínima quando $t = \frac{3}{4} + n$, exatamente meio ano após a taxa máxima. Nota-se que a equação (2.11) depende explicitamente do tempo, sendo então um exemplo de uma equação diferencial não autônoma. Como no caso autônomo, a solução $x(t)$ desta equação precisa satisfazer $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo t . Além disso, percebe-se não ser possível gerar uma solução analítica para tal equação com o suporte que têm-se no momento, tendo em vista que ela não é separável, forçando então que seja feita uma análise mais qualitativa.

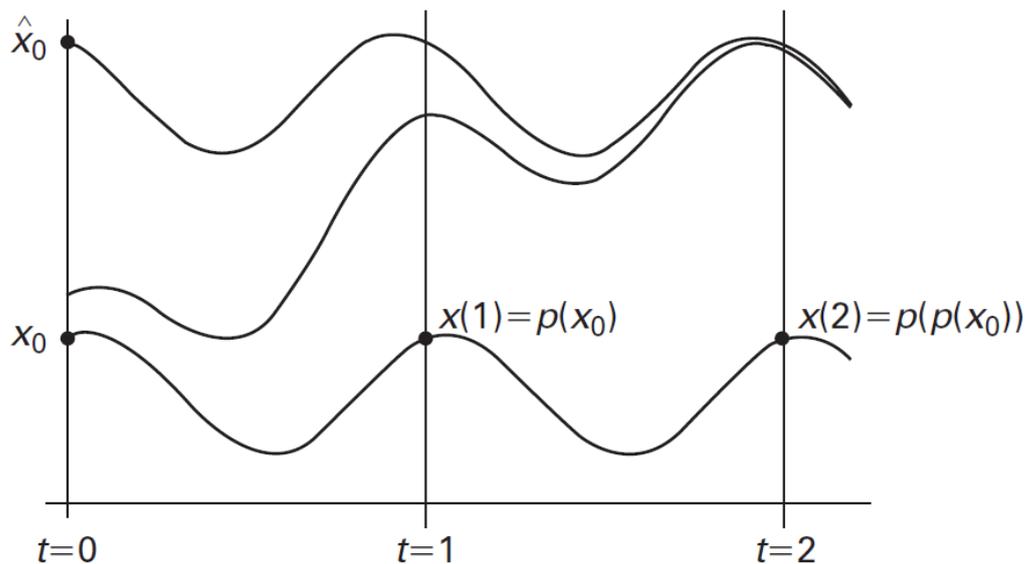
A fim de descrever o destino da população neste caso, primeiro é necessário notar que o lado direito da equação (2.11) é periódica com período igual a 1, ou seja, $f(t, x) = f(t + 1, x)$. Isso simplifica consideravelmente a busca por soluções, supondo que a solução de todos os problemas de valores iniciais seja conhecida apenas para $0 \leq t \leq 1$. Logo, como o período é 1, sabe-se a solução para todo t . Por exemplo, se $x_1(t)$ é a solução definida para $0 \leq t \leq 1$ e satisfaz $x_1(0) = x_0$, sendo também que $x_2(t)$ é a solução que satisfaz $x_2(0) = x_1(1)$. Então é possível estender a solução x_1 definindo que $x_1(t + 1) = x_2(t)$ para

$0 \leq t \leq 1$.

Posto isto, percebe-se que sabendo o comportamento da solução no intervalo $0 \leq t \leq 1$, é possível extrapolar de forma semelhante a todos os intervalos de tempo de tal forma que seja conhecida o comportamento da solução para todo t .

Supondo que o valor da solução no tempo $t = 1$ seja conhecida, satisfazendo qualquer condição inicial $x(0) = x_0$. Então, para cada condição inicial x_0 é possível associar o valor $x(1)$ da solução $x(t)$ que satisfaça $x(0) = x_0$. É possível então associar uma função $p(x_0) = x(1)$. Aplicando a mesma função pela segunda vez, encontra-se o valor de $x(2)$, ou seja, $p(p(x_0)) = x(2)$. Logo, ao aplicar esta mesma função n vezes, encontra-se o valor da solução no tempo n , de tal forma que se torna possível ter o conhecimento do destino da curva que representa a solução. A função p é chamada de *Aplicação de Poincaré* desta equação diferencial e pode ser visualizada através da Figura 2.6.

Figura 2.6: Aplicação de Poincaré para $x' = 5x(1 - x) - 0,8(1 + \text{sen}(2\pi t))$



Fonte: HIRSCH, SMALE e DEVANEY (p. 12).

2.4 COVID-19 em Sorocaba: Análise do número de casos

2.4.1 Introdução

A fim de trazer alguns conceitos trabalhados neste capítulo para uma realidade mais próxima, realizou-se uma comparação entre dois diferentes métodos para a modelagem do número de casos de COVID-19 em Sorocaba-SP.

Surpreendendo a todos, e surgida no final de 2019 em Hubei na China, a Pandemia

causada pela COVID-19, se alastrou pelo mundo com uma velocidade e um impacto assolador. Em meados de março de 2020 a pandemia era nova, porém presente em nosso país, e com o passar dos meses tomou proporções gigantescas. Seu alto nível de contágio impactou o mundo todo e devido a isso toda a comunidade científica do mundo se reuniu para combater uma das maiores pandemias dos últimos 100 anos e a matemática não poderia ficar de fora dessa.

Em busca da compreensão do comportamento de infecção do vírus da COVID-19, diversos modelos matemáticos surgiram com possíveis previsões de comportamento no número de contágio. Era importante entender quantas pessoas poderiam ser infectadas, qual o pico da pandemia, o quão desolador ela poderia ser e trazer dados otimistas em relação ao fim dela e a um possível controle.

O artigo de Wang, Qiao e Li (2020), utiliza do modelo matemático de crescimento populacional, especificamente o da equação logística de Verhulst, desenvolvido por Pierre François Verhulst, para encontrar uma equação que prevê o número de possíveis casos de COVID-19 com o passar do tempo. O modelo foi desenvolvido considerando o número de casos ocorridos entre 24 de março de 2020 a 24 de junho de 2020, no Texas, Estados Unidos. E tem como objetivo estimar o número de casos futuros através da equação logística desenvolvida, dando o valor aproximado de casos conforme o tempo, onde o tempo é contado em meses. No artigo é apresentado um modelo para os casos de COVID-19 do estado e as possíveis tendências de contaminação do vírus. No entanto, devido a simplificação do modelo, os resultados obtidos não fizeram uma previsão muito precisa.

Até onde sabe-se, não existem trabalhos sobre o estudo de comparação para os casos de COVID-19 através do Crescimento Logístico de Verhulst e do Método dos Quadrados Mínimos, para a cidade de Sorocaba, logo, o objetivo é comparar os dados reais de infectados com as aproximações dos modelos e perceber qual deles se aproxima mais da realidade, qual é o mais preciso e alcança valores mais satisfatórios em questão de previsão, a fim de alcançar uma dimensão dos impactos da pandemia na cidade.

2.4.2 Crescimento Logístico

Em algum momento se faz necessário ou se torna imprescindível questionar até onde uma coisa é capaz de chegar. Bacaer (2008) relata que Verhulst em 1838 fez isso e foi atrás de algo inimaginável; o limite de pessoas que a Bélgica poderia comportar/sustentar. O modelo Logístico de crescimento populacional de Verhulst, ao contrário dos convencionais modelos de crescimento utilizados, como o exponencial, onde se consideram apenas o crescimento em função do tempo podendo o valor da população ir ao infinito, leva em consideração um certo limite máximo na qual determinada população pode crescer, e que quando atingido esse valor o crescimento tende a estabilizar.

Esse limite estabelecido na equação logística de Verhulst leva em consideração fatores, como os recursos disponíveis no ambiente, a existência de outras populações que vivem ao

redor, o próprio tamanho da população, entre outros. O limite estabelecido, denominado de limite de carga, é um controlador para o crescimento populacional, pois impede que os valores alcancem números muito altos que não se enquadrem com a situação condizente. Devido ao seu limite de carga, que considera fatores para além da população em relação ao tempo, o crescimento logístico de Verhulst é muito utilizado nos estudos de crescimento populacional de vírus, habitantes de uma região e crescimento de espécies.

Já foi visto anteriormente que o modelo logístico de crescimento populacional pode ser representado pela equação (2.7), em que a e N são parâmetros positivos, a nos dá a taxa de crescimento populacional quando x é pequeno, e N representa o tamanho da população “ideal” de tal forma que a população decresce caso $x > N$ e cresce caso $x < N$.

Os dados foram retirados do Repositório do Centro de Ciência e Engenharia de Sistemas (CSSE) da Universidade Johns Hopkins, analisando o período correspondente entre os dias 28/03/2020 e 28/05/2021.

Para resolver o modelo de crescimento logístico (2.7) utilizamos o método de separação de variáveis, e em seguida aplica-se a integral como demonstrado pela equação (2.12).

$$\int \frac{N}{x(N-x)} dx = \int a dt. \quad (2.12)$$

Na parte esquerda da igualdade é necessário realizar integração por frações parciais, método indicado também por Stewart (2016), de tal forma que $N = A(N-x) + B(x)$. Quando $x = 0$, temos que: $N = A(N) \Rightarrow A = 1$. Quando $x = N$, temos que: $N = B(N) \Rightarrow B = 1$. Dessa forma transformamos a equação (2.12) na (2.13), facilitando muito a integração.

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{N-x} dx = \int a dt. \quad (2.13)$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \ln|x| - \ln|N-x| &= at + C \Rightarrow \\ e^{\ln|x| - \ln|N-x|} &= e^{at+C}. \end{aligned}$$

Seja $K = e^C$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{N-x} &= Ke^{at} \Rightarrow \\ x + xKe^{at} &= KNe^{at} \Rightarrow \\ x &= \frac{NKe^{at}}{1 + Ke^{at}} \Rightarrow \\ x &= \frac{N}{Ke^{-at} + 1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Considerando o valor inicial $x(0) = x_0$, conseguimos encontrar o valor da constante K :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{N}{K+1} \Rightarrow \\ K &= \frac{N-x_0}{x_0}. \end{aligned}$$

Realizando algumas manipulações algébricas e substituindo o valor de K em (2.14), conseguimos chegar em (2.15) que representa a solução geral da equação.

$$x = \frac{Nx_0}{e^{-at}(N-x_0) + x_0}. \quad (2.15)$$

Basta agora encontrar o valor das constantes N e x_0 . Inicialmente será necessário isolar N .

$$\begin{aligned} x[e^{-at}(N-x_0) + x_0] &= Nx_0 \Rightarrow \\ xe^{-at}N - xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 \Rightarrow \\ -xe^{-at}x_0 + xx_0 &= Nx_0 - xe^{-at}N. \end{aligned}$$

Encontramos assim o valor de N dado pela equação (2.16).

$$N = \frac{xx_0(e^{-at} - 1)}{xe^{-at} - x_0}. \quad (2.16)$$

Usando a equação acima, pode-se formar um conjunto de equações cuja interseção possibilitará encontrar os valores numéricos de a e N . Dessa forma, as seguintes condições iniciais são selecionadas:

- $t = 0, x_0 = 1$; onde $t = 0$ representa o dia 28/03/2020;
- $t = 200, x_{200} = 16408$; onde $t = 200$ representa o dia 13/10/2020;
- $t = 400, x_{400} = 48344$; onde $t = 400$ representa o dia 01/05/2021.

Uma vez que $N_{200} = N_{400}$ pois é constante, temos:

$$\frac{x_{200}(e^{-200a} - 1)}{x_{200}e^{-200a} - 1} = \frac{x_{400}(e^{-400a} - 1)}{x_{400}e^{-400a} - 1}. \quad (2.17)$$

Considerando $e^{-200a} = \alpha$ e simplificando a equação (2.17) temos:

$$\begin{aligned} 200(\alpha - 1)(x_{400}\alpha^2 - 1) &= x_{400}(\alpha^2 - 1)(x_{200}\alpha - 1) \Rightarrow \\ \alpha^2(x_{400} - x_{400}x_{200}) &+ \alpha(x_{400}x_{200} - x_{200}) + (x_{200} - x_{400}) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores indicados e resolvendo a equação de segundo grau encontramos que $\alpha = 0,000040263243750339205$. Levando em conta que $e^{-200a} = \alpha \Rightarrow a = \frac{\ln \alpha}{-200}$, logo, encontramos que $a = 0,050600357854$. Substituindo o valor encontrado em qualquer um dos lados da equação (2.17) encontramos o valor da constante N :

$$N = \frac{x_{200}(\alpha - 1)}{x_{200}\alpha - 1} = 48347,789027325511440289401.$$

Por fim, basta substituir as constantes encontradas na equação (2.16), chegando assim no modelo de crescimento logístico para a cidade de Sorocaba-Sp.

$$x(t) = \frac{48347,789027325511440289401}{e^{-0,050600357854t}(48346,789027325511440289401) + 1}. \quad (2.18)$$

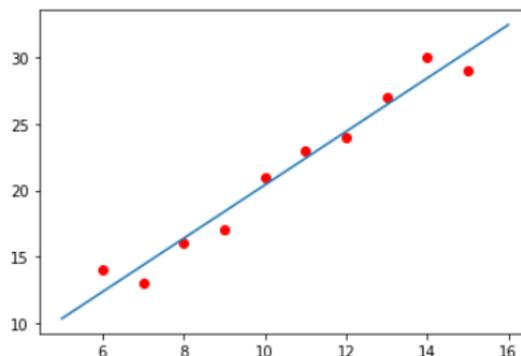
2.4.3 Método dos Quadrados Mínimos

Nem tudo cresce ou decresce de maneira padronizada, que possam ser modelados por funções lineares ou exponenciais por exemplo, e esse é o caso da somatória de casos de COVID-19 em função do tempo, ou seja, quando transfere-se dados reais de uma tabela para um gráfico tem-se apenas pontos isolados do tipo $(x, f(x))$, tornando a previsão de dados futuros, uma difícil tarefa.

O objetivo do método dos mínimos quadrados é portanto encontrar uma função que represente os valores tabelados a partir de dados reais, de modo que se tenha um menor erro das aproximações calculado medindo-se a distância entre o ponto coletado e o ponto aproximado pelo método. Além disso, nos permita determinar, com alguma precisão, valores futuros.

Na Figura 2.7 é possível observar, que os pontos em vermelho são os pontos isolados, coletados no mundo real, e em azul há a reta que aproxima-se dos pontos, tendo o menor erro possível, que é advinda de um tratamento de dados, que no caso é o método dos quadrados mínimos.

Figura 2.7: Ajuste linear de pontos isolados



Fonte: do próprio autor.

Conforme sugere Ruggiero (1994), dados os pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, o objetivo é encontrar os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que a função $\phi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$. Pressupõe-se que os dados experimentais possuam crescimento exponencial, desta forma teremos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{\ln(\beta_1) + x\beta_2} \Rightarrow \\ \phi(x) &= \beta_1 e^{x\beta_2} \Rightarrow \\ \ln \phi(x) &= \ln(\beta_1 e^{x\beta_2}) \Rightarrow \\ \phi_l(x) &= x\beta_2 + \ln(\beta_1).\end{aligned}$$

Sendo ϕ_l a função linearizada. Basta então resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

em que $a_{ij} = \sum_{k=1}^2 g_i(x_k)g_j(x_k)$, $b_i = \sum_{k=1}^2 y_k g_i(x_k)$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $\alpha_1 = \ln(\beta_1)$ e $\alpha_2 = \beta_2$. Para realizar os cálculos foi utilizado o *python*, sendo que o código pode ser visualizado através da Figura 2.8.

O algoritmo apresenta como solução: $\alpha_1 = 5,79191628$ e $\alpha_2 = 0.0146837$, ou seja:

$$\phi(x) = e^{5,79191628 + 0.0146837x}. \quad (2.19)$$

2.4.4 Análise dos Dados

Ao analisar a proximidade das funções (2.18) e (2.19) com os dados experimentais percebe-se que ambas modelam a situação de forma satisfatória até certo ponto. Como pode-se visualizar através da Figura 2.9, o método dos quadrados mínimos para o modelo de crescimento exponencial fica cada vez mais distante da realidade conforme se distancia do ponto A , enquanto a aplicação pelo crescimento logístico aparenta ser mais fiel a partir deste ponto, tendo em vista que, mais cedo ou mais tarde, o número de casos irá se estabilizar. Vale ressaltar também que muitos outros parâmetros como aquisição de imunidade, controles sanitários e restrições de circulação não foram considerados.

Sendo assim, fica nítido que ambas as funções falham em modelar a tendência do crescimento dos dados reais do número de casos do Covid-19 na medida em que estendemos o tempo para além do ponto A .

Figura 2.8: Código em python do Método dos quadrados mínimos

```
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import numpy as np
import math
from math import *

data = pd.read_excel('COVID SOROCABA.xlsx')

tempo = data['Tempo'].values
y = data['SomaCasosConfirmados'].values
ly = np.log(y)

stemp = np.sum(tempo)

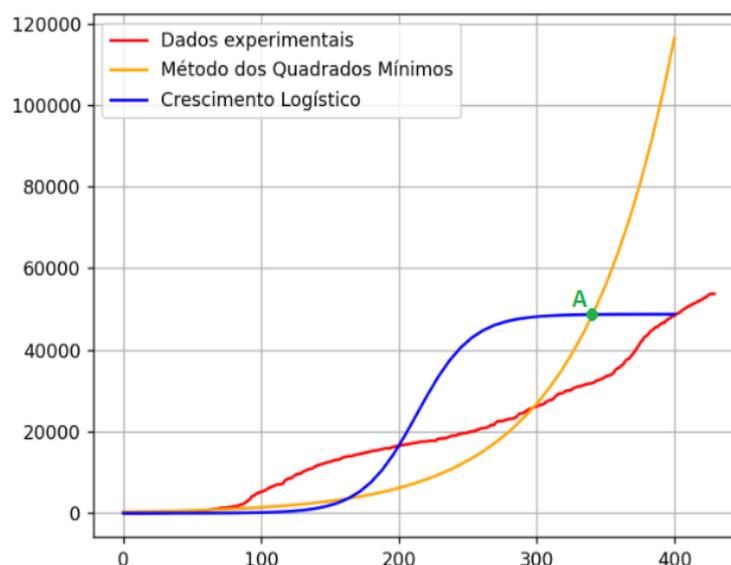
A = np.array([[len(tempo), stemp],
              [stemp, tempo.dot(tempo)]])

b = np.array([np.sum(ly), ly.dot(tempo)])

alpha = np.linalg.solve(A, b)
```

Fonte: do próprio autor.

Figura 2.9: Comparação entre os métodos e os dados experimentais



Fonte: do próprio autor.

Capítulo 3

Sistemas de Equações Diferenciais

Para este capítulo tomou-se como suporte de embasamento o livro Álgebra Linear, escrito por Boldrini (1980), o livro Curso de Álgebra Linear escrito por Coelho (2018), o livro Álgebra Linear e Aplicações escrito por Calioli (1990) e também o livro Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos de Hirsh (1974).

Um *sistema de equações diferenciais* é uma coleção de n equações diferenciais relacionadas entre si, da forma

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

onde f_i são funções com valores reais das $n + 1$ variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , e t . A não ser que seja especificado o contrário, será assumido que as derivadas parciais de todas as ordens de f_i existem e são contínuas, ou seja, f_i são C^∞ . A fim de simplificar, será utilizado a notação vetorial:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Será utilizado também a notação: $X = (x_1, \dots, x_n)$, ou ainda, o sistema poderá ser escrito de forma ainda mais concisa no formato:

$$X' = F(t, X),$$

em que

$$F(t, X) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Uma solução para tal sistema é uma função no formato $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ que satisfaça a equação, isto é,

$$X' = F(t, X(t)),$$

onde $X'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$.

Conforme já mencionado anteriormente, o sistema de equações será chamado de *autônomo* se nenhum dos f_i dependem de t , fazendo com que o sistema seja escrito como $X' = F(X)$. Relacionando com as equações diferenciais de primeira ordem, o vetor X_0 no qual $F(X_0) = 0$ é chamado de *ponto de equilíbrio* para o sistema. Um ponto de equilíbrio corresponde a uma solução constante $X(t) \equiv X_0$ de um sistema como o anterior, conforme também já foi mencionado anteriormente.

Nota-se também a necessidade de mencionar quais serão as regras de notação deste trabalho. As variáveis reais serão representadas por letras minúsculas tais como x, y, z, x_1, x_2, t , entre outras. Funções com valores reais também serão denotadas em minúsculo tais como $f(x, y)$ ou $f_1(x_1, \dots, x_n, t)$. As letras em maiúsculo serão utilizadas para representar vetores tais como $X = (x_1, \dots, x_n)$, ou para denotar funções com valores vetoriais tais como

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

ou

$$H(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Os espaços Euclidianos de dimensão n serão denotados por \mathbb{R}^n , na qual consiste em todos os vetores na forma $X = (x_1, \dots, x_n)$.

3.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Muitas das mais importantes equações diferenciais encontradas na ciência e na engenharia são equações diferenciais de segunda ordem, conforme indica Boyce e DiPrima (2010). Tais equações apresentam a forma

$$x'' = f(t, x, x'),$$

onde $x = x(t)$.

Exemplos importantes de equações de segunda ordem incluem a equação de Newton para a aceleração

$$mx'' = f(x),$$

a equação para um circuito em séries ressonante na engenharia elétrica

$$LCx'' + RCx' + x = v(t),$$

a equação de um oscilador harmônico forçado

$$mx'' + bx' + kx = f(t).$$

É importante perceber que tais equações são conjuntos especiais de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, bastando introduzir uma segunda variável $y = x'$.

Por exemplo, considerando a equação de segunda ordem no formato

$$x'' + ax' + bx = 0.$$

Se considerarmos $y = x'$, então podemos reescrever esta equação como um sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -bx - ay.\end{aligned}$$

Qualquer equação de segunda ordem pode ser tratada desta forma.

3.2 Sistemas Planares

Esta seção irá se concentrar em lidar com sistemas autônomos no \mathbb{R}^2 , que podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y).\end{aligned}$$

Simplificando esta notação é possível reduzir para a forma $X' = F(X)$ em que $X = (x, y)$ e $F(X) = F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

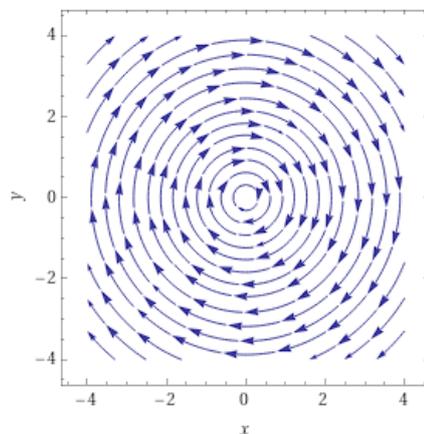
É possível considerar que o lado direito das equações esteja definindo um *campo vetorial* no \mathbb{R}^2 , ou seja, $F(x, y)$ representa um vetor em que as coordenadas x e y são respectivamente as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$.

Exemplo 3.1. O campo vetorial associado ao sistema

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

está representado na Figura 3.1. A solução deste sistema pode ser pensada como uma curva parametrizada no plano cuja forma é $(x(t), y(t))$ e em que, para cada t , o vetor tangente no ponto $(x(t), y(t))$ é $F(x(t), y(t))$.

Figura 3.1: Campo vetorial para o sistema $x' = y, y' = -x$.



Fonte: do próprio autor.

É fácil perceber que a curva

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \operatorname{sen}(t) \\ a \operatorname{cos}(t) \end{bmatrix}.$$

para qualquer $a \in \mathbb{R}$ é uma solução do sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} x'(t) &= a \operatorname{cos}(t) = y(t) \\ y'(t) &= -a \operatorname{sen}(t) = -x(t) \end{aligned}$$

respeitando a equação diferencial. Essas curvas definem circunferências de raio $|a|$ que são construídas no sentido horário conforme t cresce. Quando $a = 0$, as soluções se restringem nas funções constantes $x(t) \equiv 0 \equiv y(t)$.

É importante também perceber que este exemplo é equivalente à equação diferencial de segunda ordem $x'' = -x$ pela simples introdução da variável $y = x'$. Isso é um exemplo de uma *equação diferencial linear de segunda ordem*, na qual, de forma mais geral, pode ser escrita como

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t).$$

Um caso especial importante é a equação com coeficientes constantes

$$ax'' + bx' + cx = f(t),$$

em que pode ser representada pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + \frac{f(t)}{a}. \end{aligned}$$

Um caso ainda mais especial é o da *equação homogênea*, em que $f(t) \equiv 0$.

3.3 Fundamentos de Álgebra Linear

Nota-se a importância, antes de prosseguir com os sistemas de equações diferenciais, de relembrar alguns conceitos importantes sobre sistemas de equações lineares. É comum encontrar tais sistemas na forma

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que a, b, c , e d , assim como α e β são números reais. Na forma matricial, podemos escrever o sistema (3.1) como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz 2×2 formada pelos coeficientes a, b, c e d será denotada por A , ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Este sistema de equação é simples de ser resolvido, desde que exista uma solução. O sistema terá solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Sabe-se que tal determinante é dado por

$$\det(A) = ad - bc.$$

Se $\det(A) = 0$, o sistema pode ou não ter soluções, porém se tiver serão infinitas.

No caso especial em que o sistema é homogêneo, ou seja, $\alpha = \beta = 0$, sempre existirá infinitas soluções para

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quando $\det(A) = 0$. De fato, se o coeficiente a de A for diferente de zero, teremos $x = -\left(\frac{b}{a}\right)y$ e então

$$-c \left(\frac{b}{a}\right)y + dy = 0,$$

multiplicando ambos os lados da igualdade por a teremos que $(ad - bc)y = 0$. Sabendo que $\det(A) = ad - bc = 0$, a solução para o sistema de equação assume a forma $\left(-\left(\frac{b}{a}\right)y, y\right)$ para qualquer valor de $y \in \mathbb{R}$. Isso significa que toda solução pode ser representada por uma reta que passa pela origem do plano. A solução terá o mesmo comportamento caso pelo menos um dos coeficientes de A seja diferente de zero.

Sejam V e W vetores no plano, V e W serão *linearmente independentes* se não existe reta passando pela origem tal que ambos os vetores são paralelos a ela. Os vetores V e W serão *linearmente dependentes* caso exista alguma reta passando pela origem tal que ambos os vetores são paralelos a ela.

É também válido dizer que dois vetores serão linearmente independentes se eles não apontarem para direções iguais ou opostas, ou seja, V e W são linearmente independentes se não forem múltiplos entre si, ou melhor, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $V = \lambda W$.

Sejam $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ vetores não nulos. Temos que V e W são linearmente independentes se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Para demonstrar a ida será realizada a prova pela contrapositiva, isto é, seja

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} = 0$$

temos então que

$$v_1 w_2 = v_2 w_1$$

então,

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \lambda$$

logo, existe λ tal que

$$V = \lambda W$$

uma vez que

$$(v_1, v_2) = \left(\left(\frac{v_1}{w_1} \right) w_1, \left(\frac{v_2}{w_2} \right) w_2 \right) = (\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda (w_1, w_2).$$

A volta por sua vez é realizada de forma análoga, seja

$$V = \lambda W$$

então, temos que

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= \lambda (w_1, w_2) \Rightarrow \\ (v_1, v_2) &= (\lambda w_1, \lambda w_2) \Rightarrow \end{aligned}$$

desta forma, temos que

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} \Rightarrow v_1 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)v_2.$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} = v_1w_2 - v_2w_1.$$

Substituindo o valor encontrado de v_1 ,

$$v_1w_2 - v_2w_1 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)v_2w_2 - v_2w_1.$$

Simplificando, chega-se em

$$w_1v_2 - v_2w_1 = 0 = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que w_1 e v_2 são valores reais e, portanto, comutam.

Sempre que tivermos um par de vetores V e W linearmente independentes, podemos escrever qualquer vetor $Z \in \mathbb{R}^2$ como uma *combinação linear* de V e W . Isto é, sempre será possível achar um par de números reais α e β de tal forma que

$$Z = \alpha V + \beta W.$$

Além disso, α e β são únicos, isto é, seja $Z = (z_1, z_2)$, então basta resolver o sistema

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha v_1 + \beta w_1 \\ z_2 &= \alpha v_2 + \beta w_2 \end{aligned}$$

em que v_i, w_i , e z_i são valores reais conhecidos. Porém é nítido que o sistema possui apenas uma solução, uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Tem-se então que os vetores V e W definem uma *base* do \mathbb{R}^2 . Qualquer vetor Z possui um único par de coordenadas (α, β) relativos a V e W , de tal forma que $Z = \alpha V + \beta W$.

3.4 Sistemas Lineares Planares

Esta parte consiste em realizar algumas considerações importantes acerca da que, segundo Hirsch, Smale e Devaney (1974) classificam como a classe mais importante dos sistemas planares de equações diferenciais, os sistemas lineares. No caso autônomo, o sistema assume a forma

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que a, b, c , e d são constantes. É possível simplificar utilizando A como uma matriz de coeficientes, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Desta forma o sistema pode ser escrito como

$$X' = AX.$$

É importante destacar que a origem sempre será um ponto de equilíbrio para um sistema linear. Para achar outro ponto de equilíbrio é necessário resolver o sistema

$$\begin{aligned}ax + by &= 0 \\cx + dy &= 0.\end{aligned}$$

Esse sistema possui solução não nula se e somente se $\det(A) = 0$. Como visto anteriormente, se $\det(A) = 0$, então existem infinitos pontos de equilíbrio contidos em uma reta que passa pela origem. Desta forma pode-se concluir que: existirá um único ponto de equilíbrio $(0, 0)$ se $\det(A) \neq 0$; existirá infinitos pontos de equilíbrio contidos em uma reta que passa pela origem caso $\det(A) = 0$ (desde que A não seja uma matriz nula).

3.5 Autovalores e Autovetores

O foco agora passa a ser soluções de não equilíbrio para o sistema linear $X' = AX$. Suponha que V_0 é um vetor não nulo no qual $AV_0 = \lambda V_0$ em que $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$X(t) = e^{\lambda t}V_0$$

é solução do sistema. De fato

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V_0 \\ &= e^{\lambda t} (\lambda V_0) \\ &= e^{\lambda t} (AV_0) \\ &= A(e^{\lambda t} V_0) \\ &= AX(t) \end{aligned}$$

e portanto $X(t)$ é uma solução do sistema. Um vetor não nulo V_0 é chamado de *autovetor* de A se $AV_0 = \lambda V_0$ para algum λ . A constante λ é chamada de *autovalor* de A .

Como observado, existe uma relação extremamente importante entre os autovalores, autovetores, e as soluções de sistemas de equações diferenciais: Sejam V_0 e λ , respectivamente, o autovetor e o autovalor associado a matriz A , então tem-se que a função $X(t) = e^{\lambda t} V_0$ é uma solução do sistema $X' = AX$.

Outro ponto também importante a ser destacado é o de que se V_0 for um autovetor de A com autovalor λ , então qualquer vetor não nulo múltiplo de V_0 é também um autovetor de A com autovalor λ . De fato, se $AV_0 = \lambda V_0$, então

$$A(\alpha V_0) = \alpha AV_0 = \alpha(\lambda V_0) = \lambda(\alpha V_0)$$

para qualquer constante α diferente de zero.

Fica então nítido a importância em tais autovetores e autovalores e é justamente isto que será desenvolvido a seguir. Seja $V = (x, y)$ um autovetor, precisamos encontrar uma solução não nula (x, y) para a equação

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Nota-se então que existem três valores desconhecidos no sistema: as duas componentes x e y do autovetor V assim como o autovalor λ . Seja I a matriz identidade de ordem 2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então nota-se a possibilidade em escrever a equação na forma

$$(A - \lambda I)V = 0,$$

em que 0 simboliza o vetor $(0, 0)$.

Desta forma, $A - \lambda I$ é a matriz de coeficientes do sistema acima, sendo λ um valor relacionado a tais coeficientes. Como visto anteriormente, um sistema homogêneo terá

soluções não nulas se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes for igual a zero, ou seja, $\det(A - \lambda I) = 0$, equação essa nominada de *equação característica*. Chama-se então de polinômio característico o resultado do determinante, e é justamente a partir dele que encontraremos os valores de λ e em seguida associaremos aos dos seus autovetores.

Exemplo 3.2. Um exemplo em que é simples compreender tal procedimento é o de encontrar os autovalores e autovetores associados a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos então que

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Então o polinômio característico é

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3.$$

Simplificando chegamos em na equação característica

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

resultando então em dois autovalores $\lambda \pm 2$. Para $\lambda = 2$, é necessário resolver a equação

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo para a forma de sistema temos

$$\begin{aligned} (1 - 2)x + 3y &= 0 \\ x + (-1 - 2)y &= 0, \end{aligned}$$

simplificando chegamos em $x = 3y$, ou seja, qualquer vetor com a forma $(3y, y)$ com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 2$.

Para $\lambda = -2$ o processo é análogo, bastando resolver a equação

$$(A + 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

reduzindo para a forma de sistema e simplificando chegamos em $x = -y$, ou seja, qualquer vetor com a forma $(-y, y)$ com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -2$.

Desta forma, identificamos três soluções: a solução de equilíbrio localizada na origem,

assim como

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.6 Resolvendo Sistemas Lineares

De acordo com o que foi visto anteriormente, foram encontradas duas raízes reais e distintas λ_1 e λ_2 da equação característica, gerando então um par de soluções do sistema de equações diferenciais na forma $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$, em que V_i é o autovetor associado ao autovalor λ_i . É importante destacar que cada uma dessas soluções são retas passando pela origem. De fato, é simples perceber que $X_i(0) = V_i$, e que tal ponto não está localizado na origem do plano. Para cada t , $e^{\lambda_i t} V_i$, encontram-se pares ordenados múltiplos de V_i , todos contidos na mesma reta que $X_i(0)$, reta que necessariamente irá cruzar a origem do plano. É importante notar também que se $\lambda_i > 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_i(t)| = \infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_i(t) = (0, 0).$$

Nota-se então que, conforme o tempo cresce, o valor de $X_i(t)$ também cresce de tal maneira que para $t_1 > t_2$ então $X(t_1) > X(t_2)$, fazendo com que $X_i(t)$ cresça de forma monótona até ∞ . O oposto ocorre caso $\lambda_i < 0$, por outro lado, se $\lambda_i = 0$ então a solução será a constante $X_i(t) = V_i$ para todo t pertencente ao domínio.

Surge então uma questão, como é possível encontrar todas as soluções para o sistema tendo em mãos um par de soluções? Sejam λ_1 e λ_2 autovalores reais distintos associados aos autovetores V_1 e V_2 . Então V_1 e V_2 são linearmente independentes, formando assim uma base do \mathbb{R}^2 , desta forma, dado qualquer ponto $Z_0 \in \mathbb{R}^2$, é possível encontrar um par único de α e β de tal maneira que

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = Z_0.$$

Seja então a função $Z(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ em que $X_i(t)$ represente a reta que contém todas as soluções. Nota-se que $Z(t)$ é também uma solução de $X' = AX$, uma vez que

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) \\ &= \alpha A X_1(t) + \beta A X_2(t) \\ &= A(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) \\ &= A Z(t), \end{aligned}$$

demonstrando então que $Z(t)$ é de fato uma solução.

Será mostrado também que, $Z(t)$ é a única solução de $X' = AX$ que satisfaz $Z(0) = Z_0$. Supondo por absurdo que $Y(t)$ seja outra solução de tal maneira que $Y(0) = Z_0$, então

$$Y(t) = \gamma(t)V_1 + \mu(t)V_2$$

com $\gamma(0) = \alpha$ e $\mu(0) = \beta$. Logo

$$AY(t) = Y'(t) = \gamma'(t)V_1 + \mu'(t)V_2.$$

Porém

$$\begin{aligned} AY(t) &= A(\gamma(t)V_1 + \mu(t)V_2) \\ &= \gamma(t)AV_1 + \mu(t)AV_2 \\ &= \gamma(t)\lambda_1V_1 + \mu(t)\lambda_2V_2. \end{aligned}$$

Comparando então o que foi encontrado, temos que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \gamma(t)\lambda_1 \\ \mu'(t) &= \mu(t)\lambda_2, \end{aligned}$$

lembrando que $\gamma(0) = \alpha$ e $\mu(0) = \beta$ e da relação entre as equações (2.2) e (2.5), então

$$\gamma(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}, \mu(t) = \beta e^{\lambda_2 t}$$

logo, $Y(t) = Z(t)$.

Foi encontrado então a solução única para o sistema $X' = AX$ que satisfaz $X(0) = Z_0$ para qualquer $Z_0 \in \mathbb{R}^2$. A combinação de todas as soluções é chamada de *solução geral* de $X' = AX$, ou seja, a *solução geral* é o conjunto de todas as solução de $X' = AX$ que compõe a solução única do problema de valor inicial $X(0) = Z_0$ para cada $Z_0 \in \mathbb{R}^2$.

Resumindo, temos que se A tiver um par de autovalores reais $\lambda_1 \neq \lambda_2$, respectivamente, associados aos autovetores V_1 e V_2 , então a solução geral para o sistema linear $X' = AX$ é dado por

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}V_1 + \beta e^{\lambda_2 t}V_2. \quad (3.3)$$

Capítulo 4

Retratos de Fase de Sistemas Planares

Considere $X' = AX$ e suponha que A tenha autovalores reais λ_1 e λ_2 de tal forma que $\lambda_1 < \lambda_2$. O foco deste capítulo, embasado tanto por Hirsch, Smale e Devaney (1974) quanto por Strogatz (1994), será compreender de que maneira tais autovalores interferem no comportamento da solução do sistema. Notam-se três possibilidades:

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
3. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

4.1 Primeiro Caso: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Considera o caso em que existem autovalores com sinais distintos. Vamos iniciar com um exemplo simples, seja o sistema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o método já mencionado anteriormente encontramos a equação característica:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

então λ_1 e λ_2 são os autovalores. É possível encontrar também que $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são, respectivamente, os autovetores de λ_1 e λ_2 . Logo, através da equação (3.3), obtemos a

solução geral do sistema:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\lambda_1 < 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{\lambda_1 t} = 0$, ou seja, todas as soluções na forma

$$\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

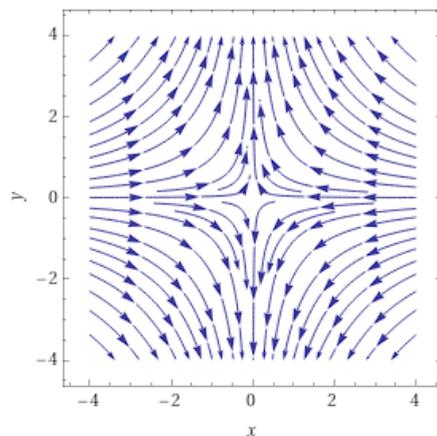
tendem a se aproximar cada vez mais do eixo das ordenadas, tendendo a $(0, 0)$ na medida em que o tempo avança. Da mesma forma pode-se concluir também que uma vez que $\lambda_2 > 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta e^{\lambda_2 t} = \infty$, ou seja, todas as soluções na forma

$$\beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tendem a se afastar cada vez mais do eixo das abscissas, se afastando de $(0, 0)$ na medida em que o tempo avança. Desta forma, temos que o eixo das abscissas é chamado de *linha estável*, já o eixo das ordenadas de *linha instável*.

A Figura 4.1 representa o retrato de fase para este sistema. Nela é possível notar de forma mais assertiva o comportamento do conjunto das soluções do sistema. O ponto de equilíbrio para sistemas com esse comportamento ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) é chamado de *ponto de sela*.

Figura 4.1: Retrato de fase de autovalores reais e distintos.



Fonte: do próprio autor.

Outro exemplo um pouco mais complicado é considerar o sistema $X' = AX$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o que já foi visto na seção 2, os autovalores de A são 2 e -2 associados, respectivamente, aos autovetores $(3, 1)$ e $(-1, 1)$.

Portanto, existirá uma linha instável que contém as soluções na forma

$$X_1(t) = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com tais soluções se afastando da origem conforme o tempo avança. Já a linha estável contém as soluções na forma

$$X_2(t) = \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com tais soluções tendendo para a origem conforme o tempo avança. Pela equação (3.3), qualquer outra solução irá assumir a forma

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para algum α e β . É importante destacar que, se $\alpha \neq 0$, a solução geral do sistema poderá ser aproximada para $X_1(t)$ com uma precisão cada vez maior conforme tempo avança ($t \rightarrow \infty$), uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da mesma forma que, se $\beta \neq 0$, a solução geral do sistema poderá ser aproximada para $X_2(t)$ com uma precisão cada vez maior na medida em que o tempo retrocede ($t \rightarrow -\infty$), uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos então que no caso geral em que A possui autovalores com sinais distintos, sempre teremos linhas estáveis e instáveis cujas soluções tendem a se afastar ou a se aproximar da origem. Todas as outras soluções se aproximam da linha instável quando $t \rightarrow \infty$, e tendem para a linha estável na medida que $t \rightarrow -\infty$.

4.2 Segundo Caso: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Vamos agora considerar o sistema $X' = AX$, em que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

porém $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, ou seja, ambos os autovalores são negativos. De forma análoga ao caso anterior temos que a solução geral para tal sistema é:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diferente do caso anterior, agora todas as soluções tendem para a origem na medida em que o tempo passa, ou seja, $t \rightarrow \infty$. Neste caso o ponto de equilíbrio recebe o nome de *nó estável*. É interessante então buscar compreender de qual forma essas soluções se aproximam da origem, para tal será calculado a inclinação dy/dx da solução ($\beta \neq 0$).

Temos então que

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= \beta e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

então,

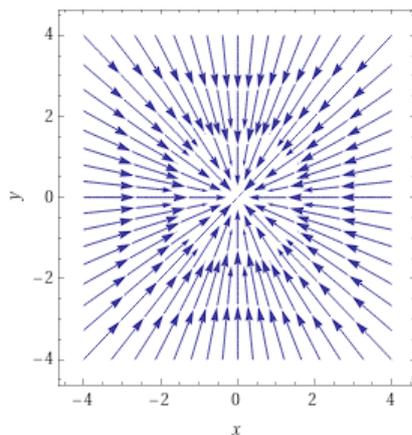
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, conclui-se que a inclinação se aproxima cada vez mais de $\pm\infty$ conforme o tempo avança, dependendo dos sinais de α e β . Isso faz com que as soluções se aproximem da origem tangenciando o eixo y . Outro ponto importante a ser destacado é de que, como $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, a solução associada ao autovalor λ_1 irá se aproximar muito mais rápido da origem do que a solução associada ao autovalor λ_2 , neste caso em particular observa-se que a coordenada x tendem para 0 muito mais rapidamente que a coordenada y . Portanto, λ_1 será considerado o autovalor mais forte, enquanto λ_2 será o mais fraco. O retrato de fase para este sistema pode ser observado através da Figura 4.2.

4.3 Terceiro Caso: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Este caso será análogo ao caso anterior, diferenciando apenas na parte em que como agora os autovalores são positivos as soluções irão fluir no sentido contrário, fazendo com que se afastem da origem na medida em que o tempo avança. O retrato de fase para este sistema pode ser observado através da Figura 4.3. Tem-se então que, para este caso, o

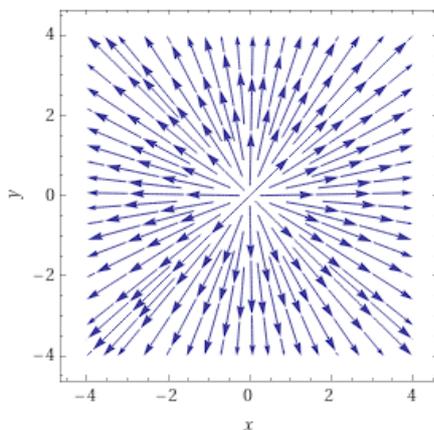
Figura 4.2: Retrato de fase de autovalores reais e negativos.



Fonte: do próprio autor.

ponto de equilíbrio recebe o nome de *nó instável*.

Figura 4.3: Retrato de fase de autovalores reais e positivos.



Fonte: do próprio autor.

4.4 Autovalores Complexos

Existe também a possibilidade de que os autovalores assumam valores complexos, podemos então dividir em dois casos particulares de acordo com a organização do retrato de fase.

O primeiro caso consiste no sistema na forma

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} X.$$

Desenvolvendo o polinômio característico encontramos os autovalores $\pm i\beta$, seguindo com o intuito de descobrir o autovetor associado ao autovalor $\lambda = i\beta$ é necessário resolver

$$\begin{bmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou simplesmente $i\beta x = \beta y$, encontrando o autovetor $(1, i)$, e com isso a função

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

que é uma solução complexa para o sistema.

Como estamos trabalhando com sistemas de equações reais, nota-se a necessidade para que a sua solução também seja da mesma natureza. Para tal utilizamos a fórmula de Euler, tendo então

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t).$$

Substituindo na solução encontrada anteriormente obtemos

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t) \\ i(\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) + i \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Separando $X(t)$ em parte real e imaginária, temos

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix},$$

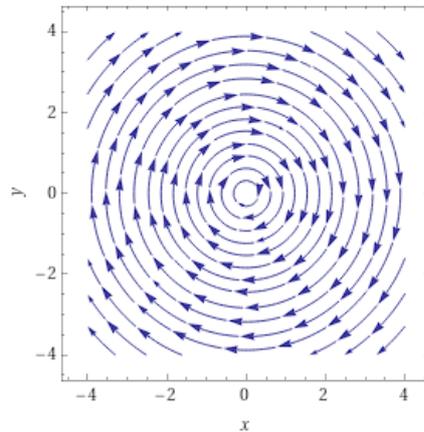
sendo possível verificar que ambas as partes são de fato soluções do sistema. Logo, a solução geral do sistema fica:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 i \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix},$$

em que c_1 e c_2 são constantes determinadas através dos problemas de valores iniciais.

É fácil perceber que ambas as soluções são funções periódicas com período $2\pi/\beta$. Neste caso o sistema é chamado de *centro* e as suas soluções podem ser representadas por circunferências centradas na origem. A orientação das soluções será no sentido horário se $\beta > 0$ e no sentido anti-horário se $\beta < 0$. O retrato de fase deste sistema pode ser visualizado através da Figura 4.4.

Figura 4.4: Retrato de fase de centros com sentido horário.



Fonte: do próprio autor.

Já o segundo caso será para sistemas da forma $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

e $\alpha, \beta \neq 0$. Desenvolvendo o polinômio característico encontramos os autovalores $\lambda = \alpha \pm i\beta$, observando então que $(1, i)$ é novamente um autovetor, agora associado a $\alpha + i\beta$. Logo, teremos uma solução complexa na forma

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

desenvolvendo de forma análoga ao caso anterior,

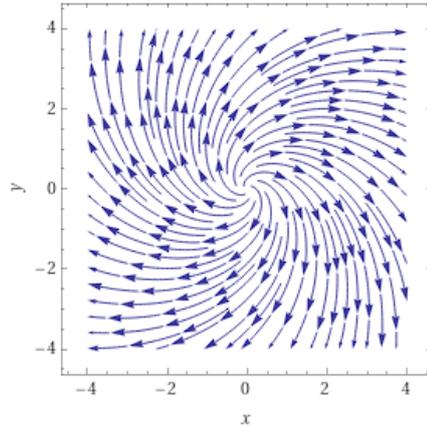
$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) + i \cos(\beta t) \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

É possível perceber que a solução possui parte real e parte imaginária, sendo possível mostrar que ambas as partes são soluções para o sistema. Desta forma, estabelecemos que a solução geral para tal sistema é

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) \end{bmatrix} + c_2 i e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Nota-se que se não fosse o termo $e^{\alpha t}$ a solução seria idêntica ao caso anterior, circunferências centradas na origem. O acréscimo deste termo faz com que a solução se transforme em espirais que se aproximam da origem se $\alpha < 0$ (neste caso o ponto de equilíbrio é chamado de *foco estável*) e se afastam da origem se $\alpha > 0$ (foco instável) na medida em que o tempo avança. O retrato de fase deste sistema pode ser visualizado através da Figura 4.5.

Figura 4.5: Retrato de fase de focos instáveis.



Fonte: do próprio autor.

4.5 Autovalores Repetidos

Por fim, o último caso restante é o de quando A possui autovalores reais e repetidos. Considerando novamente o exemplo simples em que A assume a forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

nota-se então que qualquer vetor não nulo será um autovetor de A , uma vez que

$$AV = \lambda V$$

para qualquer $V \in \mathbb{R}^2$. Logo, as soluções terão a forma

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} V.$$

Desta forma, é fácil concluir que as soluções irão tender até a origem quando $\lambda < 0$, e se afastar se $\lambda > 0$. Desta forma, temos que o ponto recebe o nome de *nó próprio*. É interessante perceber o que ocorre quando variamos um pouco a matriz A de tal forma

que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Novamente ambos os autovalores serão iguais a λ , porém agora só será possível associar com um único autovetor dado por $V = (1, 0)$. Tendo então a solução

$$X_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar outras soluções primeiro é necessário perceber que o sistema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y. \end{aligned}$$

Desta forma, se $y \neq 0$, então teremos que

$$y(t) = \beta e^{\lambda t}.$$

Logo, x' pode ser escrito como

$$x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}.$$

Utilizando o *método dos coeficientes a determinar*, que pode ser aprofundado com mais detalhes no livro de Hirsch, Smale e Devaney (1974), percebe-se que a solução terá a forma:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É importante destacar que, se $\lambda < 0$ cada termo da solução tende a zero na medida em que o tempo avança, e caso $\lambda > 0$ temos que todas as soluções tendem a se afastar da origem conforme $t \rightarrow \infty$.

4.6 Mudança de Coordenadas

No decorrer desta seção trabalhamos apenas com as matrizes na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

que em geral são matrizes mais simples de serem manipuladas e trabalhadas, denominadas de matrizes canônicas.

Logo, o ponto a ser trabalhado nesta seção será o de como sempre poderemos realizar “mudanças de coordenadas” de tal forma que qualquer sistema linear $X' = AX$ passe a ser representado por um novo sistema, que terá a sua matriz de coeficientes em uma das formas canônicas destacadas acima.

Sabe-se que uma *transformação linear* no \mathbb{R}^2 é a função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Agora será mostrado que, dado o sistema $X' = AX$, se $Y(t)$ for a solução do sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$, então $X(t) = TY(t)$ é solução de $X' = AX$. De fato,

$$\begin{aligned} (TY(t))' &= TY'(t) \\ &= T(T^{-1}AT)Y(t) \\ &= A(TY(t)). \end{aligned}$$

Podemos concluir então que a transformação linear T converte soluções de $Y' = (T^{-1}AT)Y$ para soluções de $X' = AX$. Por outro lado, a transformação linear T^{-1} converte a solução de $X' = AX$ para soluções de $Y' = (T^{-1}AT)Y$.

Vale ressaltar que a matriz T é invertível se, e somente se, a sua determinante for não nula, ou seja, $\det(T) \neq 0$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \\ T^{-1} &= \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora basta saber como encontrar a matriz T responsável pela transformação, acontece que na maioria dos casos e excepcionalmente em todos encontrados neste trabalho a matriz T será construída de tal forma que os autovetores da matriz A constituem as suas colunas.

Por exemplo, seja o sistema $X' = AX$ de tal forma que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

nota-se que a matriz A não está na forma canônica, vamos então realizar a transformação.

Calculando $\det(A - I\lambda)$ e igualando o resultado a zero encontramos os autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Para encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é

necessário resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 \\ 1 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

chegando no autovetor $V_1 = (1, 1)$.

Para encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$ é necessário resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} -1+2 & 0 \\ 1 & -2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

chegando no autovetor $V_2 = (0, 1)$.

Desta forma, temos que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que, conforme já mencionado, as colunas de tal matriz são formadas pelos autovetores, calculando a sua inversa temos:

$$T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora basta calcular $T^{-1}AT$:

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= T^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $T^{-1}AT$ está na forma canônica, tem-se também que a solução geral para o sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ é

$$Y(t) = \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que é simples calcular que $Y' = (T^{-1}AT)Y$ possui os autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ que estão relacionado, respectivamente, aos autovetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Por fim, para encontrar a solução geral do sistema $X' = AX$ basta calcular $TY(t)$:

$$\begin{aligned} TY(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

É evidente que tal exemplo foi desenvolvido apenas para meios de ilustração, uma vez que os autovalores e autovetores da matriz A já haviam sido encontradas no início do exemplo.

4.7 Plano Traço-Determinante

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

relacionada ao sistema $X' = AX$, e lembrando que a soma dos elementos de sua diagonal principal é denominado *traço* de A , ou seja, $T = a + d$. Temos também que $D = ad - bc$ é seu determinante. Assim sua equação característica pode ser escrita como:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, temos então que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(T \pm \sqrt{(T)^2 - 4D} \right).$$

É importante notar que $\lambda_+ + \lambda_- = T$ e $\lambda_+ \lambda_- = D$, ou seja, a soma dos autovalores de A será o traço, enquanto o seu produto será o determinante de A . Analisando a equação acima é simples perceber que os autovalores relacionados a A serão

1. Complexos com parte imaginária se $T^2 - 4D < 0$;
2. Reais distintos se $T^2 - 4D > 0$;
3. Reais repetidos se $T^2 - 4D = 0$.

Podemos nos aprofundar um pouco mais e estabelecer a relação entre os valores de T e D com o comportamento das soluções do sistema $X' = AX$. Quando $T^2 - 4D < 0$, então a parte real dos autovalores será $T/2$, e a solução admitirá a forma de um

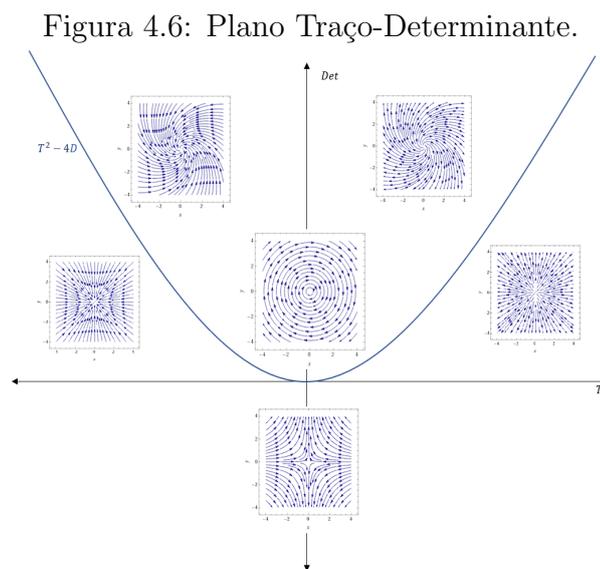
1. Foco estável se $T < 0$;

2. Foco instável se $T > 0$;
3. Centro se $T = 0$.

Já se $T^2 - 4D > 0$, então ambos os autovalores serão reais, então o ponto de equilíbrio das soluções será um

1. Ponto de sela se $D < 0$;
2. Nó estável se $D > 0$ e $T < 0$;
3. Nó instável se $D > 0$ e $T > 0$.

Coletando todas as informações listadas é possível construir o plano traço-determinante. Este plano nos permitirá compreender o comportamento das soluções de determinado sistema apenas através da análise dos valores de T e D . Tal plano está representado pela Figura 4.6.



Fonte: do próprio autor.

4.8 Aplicação: Romeu e Julieta

Strogatz (1988) propõe um interessante modelo a fim de ilustrar as ideias propostas neste capítulo, explorado e trabalhado também por Dávalos e Hernández (2014). Vamos supor um casal, de forma mais específica Romeu e Julieta, será que tal casal se amará para sempre independente de qualquer situação? É possível modelar esse problema e visualizar a mudança advinda de diferentes contextos? Para responder tais perguntas inicialmente

vamos modelar a situação da seguinte forma:

$R(t)$ = amor/ódio de Romeu por Julieta no tempo t

$J(t)$ = amor/ódio de Julieta por Romeu no tempo t .

O sistema ficaria então:

$$\begin{aligned} R' &= aR + bJ \\ J' &= cR + dJ, \end{aligned}$$

mudando a notação:

$$\begin{bmatrix} R' \\ J' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix},$$

ou ainda:

$$S' = AS,$$

em que

$$S = \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O objetivo é buscar compreender qual a relação dos coeficientes da matriz A com o futuro amoroso do casal. Tais relações serão representadas em um plano cartesiano, representado pela Figura 4.7, em que valores positivos representam o amor e valores negativos o ódio, sendo possível perceber o crescimento do amor/ódio com o passar do tempo.

4.8.1 Primeiro Caso: Diagonal Principal Nula

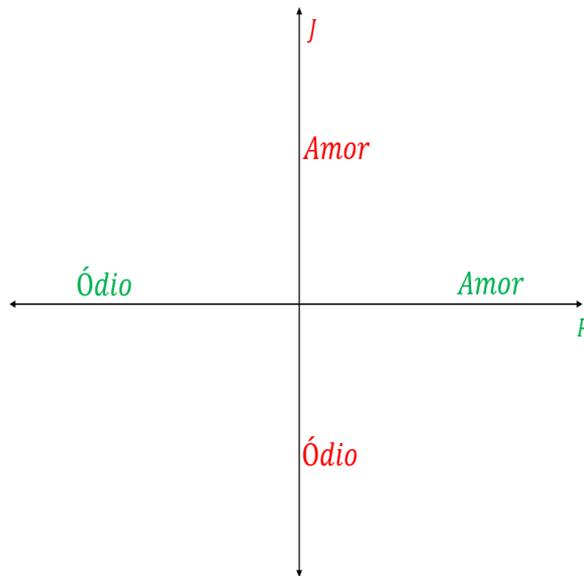
O primeiro caso a ser considerado, será quando a diagonal principal da matriz A for nula. O sistema ficaria então:

$$\begin{aligned} R' &= bJ \\ J' &= cR. \end{aligned}$$

Isso faz com que os sentimentos de Romeu dependam única e exclusivamente dos de Julieta, da mesma forma que os sentimentos de Julieta dependem unicamente dos de Romeu.

Vamos subdividir esse primeiro caso em duas partes, uma em que o determinante

Figura 4.7: Plano cartesiano Romeu-Julietta.

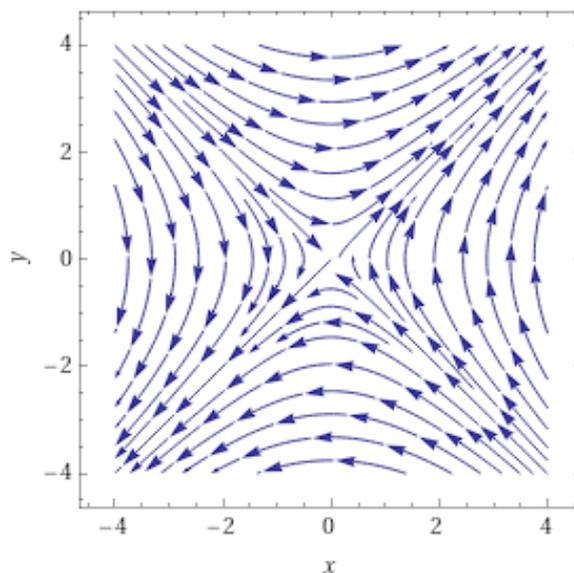


Fonte: do próprio autor.

da matriz A seja positivo, e outra em que o determinante seja negativo. Sabe-se que o determinante de A é dado por $ad - bc$, tendo $a = d = 0$, então $\det(A) = -bc$.

Logo, para que o determinante seja menor que zero, temos que $b > 0$ e $c > 0$ ou $b < 0$ e $c < 0$, separemos então esses dois casos.

Quando ambos os coeficientes forem positivos, poderemos ilustrar o retrato de fases através da Figura 4.8. É possível compreender que, com o passar do tempo, o casal se

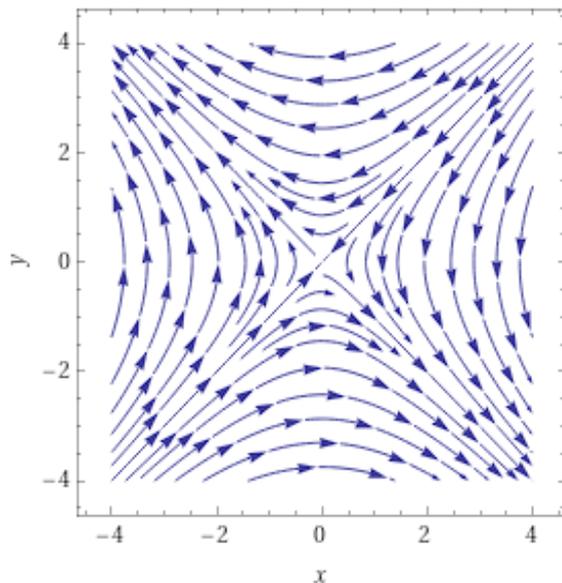
Figura 4.8: Caso em que $b > 0$ e $c > 0$.

Fonte: do próprio autor.

odeia cada vez mais ou se ama cada vez mais. Pode ser classificado como casal com emoções intensas, seja para o amor quanto para o ódio.

Já quando os coeficientes forem negativos, é possível ilustrar o retrato de fases através da Figura 4.9. Isso faz com que conforme Romeu intensifica o seu amor por Julieta, ela

Figura 4.9: Caso em que $b < 0$ e $c < 0$.



Fonte: do próprio autor.

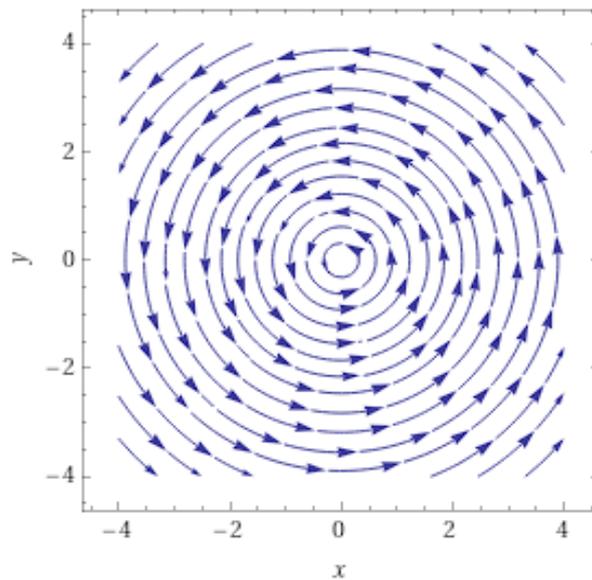
por sua vez intensifica o Ódio por Romeu, da mesma forma que a situação com os papéis trocados também é verdadeira. Podendo ser classificado como casal com sentimentos opostos.

Agora quando a determinante for maior que zero, temos também separar em dois casos, sendo então $b > 0$ e $c < 0$ ou $b < 0$ e $c > 0$, separemos então esses dois casos.

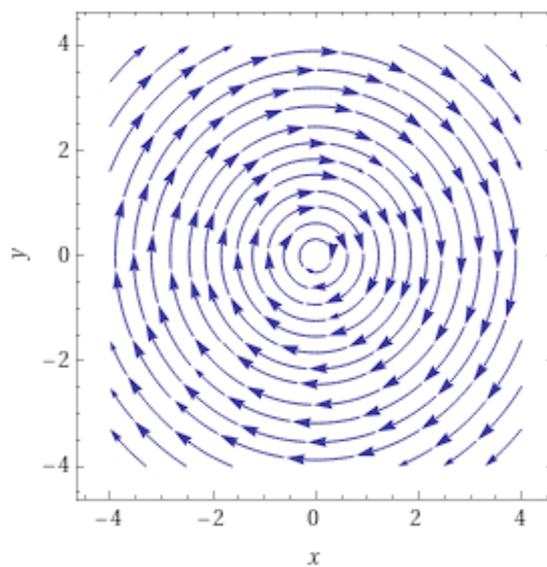
Quando $b < 0$ e $c > 0$, o retrato de fase poderá ser representado pela Figura 4.10. Isso faz com que conforme maior for o amor que Romeu sente, maior será o amor de Julieta por Romeu, mas Romeu começará a se afastar cada vez mais a partir do momento que Julieta estiver no ápice do seu amor, fazendo com que o ódio de Julieta comece a aumentar, e quando estiver no ápice do seu ódio, Romeu volta a ama-la. Podendo ser classificado como casal inconstante.

Já quando $b > 0$ e $c < 0$, o retrato de fases poderá ser representado pela Figura 4.11. É possível então perceber que, conforme maior for o amor que Romeu sente, maior será a vontade de Julieta sair de perto de Romeu, por outro lado, na medida que o ódio de Romeu aumenta, o amor de Julieta também aumenta. Podendo ser classificado como casal inconstante.

Utilizando os mecanismos estudados, é fácil perceber que b e c estão diretamente relacionados com os autovalores, que por sua vez, estão relacionados com a parametrização

Figura 4.10: Caso em que $b < 0$ e $c > 0$.

Fonte: do próprio autor.

Figura 4.11: Caso em que $b > 0$ e $c < 0$.

Fonte: do próprio autor.

da curva. De tal forma que conforme maior for o módulo das constantes, maior será amplitude das elipses que constituem o retrato de fase.

Relacionando com o contexto amoroso, temos que a influência de maiores ou menores intensidades em determinadas constantes refletem no ponto de pico dos sentimentos (ódio/amor).

4.8.2 Segundo Caso: Diagonal Secundária Nula

O segundo caso a ser considerado, será quando a diagonal secundária da matriz A for nula. O sistema ficaria então:

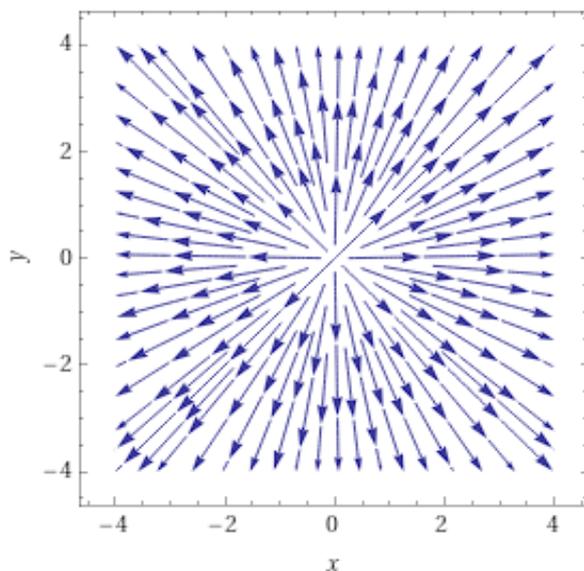
$$\begin{aligned}R' &= aR \\ J' &= dJ.\end{aligned}$$

Isso faz com que os sentimentos de Romeu e de Julieta dependam exclusivamente deles mesmos.

Vamos subdividir esse segundo caso em duas partes, uma em que o traço da matriz A seja positivo, e outra em que o traço seja negativo.

O primeiro caso, em que o traço é positivo, acontece quando $a, d > 0$ ou $ad < 0$ mas o valor positivo é maior que o negativo em módulo. Para quando $a, d > 0$ teremos nitidamente um caso em que o ponto de equilíbrio é um nó instável, conforme sugere a Figura 4.12. Nesse caso, percebe-se que o ponto crucial está nos primeiros instantes, o

Figura 4.12: Caso em que $a, d > 0$.



Fonte: do próprio autor.

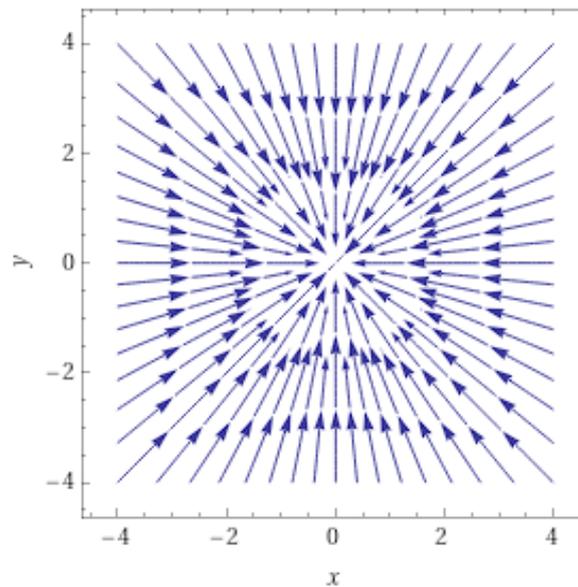
sentimento que cada um gera pelo outro tende a se intensificar cada vez mais e nunca vai mudar. Amor/Ódio a primeira vista.

Já para quando $ad < 0$, podemos ter $a > 0$ e $d < 0$ ou $a < 0$ e $d > 0$. Pelos estudos nesta seção, é possível estabelecer que ambas as relações fazem do ponto de equilíbrio um ponto de sela. Fazendo com que conforme um intensifique cada vez mais o seu sentimento (ódio ou amor), o outro fica cada vez mais indiferente, podendo classificar como casal unilateral.

Já para o traço ser negativo teremos também dois casos, quando $a, d < 0$ ou $ad < 0$ mas o valor positivo é menor que o negativo em módulo. O caso em que $ad < 0$ já foi discutido no parágrafo acima e possui a mesma interpretação.

Agora quando $a, d < 0$ teremos nitidamente um caso em que o ponto de equilíbrio é um nó estável, conforme sugere a Figura 4.13. Nesse caso, percebe-se o sentimento que

Figura 4.13: Caso em que $a, d < 0$.



Fonte: do próprio autor.

cada um possui pelo outro tende a perder cada vez mais a intensidade, acarretando em uma indiferença mútua. Podendo ser classificado como casal indiferente.

Capítulo 5

Sistemas Planares não lineares

Neste capítulo daremos uma breve introdução sobre pontos de equilíbrios e linearização, e apresentaremos uma aplicação utilizando um modelo de crescimento populacional.

5.1 Ponto de Equilíbrio e Linearização

Sabe-se que o comportamento dos retratos de fase são determinados pelos pontos de equilíbrio, destacado inúmeras vezes por Strogatz (1988), definidos justamente como sendo as coordenadas cuja solução da equação diferencial é uma constante, ou seja, se a for um ponto de equilíbrio e $x(t)$ a solução de determinada equação diferencial, então $x'(a) = f(a) = 0$, ou seja, o valor cuja aplicação em f resulta em zero.

Seja x^* um ponto de equilíbrio, e tomando como $n(t) = x(t) - x^*$ uma pequena perturbação de x^* . Com o intuito de compreender se a perturbação cresce ou diminui, derivamos a equação n .

$$n' = \frac{d}{dx}(x - x^*) = x',$$

uma vez que x^* é constante. Logo, $n' = x' = f(x) = f(x^* + n)$. Utilizando a expansão de Taylor, obtemos:

$$f(x^* + n) = f(x^*) + nf'(x^*) + O(n^2),$$

em que $O(n^2)$ representa as pequenas parcelas quadráticas de n . Sabendo que $f(x^*) = 0$ por x^* ser justamente um ponto de equilíbrio, então:

$$n' = nf'(x^*) + O(n^2).$$

Considerando que $f'(x^*) \neq 0$ e que $O(n^2)$ representa valores extremamente pequenos, então:

$$n' \approx n f'(x^*).$$

Esta equação linear em n é chamada de linearização em relação a x^* e através dela é possível perceber que a perturbação $n(t)$ cresce exponencialmente se $f'(x^*) > 0$ e decresce quando $f'(x^*) < 0$.

5.2 Linearização em Sistemas Planares

Considere os sistemas na forma:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

e supondo que (x^*, y^*) seja um ponto equilíbrio, ou seja,

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Seja também

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

as componentes responsáveis por uma pequena perturbação sobre o ponto de equilíbrio. De forma análoga ao desenvolvimento realizado em apenas uma dimensão, será analisado se a perturbação cresce ou decresce, e para isso, será necessário derivar a equação em u e v .

Sendo x^* constante, temos que:

$$\begin{aligned}u' &= (x - x^*)' = x' \\&= f(x, y) \\&= f(x^* + x - x^*, y^* + y - y^*) \\&= f(x^* + u, y^* + v).\end{aligned}$$

Realizando a expansão de Taylor, temos:

$$u' = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv),$$

uma vez que (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio, e que $O(u^2, v^2, uv)$ representa termos

quadráticos em u e v , que são extremamente pequenos, pode-se reduzir a equação para:

$$u' \approx u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}.$$

De forma análoga, é possível encontrar:

$$v' \approx u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y},$$

Logo, a perturbação (u, v) se desenvolve de acordo com:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

e essa é justamente a representação do *sistema linearizado*, em que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

é a matriz Jacobiana. É importante destacar as representações de derivadas parciais são na verdade pontos, uma vez que todas as derivadas estão aplicadas no ponto de equilíbrio (x^*, y^*) .

5.3 Modelo Lokta-Volterra

Alfred James Lokta e Vito Volterra desenvolveram, de forma independente, o modelo que atualmente é denominado como modelo Presa-Predador, ou modelo Lokta-Volterra, muito utilizado para descrever a dinâmica de competição entre espécies.

Competição entre espécies pode ser definida como uma relação desarmônica entre indivíduos, seja de mesma espécie ou de espécie diferente, em que necessitam de um mesmo recurso ambiental limitado. Acontece que tal processo competitivo acaba por regular a densidade populacional, ou até mesmo extinguir uma das espécies.

5.4 Aplicação: Competição entre ovelhas e coelhos

Com o intuito de exemplificar o estudo de sistemas planares, vamos estudar uma aplicação envolvendo uma aplicação do modelo de competição Lokta-Volterra entre duas espécies, sugerido também por Strogatz (1988), sendo elas o coelho e a ovelha. Considerando que ambas as espécies estejam competindo pelo mesmo alimento, que é limitado.

É interessante considerar dois pontos iniciais:

1. Cada espécie crescerá até sua ‘capacidade máxima’ na ausência da outra. Isso pode ser modelado assumindo o crescimento logístico para cada espécie. Os coelhos possuem uma capacidade extremamente alta de reprodução;
2. Algumas vezes o coelho consegue comer, mas geralmente a ovelha empurra o coelho para o lado para se alimentar. Considerando que esses conflitos ocorram a uma taxa proporcional ao tamanho de cada população. Além disso, supõe-se que os conflitos reduzem a taxa de crescimento de cada espécie, mas o efeito é mais severo para os coelhos.

Um possível modelo que respeita tais condições é:

$$\begin{aligned}x' &= x(3 - x - 2y) \\y' &= y(2 - x - y)\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}x(t) &= \text{população de coelhos,} \\y(t) &= \text{população de ovelhas}\end{aligned}$$

e $x, y \geq 0$.

Inicialmente vê-se a importância em encontrar os pontos de equilíbrio do sistema. Para isto, basta resolver $x' = 0$ e $y' = 0$ simultaneamente.

Para $x' = 0$ temos que $x = 0$ ou $3 - x - 2y = 0$, já para $y' = 0$ temos que $y = 0$ ou $2 - x - y = 0$. Obtendo os quatro pontos fixos: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$, e $(1, 1)$. Com o intuito de analisar o comportamento, calculamos a matriz Jacobiana:

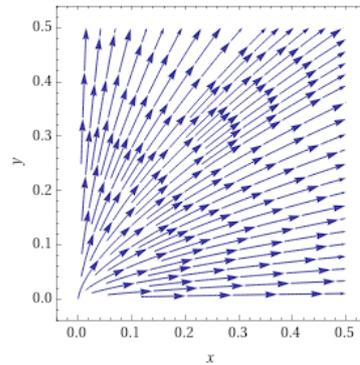
$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{bmatrix}$$

É necessário compreender então, o comportamento em torno dos quatro pontos fixos. Para $(0, 0)$, temos que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos então que os autovalores associados a tal matriz admitem os valores de $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$, sendo então um nó instável, uma vez que as soluções tendem a se afastar do ponto de equilíbrio. Sendo assim, as trajetórias saem da origem tangenciando o autovetor $v = (0, 1)$, associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$. É possível observar o comportamento ao redor de tal ponto de equilíbrio através da Figura 5.1.

Figura 5.1: Retrato de fase próximo ao ponto fixo (0,0).



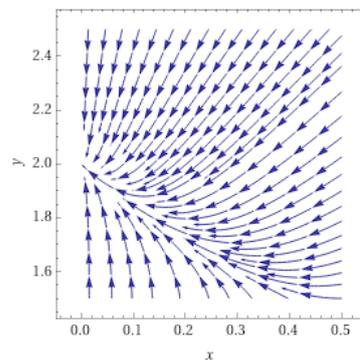
Fonte: do próprio autor.

Já para o ponto fixo (0,2), temos que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

tendo então $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ como autovalores associados à matriz, portanto, temos um nó estável, uma vez que as soluções tendem a se aproximar do ponto de equilíbrio na direção do autovetor $(1, -2)$, associado ao autovalor -1 . É possível observar o comportamento ao redor de tal ponto de equilíbrio através da Figura 5.2.

Figura 5.2: Retrato de fase próximo ao ponto fixo (0,2).



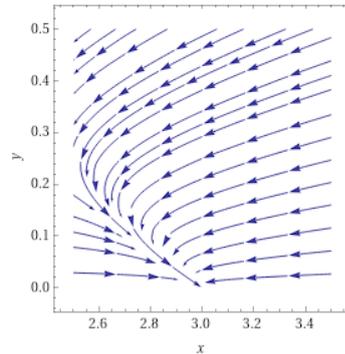
Fonte: do próprio autor.

Agora em relação ao ponto fixo (3,0), temos que

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

sendo $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$ seus autovalores, constituindo um nó estável. As trajetórias se aproximam em direção do autovetor $v = (3, -1)$, conforme ilustra a Figura 5.3.

Figura 5.3: Retrato de fase próximo ao ponto fixo (3,0).



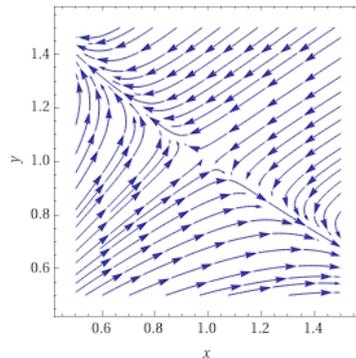
Fonte: do próprio autor.

Por fim, em relação ao ponto fixo (1, 1), temos que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

sendo $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$ seus autovalores, constituindo um ponto de sela, sendo possível observar o comportamento através da Figura 5.4.

Figura 5.4: Retrato de fase próximo ao ponto fixo (1,1).

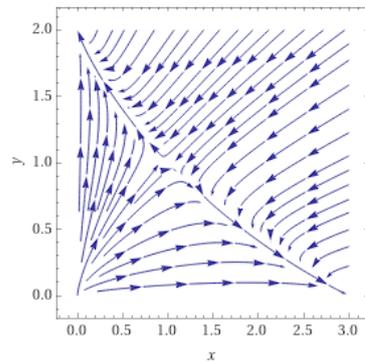


Fonte: do próprio autor.

Combinando as Figuras 5.1-5.4, é possível determinar a Figura 5.5, em que compreende-se o comportamento completo das soluções do modelo inicial.

É possível então perceber que o retrato de fase nos traz uma interessante interpretação biológica, mostrando que uma espécie pode acarretar na extinção da outra. Trajetórias se iniciando abaixo do ponto de sela ocasionam em uma eventual extinção das ovelhas, enquanto que as trajetórias iniciando acima do ponto de sela ocasionam em uma eventual extinção dos coelhos.

Esta relação de extinção também ocorre em outros modelos de competição, levando os

Figura 5.5: Retrato de fase para $x' = x(3 - x - 2y)$ e $y' = y(2 - x - y)$.

Fonte: do próprio autor.

biólogos a formularem o princípio da exclusão competitiva, afirmando que não é possível coexistir duas espécies competindo pelos mesmos recursos, considerando tais recursos limitados.

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao término dos estudos e da finalização deste trabalho, pôde-se perceber a importância dos tópicos estudados na compreensão da realidade e do mundo que fazemos parte. Foi possível também consolidar e aprimorar os meus próprios conhecimentos, tendo assim um crescimento pessoal em múltiplos sentidos.

Desde o começo da graduação, sempre houve um interesse em desenvolver algum estudo mais aprofundado, buscando compreender diferentes comportamentos da natureza. Através deste trabalho, foi possível desenvolver três aplicações, sendo duas com o enfoque maior na compreensão de diferentes fenômenos “naturais”, a propagação de uma doença e a relação competitiva entre diferentes espécies.

Foi possível não apenas aprimorar os meus conhecimentos matemáticos, mas também no uso de softwares como o próprio LaTeX e o Mathematica, assim como no estudo crítico e na ação de pesquisar, pesquisar matemática.

Concluindo este trabalho, percebo a necessidade em continuar pesquisando, explorando e estabelecendo relações com a própria matemática. Imagino também o impacto social deste trabalho, pois através dele pode-se observar não apenas o avanço do COVID-19 especificamente na cidade de Sorocaba no estado de São Paulo, podendo assim ver como ocorreu a evolução do vírus na cidade, mas também reconhecer e compreender o comportamento de diferentes espécies em determinados contextos.

Acredito que os objetivos deste trabalho foram totalmente alcançados, visto que ao término dos estudos foi possível adquirir não somente os conhecimentos matemáticos, mas também a compreensão de diferentes relações que compõe o mundo em que vivemos.

Referências Bibliográficas

- [1] BACAER, N. *Verhulst e a equação logística na dinâmica populacional*. In: European Communications in Mathematical and Theoretical Biology. Institut de Recherche pour le Développement, Bondy, France, 2008.
- [2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [4] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.
- [5] DÁVALOS, L. M.; HERNÁNDEZ, A. F. S. *Enfoque histórico y matemático de la obra literario Romeo y Julieta de William Shakespeare*. In: XIX Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas. UNAM. Plantel Oriente, México, D.F, 2014.
- [6] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L.. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.
- [7] HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. ELSEVIER, 1974;
- [8] WANG, R. H.; QIAO, J.; LI, S. *Differential Equations and Applications to COVID-19*. Austin Mathematics. University of Texas Rio Grande Valley, 2020.
- [9] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1*. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [10] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Estados Unidos: Perseus Book, 1994.
- [11] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1994.
- [12] *COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE)*. Johns Hopkins University, 2021.