LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

APLICAÇÃO DE PESQUISA OPERACIONAL PARA ANÁLISE ECONÔMICA DE INVESTIMENTO

YARA VERDUM SANTIAGO

Sorocaba

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

APLICAÇÃO DE PESQUISA OPERACIONAL PARA ANÁLISE ECONÔMICA DE INVESTIMENTO

YARA VERDUM SANTIAGO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Prof.ª Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho.

ufscar

Folha de aprovação

Yara Verdum Santiago

"Aplicação de Pesquisa Operacional para

Análise Econômica de Investimento"

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 29/09/2017.

Orientador ______________________________
Prof.ª Dr.ª Silvia Maria Simões de Carvalho

Membro 2 Magda Peixoto
Prof.ª Dr.ª Magda da Silva Peixoto

Membro 3 Aurelio RL de Oli
Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira

Santiago, Yara Verdum

Aplicação de Pesquisa Operacional para Análise Econômica de Investimento / Yara Verdum Santiago. -- 2017.
112 f. : 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador: Prof.ª Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho
Banca examinadora: Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira, Prof.ª Dra. Magda da Silva Peixoto
Bibliografia

1. Programação Linear. 2. Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz. 3. Análise Econômica de Investimento. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

DEDICATÓRIA

Aos meus queridos pais, Elias e Sandra, que me ensinaram muito além do que apresentam os livros e me mostraram a grande importância dos estudos.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, pelas boas oportunidades que me ofereceu ao longo da vida, por permitir-me realizar meu grande sonho de infância, o de me formar em uma universidade pública, por propiciar todas as condições para que eu chegasse até aqui e por conceder-me saúde e forças necessárias para que eu pudesse passar por esses anos tão difíceis.

Ao meu pai, **Elias Ferreira Santiago**, pelo carinho, pelo apoio, pelos conselhos, por ensinar-me os primeiros números e a amar a Matemática, por mostrar-me o caminho espiritual e por ser um exemplo de caráter, generosidade e esforço. À minha mãe, **Sandra Verdum Santiago**, pelo carinho, pelo apoio, pelos cuidados, por ensinar-me as primeiras letras, por mostrar-me o imenso valor das coisas mais simples e por ser um exemplo de caráter, humildade e dedicação. Serei eternamente grata por abdicarem muitos dos seus sonhos em favor dos meus.

Ao meu querido irmão, **Tales Verdum Santiago**, pela grande parceria durante toda a nossa vida, por estarmos sempre juntos, por sabermos que podemos sempre contar um com o outro. Cursarmos a mesma faculdade, na mesma turma, foi um privilégio. Que o sucesso esteja em tudo o que fizer, pois você merece muito.

Ao meu querido irmão, **Euler Verdum Santiago**, pelo imenso carinho que sempre dedicou a mim, por nossas conversas, pelos muitos momentos de alegria que passamos juntos. Tenho certeza que terá um futuro brilhante e promissor, pois é um menino de ouro, muito dedicado. Estarei sempre te apoiando e torcendo muito por você.

Aos meus queridos avós maternos, **Cinira Machado Verdum** e **Luiz Verdum Sian**, por serem muito amorosos, pelo grande coração, por cuidarem de mim quando eu era criança e meus pais estavam trabalhando, por me levarem e buscarem diversas vezes na escola, contribuindo com os meus estudos.

Aos meus avós paternos (*in memoriam*), **Zulmira Ferreira Santiago** e **Antônio Demétrio Santiago**, que mesmo não tendo a oportunidade de conhecê-los, sei que seus valiosos princípios foram preservados, contribuindo para o que sou hoje.

À minha querida amiga de infância, **Táfne Rodrigues da Silva e Lima**, por torcer pelo meu êxito, pela amizade sincera que demonstra ter por mim, por todo o apoio de sempre e por todas as nossas conversas, auxiliando-me sempre que precisei. Saiba que lhe considero como uma verdadeira irmã e desejo que seja sempre feliz.

À minha querida tia **Edna Ferreira Santiago de Oliveira**, por receber-me em sua casa nos dias de congresso na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e pelo grande carinho que sempre teve por mim. É extremamente recíproco.

Ao meu primo, **Joel Ferreira Santiago Junior**, por ter sido sempre um exemplo acadêmico de dedicação e esforço. Sei que ainda conquistará grandes coisas.

À toda minha família que dedicou palavras que muito me incentivaram nessa fase.

A todos os meus amigos que me apoiaram e torceram por mim, compreendendo minha ausência durante os períodos de estudo.

Em especial, à minha querida orientadora, **Prof.ª Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho**, por acreditar em mim, aceitando-me como sua orientanda de iniciação científica e de TCC, por sua paciência, por aprender tanto através do seu conhecimento e por ser uma das melhores professoras que já tive. Professora, ser sua orientanda foi uma honra. Muitíssimo obrigada por tudo.

"Eu aprendi que para crescer como pessoa é preciso me cercar de gente mais inteligente do que eu."

William Shakespeare

Ao **Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira** e à **Prof.ª Dra. Magda da Silva Peixoto**, por tão generosamente aceitarem compor a banca de avaliação do meu Trabalho de Conclusão de Concurso. Muito obrigada.

A todos os professores que tive ao longo vida. A cada um sou extremamente grata por contribuir com meu crescimento intelectual.

À **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)** por conceder-me uma bolsa de iniciação científica, um grande sonho concretizado, que muito me estimulou a querer seguir na carreira acadêmica.

À **Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)** pela oportunidade de graduar-me em uma das melhores instituições de ensino do país. Agradecerei sempre.

Aos meus colegas do curso de Matemática da UFSCar por muitas vezes me ajudarem a compreender conteúdos mais complexos, contribuindo com minha formação. Vocês são incríveis.

Aos funcionários da UFSCar que sempre muito carinhosa e atenciosamente me receberam.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu concluísse essa etapa tão importante da minha vida.

Gratidão!

"Os investimentos em conhecimento geram os melhores dividendos."

Benjamin Franklin

RESUMO

SANTIAGO, Y. V. *Aplicação de Pesquisa Operacional para Análise Econômica de Investimento*. 2017. 112 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), *campus* Sorocaba, Sorocaba-S.P.

Este trabalho visou à formação de uma carteira de investimento de ações negociadas na BOVESPA, através do uso da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, a ser otimizada por meio do Método Simplex para que houvesse a maximização do retorno ou a minimização do risco total do portfólio. Para tanto, buscou-se ao final de 2015 os dez melhores ativos do ponto de vista da relação risco-retorno, indicados por especialistas da área da Economia como os mais promissores pra investir no ano de 2016.

Ao resolver o problema de Programação Linear através do Método Simplex, os resultados gerados foram dentro do esperado pelos especialistas citados.

Palavras-chave: Programação Linear. Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz. Análise Econômica de Investimento.

ABSTRACT

SANTIAGO, Y. V. *Application of Operational Research for Economic Analysis of Investment*. 2017. 112 l. Monograph (Graduation in Mathematics) - Federal University of São Carlos (UFSCar), Sorocaba *campus*, Sorocaba-S.P.

This work aimed at the compose of an investment portfolio of stock shares traded on the BOVESPA through the use of Markowitz Modern Portfolio Theory, to be optimized through the Simplex Method to maximize return or minimize total portfolio risk . Therefore, the ten best shares from the point of view of the risk-return connection were looked for at the end of 2015, indicated by specialists in the area of Economics as the most promising ones to invest in 2016.

When solving the problem of Linear Programming through the Simplex Method, the results occurred within the expected by the experts mentioned.

Keywords: Linear Programming. Markowitz Modern Portfolio Theory. Economic Analysis of Investment.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDRs - Brazilian Depositary Receipts

BOVESPA - Bolsa de Valores de São Paulo

CDB - Certificados de Depósito Bancário

IPCA - Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo

LCA - Letra de Crédito do Agronegócio

LCI - Letra de Crédito Imobiliário

RAND - Research and Development

Selic - Sistema Especial de Liquidação e Custódia

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há bastante tempo é feito o uso da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz e da Programação Linear, através do Método Simplex, para realizar a otimização de carteiras de investimento de forma que seu retorno seja maximizado e/ou seu risco minimizado.

O presente trabalho visou à formação de uma carteira de investimento formada por ativos reais negociados na Bovespa. Para tanto, realizou-se a análise estatística dos retornos desses ativos, indicados por especialistas da área como os mais promissores e seguros para o ano de 2016, durante todo o ano de 2015, na intenção de que a carteira fosse formada no início do próximo ano.

O estudo estatístico de ativos está diretamente relacionado com a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, pois auxilia na redução do risco total da carteira, na medida em que mensura diferentes tipos de relação entre os ativos para que sejam selecionados os matematicamente mais seguros.

Uma vez selecionados os ativos para a formação da carteira, a Programação Linear através do Método Simplex otimiza-a. O problema relatado neste trabalho é de maximização do retorno total da carteira, para um investidor que deseja obter retornos maiores que o investimento em renda fixa (poupança, por exemplo), mas correndo o mínimo de risco possível.

Entretanto, para que o Método Simplex possa ser empregado para obter uma resolução ótima do problema, este deve ser modelado de forma que a resolução seja possível. Sabe-se que uma modelagem que descreva todas as restrições de um problema é difícil de conseguir, pois muitas características não são possíveis de modelar e, além disso, poderiam impedir que o problema fosse sequer resolvido.

Desta forma, a modelagem foi realizada de maneira que as restrições minimizassem o risco e o problema tivesse a maximização do retorno.

O capítulo 2 traz as características da Pesquisa Operacional.

No Capítulo 3 há a formulação matemática da Programação Linear.

O Capítulo 4 da continuidade com a formulação matemática do Método Simplex.

Já o Capítulo 5 mostra como resolver um problema de Programação Linear através da Dualidade.

O Capítulo 6 traz os principais conceitos de Matemática Financeira aplicada à Economia que foram utilizados no decorrer do trabalho.

O Capítulo 7 apresenta os parâmetros estatísticos necessários para que o estudo da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz seja aplicada a um problema de otimização de carteiras de investimento.

O Capítulo 8 apresenta a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz e algumas formas de minimizar o risco de uma carteira de investimento.

O Capítulo 9 traz a previsão, no final do ano de 2015, para os melhores investimentos para o ano de 2016, do ponto de vista da relação risco-retorno.

No Capítulo 10 há a formação da carteira de investimento em si, com todas as análises que possibilitaram a otimização da mesma e seus resultados.

O Capitulo 11 apresenta as conclusões do trabalho, bem como suas considerações finais.

Em seguida, encontram-se as referências bibliográficas que serviram de base de conhecimento para as pesquisas realizadas.

Por fim, há o Apêndice A. Ele foi elaborado abordando a matemática básica necessária para a compreensão da formulação matemática de Programação Linear e do Método Simplex.

2 INTRODUÇÂO À PESQUISA OPERACIONAL

"Pesquisa operacional é a aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos [14]."

2.1 Breve Histórico sobre Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional foi utilizada pela primeira vez em 1938, na Inglaterra, para fins militares. Em uma das vezes em que foi utilizada naquela época, um grupo de especialistas foi selecionado para avaliar e reposicionar uma série de radares que auxiliavam na defesa do espaço aéreo daquele território antes e durante a Segunda Guerra Mundial.

Com o sucesso das pesquisas, os especialistas resolveram continuar os estudos em Pesquisa Operacional, mas para fins não só militares. No período pós-guerra, o desenvolvimento do Método Simplex por George B. Dantzig, em 1947, foi um marco na história da Pesquisa Operacional para resolução de problemas de Programação Linear. Posteriormente, com o surgimento e desenvolvimento dos computadores, problemas cada vez maiores e mais complexos puderam ser solucionados.

Atualmente, há diversas sociedades de Pesquisa Operacional no Brasil e no Exterior que reúnem através de seminários, congressos, palestras e outros eventos, estudantes e instituições com o intuito de discutir as aplicações deste tema. Entre estas sociedades tem-se a SOBRAPO (*Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional*), INFORMS (*Institute for Operations Research and Management Science*) e a IFORS (*International Federation of Operacional Research Societs*).

Quadrimestralmente, a SOBRAPO publica o periódico *Pesquisa Operacional* de forma acoplada ao *International Abstracts in Operation Research* da IFORS e ao SCIELO (*Scientific Eletronic Library Online*).

2.2 Breve Histórico sobre Programação Linear

A Programação Linear constitui-se como um dos ramos da Pesquisa Operacional.

A otimização de uma função linear sujeita a restrições lineares teve sua origem com os estudos de Fourier sobre sistema lineares de inequações, em 1826. No entanto, apenas em 1939, Kantorovich faz notória a importância prática dos problemas de *Programação Linear*, chegando a criar algoritmos para solução desses problemas.

Em 1947, Koopmas mostrou que a *Programação Linear* é um modelo apropriado para a análise da *Teoria Econômica Clássica*. No mesmo ano, surgiu o *Método Simplex*, criado por Dantzig, que viria revolucionar os estudos de Programação Linear presentes na época.

Contudo, a partir da metade do século XX, as inovações geradas fizeram com que os algoritmos de *Programação Linear* fossem favoráveis e eficientes para a resolução de uma vasta variedade de problemas, sendo cada vez utilizados em maior escala, principalmente devido ao desenvolvimento dos computadores e da tecnologia em geral.

2.3 Algumas Aplicações da Pesquisa Operacional

A importância desta área tem-se intensificado devido à complexidade cada vez maior do século XXI no que tange, principalmente, a economia e a globalização como um todo.

Por tudo isso, a ideia de que a pesquisa operacional é utilizada apenas na área da engenharia de produção e/ou gestão é colocada em dúvida na medida em que há uma significativa versatilidade e aplicabilidade de modelos de pesquisa operacional direcionada a diversos ramos do conhecimento científico e mercados.

Se inicialmente era utilizada nas áreas militares ou até mesmo de projeto, planejamento, operação de cadeias ou redes de suprimento, atualmente vê-se o uso disseminado da pesquisa operacional na agricultura, finanças, medicina, marketing, recursos naturais, energéticos e ambientais, e políticas no setor público, envolvendo serviços de saúde, educação, saúde pública, justiça criminal, serviços urbanos e segurança pública.

Deparando-se com um problema do cotidiano qualquer, uma pessoa pode resolvê-lo de maneira razoavelmente fácil e rápida. Este tipo de problema é o que chamamos de problema de pequeno porte. Porém, quando tem-se um problema de grande porte para solucionar, na maioria das vezes, necessita-se de apoio intelectual e tecnológico para atingir os objetivos.

O uso da pesquisa operacional segue três principais passos. O primeiro relaciona-se à observação e interpretação do problema a ser trabalhado (sendo, na grande maioria das vezes, um sistema complexo) e sua "tradução" em um modelo matemático. O segundo passo consiste na aplicação de métodos capazes de resolver esse modelo e ao terceiro passo cabe informar ao cliente os resultados oriundos da aplicação de pesquisa operacional ao problema trabalhado.

Para resolver um problema de grande porte deve-se, inicialmente, criar um modelo capaz de representá-lo. É o que se chama de modelo matemático.

Um bom modelo auxilia o gestor nas tomadas de decisões, pois fornece uma visão clara das possibilidades e restrições disponíveis.

A partir disso, métodos matemáticos são aplicados ao modelo elaborado a fim de encontrar a melhor solução para o problema inicial, levando em conta as restrições apresentadas e o objetivo (maximização ou minimização de alguma característica). É o que se denomina de otimização.

A tarefa de transformar um problema em um modelo matemático exige uma abstração e/ou simplificação da situação real em que se está trabalhando. Ele deve ser detalhado o suficiente para captar os elementos essenciais do problema, porém, deve ser tratável por métodos de solução. Um modelo é dito eficiente, quando sua resolução através da aplicação de métodos matemáticos é coerente com o contexto real e, para tanto, há a definição do problema, construção do modelo, solução do modelo, validação do modelo e implementação da solução, nesta ordem. Observa-se a significativa importância do papel dos tomadores de decisão. Ao realizar a modelagem, deve-se levar em conta não apenas as restrições impostas, mas também se o modelo é praticável, ou seja, se é possível a obtenção de uma boa solução a partir dele e se sua aplicação funcionará em outras situações.

A modelagem de um problema de pesquisa operacional é guiada por três parâmetros:

- Definição das *decisões* a serem tomadas;
- *Restrições* que limitam as escolhas das decisões;
- *Objetivos* que determinam preferências na escolha de decisões.

> *Alguns autores sugerem que pesquisa operacional é tanto "ciência" quanto "arte": ciência por causa das técnicas matemáticas envolvidas (objetivo), arte porque o sucesso de todas as fases que precedem e sucedem a solução do modelo matemático depende muito da criatividade e experiência do pessoal de pesquisa operacional (subjetivo) [14].*

Quando há um problema de complexidade elevada, nem sempre realizar a otimização é uma tarefa fácil, de forma que os resultados obtidos serão aproximados, já que na modelagem e aplicação de métodos de resolução, algumas restrições podem ser deixadas de lado.

Todas essas características descritas nesta seção compõem o que denomina-se Pesquisa Operacional, algo que atualmente apresenta inegável importância para a sociedade como um todo.

2.4 Importância da Pesquisa Operacional

Atualmente, sabe-se que a Pesquisa Operacional proporciona a otimização de problemas. Desta forma, alguns problemas que podem ser considerados simples, se submetidos à Pesquisa Operacional, podem gerar uma economia financeira bastante significativa para o Estado. Alguns exemplos desses problemas são: otimização das coletas de lixo, do funcionamento do transporte público e do quadro de funcionários de um grande hospital público.

A referida economia consiste em desde salários dos funcionários que serão melhor alocados em postos de trabalho, como de energia, seja ela elétrica ou fóssil. Aí vê-se a importância sustentável que a Pesquisa Operacional detém.

2.5 Pesquisa Operacional Aplicada à Economia

Cada vez mais há a necessidade de pesquisadores, executivos e empreendedores que tenham domínio sobre conhecimentos de Pesquisa Operacional a fim de terem decisões mais bem tomadas, principalmente em ambientes mais competitivos. Um exemplo de decisão é a determinação da melhor composição de uma carteira de ações.

Harry Markowitz ao elaborar sua famosa Teoria Moderna de Portfólios, na verdade estava, através da Programação Linear, buscando uma maneira de obter a melhor composição de uma carteira de ações.

Com isso, vê-se que a Programação Linear auxilia os investidores em suas análises de investimento e se tornou importante aliado para tomada de decisões, sobretudo em momentos de crises financeiras onde é capaz de auxiliar a gerar lucros, mesmo em um cenário adverso da economia.

O próximo capítulo traz a formulação matemática da Programação Linear, contendo os elementos necessários para a modelagem da carteira de investimento.

3 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

No geral, os métodos de programação linear têm sido amplamente utilizados na prática. O ano de 1947 foi um marco nessa área com a publicação do Método Simplex que, atualmente, é uma das principais ferramentas computacionais para a resolução desses tipos de problemas e será mais detalhado no próximo capítulo.

3.1 Conceitos Básicos

A programação linear é dada por um problema de otimização, em que a função objetivo dada por f é linear nas variáveis e, as restrições consistem em equações e inequações lineares. As restrições podem se apresentar de diversas formas, entretanto há a possibilidade de serem transformadas para a forma apresentada abaixo, conhecida como *forma padrão* [15].

A forma padrão de um problema de programação linear é dada por:

$$\text{Minimizar} \quad f(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\text{e} \quad x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0, \dots,\; x_n \geq 0, \tag{3.3}$$

em que a função linear f (3.1) a ser minimizada é denominada *função objetivo*, o sistema de equações lineares (3.2) delimita as *restrições do problema*, assim como as *condições de não negatividade* (3.3) que complementam as restrições citadas. Os vetores b e c, bem como os coeficientes dados por a_{ij} (com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$), são compostos por constantes reais fixas e o vetor x é formado por números reais a serem determinados.

O problema de programação linear na forma padrão pode ser escrito de maneira mais sucinta, em notação matricial, sem perda de informações, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = c^Tx \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ \text{e} \quad & x \geq 0, \end{aligned}$$

em que $c^T = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n)$ é o vetor de custos, $x^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$ é o vetor das variáveis ou incógnitas, A é a matriz $m \times n$ dos coeficientes do sistema dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$b^T = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$ é o vetor dos termos independentes ou de recursos.

Uma outra forma de representar um problema de programação linear na forma padrão é:

$$\text{Minimizar } f\left(x_{1,} x_2, \dots, x_n\right) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

em que $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, sendo j-ésima coluna da matriz A dos coeficientes.

Para que um problema de programação linear possua uma solução possível, esta deve satisfazer as restrições (3.2) e as condições de não negatividade (3.3), sendo denominada *solução factível*, representada por $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. O conjunto de todas as soluções factíveis é chamado *região factível*.

A função objetivo de um problema de programação linear na forma padrão deve ser minimizada. Desta forma, entre as soluções possíveis (factíveis), a melhor (que fornece o menor valor, por se tratar de um problema de minimização) é chamada *solução ótima*, denotada por $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, de forma que $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1 x_2, \cdots, x_n)$, para toda solução factível x.

Entretanto, muitas vezes um problema de programação linear não encontra-se na forma padrão. Portanto, alguns ajustes devem ser feitos para que atinja essa configuração e possibilite o encontro da solução ótima.

A seguir será apresentado, respectivamente, como será transformada a função objetivo, as restrições do problema e as restrições de não negatividade que não se encontram na forma padrão para esta forma.

Assim, se em um problema a função objetivo deve ser maximizada, então procura-se uma solução factível $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, tal que $f(x^*) \geq f(x)$ para toda solução x factível. Porém, isto não está na forma padrão. Multiplicando-se a última desigualdade por -1, tem-se $-f(x^*) \leq -f(x)$ para toda solução x fatível. Com isso, encontrar uma solução factível x^* que maximize $f(x)$ é equivalente a encontrar uma solução factível x^* que minimize $-f(x)$. Sintetizando, caso o problema seja de *maximizar* $f(x)$, pode-se considerar equivalente a minimizar $-f(x)$.

Em problemas em que as restrições encontram-se na forma de desigualdades e não de equações, novas variáveis devem ser inseridas a fim de que o problema converta-se à forma padrão. Supondo que a restrição i seja dada por:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Para que a inequação anterior torne-se uma equação, uma variável não nula é adicionada, ficando da seguinte forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_k = b_i, y_k \geq 0.$$

Essa variável adicional (y_k) é chamada *variável de folga*.

Exemplo 3.1 Considere o seguinte problema em que o conjunto de restrições é inteiramente determinado por inequações lineares:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\text{e} & x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0, \dots,\; x_n \geq 0.
\end{array}$$

O problema pode ser convertido, através da adição das variáveis de folga, para a forma padrão, como expresso a seguir:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Minimizar} & f(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & & \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 & & & = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + y_2 & & = b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & + y_m & = b_m \\
\text{e} & x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0, \dots,\, x_n \geq 0, & & & \\
\text{e} & y_1 \geq 0,\, y_2 \geq 0, \dots,\, y_m \geq 0. & & &
\end{array}$$

Com a introdução das variáveis de folga e a consequente conversão do problema na forma padrão, este passa a ter $n + m$ variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$. A matriz $m \times (n + m)$ que agora descreve as restrições em forma de igualdades lineares encontra-se na forma $[A \quad I]$, em que as primeiras n colunas são provenientes da matriz A, original dos coeficientes do sistema, e as últimas m colunas geraram a matriz identidade $I_{m\times m}$ pela inserção das variáveis de folga [15]. ■

De maneira análoga, supondo que a restrição i seja dada por:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

para que a inequação anterior torne-se uma equação, uma variável não nula é subtraída, ficando da seguinte forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_k = b_i, y_k \geq 0.$$

Essa variável introduzida $(-y_k)$ é chamada *variável de excesso*.

Exemplo 3.2 Se as inequações do exemplo anterior forem invertidas, de forma que o problema tenha a seguinte configuração

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ \text{e} & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0, \end{array}$$

deve-se subtrair uma variável de excesso de cada inequação a fim de que estas tornem-se igualdades e o problema fique na forma padrão, como expresso a seguir [15]:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - y_1 \qquad\qquad = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad - y_2 \qquad = b_2 \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad - y_m = b_m \\ \text{e} & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0, \\ \text{e} & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \dots,\ y_m \geq 0. \end{array}$$

■

Em problemas em que além das restrições de não negatividade encontra-se uma (ou mais) *variável livre* x_i (irrestrita de sinal), deve-se considerar esta como a subtração de duas variáveis não nulas, visto que qualquer número (seja positivo, negativo ou nulo) pode ser escrito como a diferença de dois outros não negativos. Desta forma, pode-se escrever uma variável livre x_i como:

$$x_i = u_i - v_i, com\ u_i \geq 0, v_i \geq 0.$$

Substituindo essa redefinição da variável livre em todas as equações do problema, a linearidade das restrições é preservada e este adquire a configuração de forma padrão, sendo necessariamente todas as variáveis não negativas. Deste modo, o problema que tinha n variáveis, passa a ser expresso com $n + 1$ variáveis se possuir apenas uma variável livre. Se a variável livre for x_1, então as variáveis do problema serão: $u_1, v_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Ao invés de: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Exemplo 3.3 Considere o problema abaixo em que a restrição $x_1 \geq 0$ não está presente, isto é, x_1 é uma variável livre.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
\text{e} & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.
\end{array}
$$

Neste caso, x_1 é livre para assumir valores positivos ou negativos. Substituindo x_1 de forma que

$$x_1 = u_1 - v_1, com\, u_1 \geq 0, v_1 \geq 0,$$

em todas as equações, o sistema linear passa a ser

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1u_1 - c_1v_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a} & a_{11}u_1 - a_{11}v_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}u_1 - a_{21}v_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
 & a_{m1}u_1 - a_{m1}v_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
\text{e} & u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.
\end{array}
$$

Desta forma, o problema foi convertido para a forma padrão [15]. ■

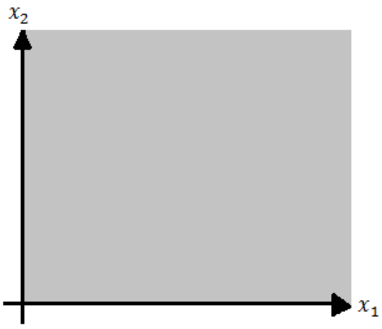
3.2 Resolução Gráfica

Para problemas de pequeno porte, principalmente aqueles de duas a três variáveis, uma forma bastante eficiente para encontrar a solução ótima é a através da resolução gráfica em um plano cartesiano. É um facilitador para a compreensão dos conceitos do método simplex, que será tratado posteriormente.

Inicialmente, desenha-se a região factível (espaço composto por todas as soluções factíveis) para que haja a identificação do menor valor à função objetivo a ser minimizada. Em resolução gráfica, as restrições dos problemas de programação linear costumam ser utilizadas na forma de desigualdades.

Ao desenhar a região factível num plano cartesiano, fica evidente que esta ocupará sempre o primeiro quadrante devido às restrições de não negatividade das variáveis em questão, como está representado na figura a seguir [14]:

Figura 3.1 - Região definida por $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

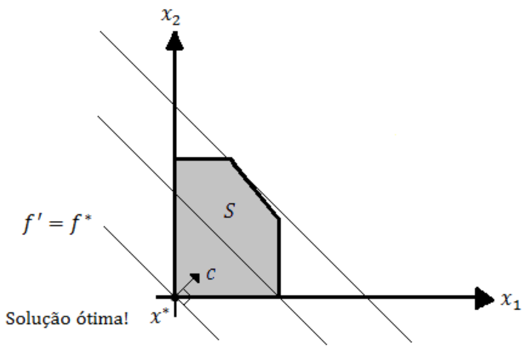


As soluções factíveis devem satisfazer todas as restrições do problema simultaneamente. Com isso, a região factível é definida como a intersecção de todas as regiões delimitadas por cada uma das restrições separadamente.

A função objetivo f pode assumir infinitos valores, dentre os presentes na região factível, entretanto, o conjunto de pontos que atribui o mesmo valor à f é chamado *curva de nível* (denotado por f'). Um problema pode ter várias curvas de nível, ou seja, diferentes conjuntos de pontos, cada um atribuindo um valor à f (denotados por f', f'', f''' e assim por diante). A curva de nível que contém a solução ótima (x^*) é denotada por f^*, já que todos os pontos desse conjunto imprimirão o mesmo valor à função objetivo que a solução ótima. O vetor chamado *gradiente de f* (denotado por $\nabla f(x_1, x_2)$), sendo composto pelos coeficientes da função objetivo (f), é sempre perpendicular à curva de nível e aponta no sentido em que a função objetivo cresce.

Com isso, para obter uma solução ótima (x^*) para problemas em que a função objetivo deva ser minimizada, basta acompanhar o sentido contrário ao gradiente até encontrar um vértice extremo que proporcionará o menor valor possível para a função objetivo dentre as soluções factíveis, como expresso na figura a seguir para uma região factível S hipotética. O gradiente é dado por c.

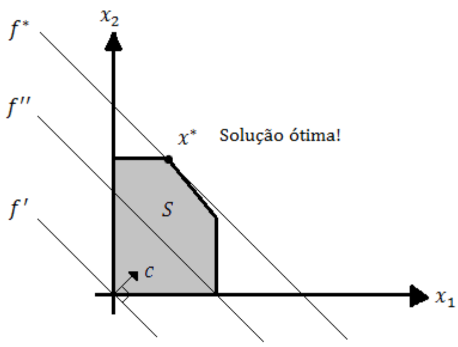
Figura 3.2 - Determinando a solução ótima x^* (problema de minimização)



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

De maneira análoga, para obter a solução ótima (x^*) para problemas em que a função objetivo deva ser maximizada, basta acompanhar o sentido do gradiente até encontrar um vértice extremo que proporcionará o maior valor possível para a função objetivo dentre as soluções factíveis, como expresso na figura a seguir para uma região factível S hipotética.

Figura 3.3 - Determinando a solução ótima x^* (problema de maximização)



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Pode-se representar a solução de um problema de programação linear no R^2 de forma generalizada. Por exemplo, considerando o seguinte problema:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{gathered}$$

ou, em notação matricial,

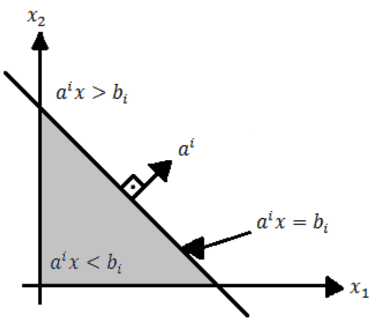
$$\text{Minimizar } f(x) = c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0 \qquad \text{com } x \in R^2.$$

A região factível, intersecção entre as regiões factíveis de todas as restrições (incluindo as de não negatividade) separadamente, denotada por S, é definida como $S = \{x \in R^2 / Ax \leq b, x \geq 0\}$. Para desenhar o conjunto de pontos tais que $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ com $1 \leq i \leq m$, traça-se, inicialmente, a reta $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ que divide o espaço R^2 em 3 partes:

- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x = b_i$;
- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x < b_i$;
- $x \in R^2$ tal que $(a^i)^T x > b_i$.

O gradiente a^i (coeficiente da equação da reta), que é perpendicular à reta $(a^i)^T x = b_i$, aponta para pontos tais que $(a^i)^T x > b_i$, como mostrado na figura a seguir:

Figura 3.4 - As três regiões do plano: a) $a^i x = b_i$ b) $a^i x < b_i$ c) $a^i x > b_i$



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

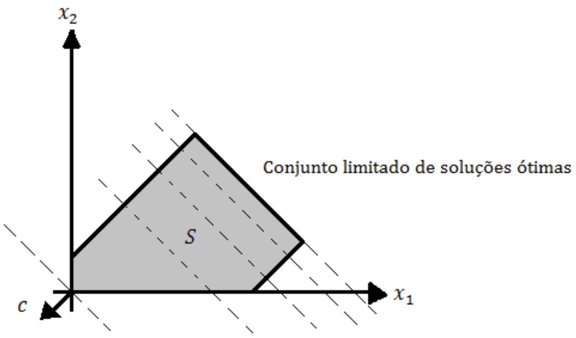
Como o problema em questão é de minimização, a solução ótima x^* encontra-se no sentido contrário ao gradiente a^i.

A solução ótima x^* é denominada *vértice* ou *ponto extremo*, em que na região factível, cada vértice é determinado pela intersecção de pelo menos duas equações de retas provenientes de desigualdades (restrições) que definem a fronteira da região factível. Portanto, os vértices são soluções de sistemas de equações lineares e correspondem às *soluções básicas factíveis*.

Por enquanto, foi tratado apenas de casos em que a região factível era limitada e proporcionava uma única solução ótima. A partir de agora, será apresentada outras situações.

Suponha uma região factível limitada, como representada na figura a seguir. Caso este seja um problema de minimização, a solução ótima deverá ser procurada no sentido oposto ao gradiente dado por c. Com o auxílio das curvas de nível, pode-se observar que para este problema, haverá infinitas soluções, representadas pelos pontos sobre o segmento de reta indicado.

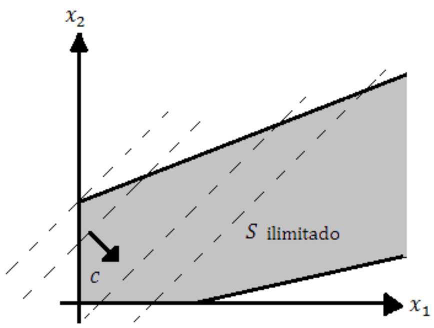
Figura 3.5 - Região factível limitada e infinitas soluções ótimas, conjunto limitado de soluções ótimas (minimização)



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Há ainda casos em que a região factível é ilimitada, como representado na figura a seguir:

Figura 3.6 - Região factível ilimitada

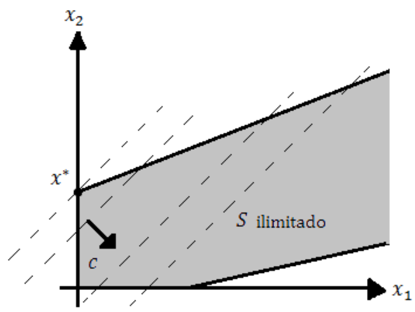


Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Se a figura anterior corresponder a um problema de maximização, este não terá uma solução ótima, mesmo possuindo soluções factíveis.

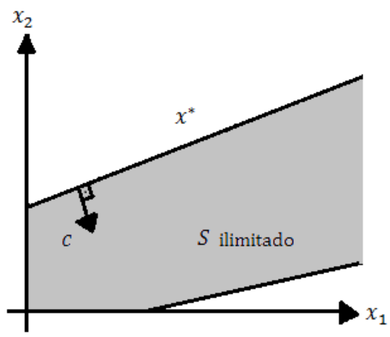
Porém, se a figura anterior corresponder a um problema de minimização, haverá uma solução ótima (como representado a seguir por x^*), mesmo sendo a região factível ilimitada.

Figura 3.7 - Região de factibilidade ilimitada e solução ótima única (minimização)



Pode-se ter, também, um conjunto ilimitado de soluções ótimas num cenário em que a região factível é ilimitada, como a semirreta indicada na Figura 3.8.

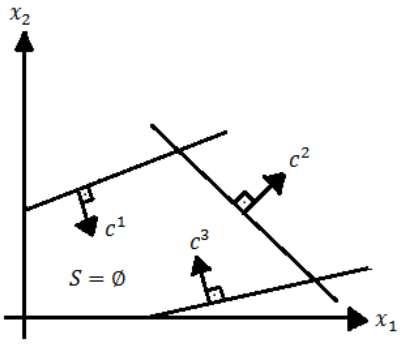
Figura 3.8 - Região factível ilimitada e infinitas soluções ótimas (minimização)



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Quando as restrições do problema são conflitantes a ponto de não existir uma região factível, tem-se o caso em que a solução ótima é inexistente devido à inexistência de solução factível, como apresentado na seguinte figura:

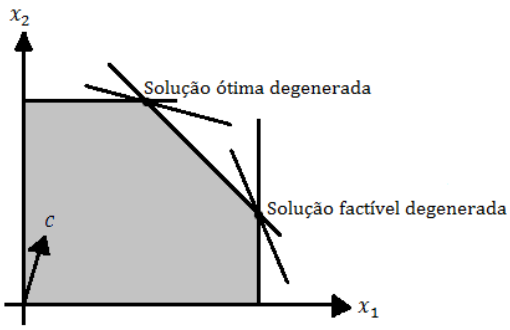
Figura 3.9 - Não existe solução ótima: $S = \emptyset$



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Quando um vértice é determinado por três ou mais retas, diz-se que é um *vértice degenerado*, podendo ser uma solução factível (dita *solução factível degenerada*) ou até mesmo uma solução ótima (dita *solução ótima degenerada*). A figura a seguir ilustra ambas as situações.

Figura 3.10 - Problema com solução factível degenerada e solução ótima degenerada



Fonte: ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

Há ainda outra forma de encontrar uma solução ótima de um problema de programação linear através da resolução gráfica e será apresentada a seguir.

Considerando o seguinte problema de programação linear na forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x) = c^T x \\
\text{Sujeito a} & Ax = b \\
 & x \geq 0,
\end{array}
$$

onde A é uma matriz $m \times n$ em que a j-ésima coluna é denotada por a_j. O problema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{Sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b & \\ & x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Dados os vetores $a_1, a_2, \dots, a_n$ da matriz A, deseja-se encontrar os escalares não negativos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de tal modo que $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ e $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ seja minimizado. Entretanto, o conjunto de vetores da forma $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, onde $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, é o cone gerado por $a_1, a_2, \dots, a_n$. Portanto, o problema tem uma solução factível se, e somente se, o vetor b pertence a este cone, como representado na figura a seguir. De forma que, o vetor b satisfaz as restrições estabelecidas pelo problema [16].

Figura 3.11 - Interpretação da região factível. A região factível proporciona solução factível e não proporciona solução factível, respectivamente

Fonte: BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows*. 2. ed. Canadá: Wiley, 1952. 684 p.

Um problema de programação linear pode ser definido como a seguir, onde as variáveis não negativas $x_1, x_2, \dots, x_n$ devem ser encontradas, de maneira que

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} c_2 \\ a_2 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} f \\ b \end{bmatrix},$$

onde a função objetivo f é minimizada. Deve-se procurar representar o vetor $\begin{bmatrix} f \\ b \end{bmatrix}$ para o menor valor possível de f no cone dividido pelos vetores $\begin{bmatrix} c_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$, ..., e $\begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix}$ [17].

Exemplo 3.4

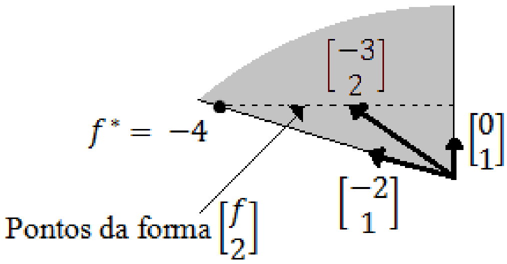
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Inicialmente, sugere-se que o problema seja transformado na forma padrão, de modo que deve ser adicionada a variável de folga $x_3 \geq 0$. O problema passa a ser escolher $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ de modo que

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} f \\ 2 \end{bmatrix},$$

onde f esteja minimizado. O cone gerado pelos vetores $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é apresentado na figura a seguir. Escolhe-se o vetor $\begin{bmatrix} f \\ 2 \end{bmatrix}$ neste cone com o valor mínimo para f, como se vê:

Figura 3.12 - Solução ótima (f^*)



Fonte: BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows*. 2. ed. Canadá: Wiley, 1952. 684 p.

A solução ótima gerada é $f^* = -4$ com $x_1^* = 2$ (o multiplicador associado a $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$) e $x_2^* = x_3^* = 0$ [16]. ■

Exemplo 3.5

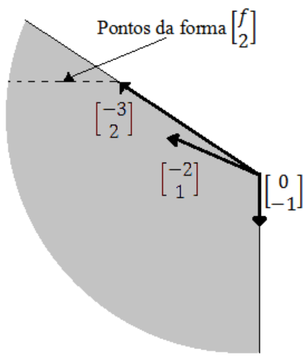
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Subtraindo a variável de excesso $x_3 \geq 0$, o problema pode ser reformulado como a seguir. Deve-se escolher $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ de modo que

$$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}x_3 = \begin{bmatrix}f\\2\end{bmatrix},$$

onde f esteja minimizado. O cone gerado pelos vetores $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ é apresentado na figura a seguir. Escolhe-se o vetor $\begin{bmatrix}f\\2\end{bmatrix}$ neste cone com o menor valor possível para f. Neste caso, o valor da solução ótima é ilimitado. Percebe-se que pode ser encontrados pontos da forma $\begin{bmatrix}f\\2\end{bmatrix}$ no cone, com arbitrários pequenos valores para f. Assim sendo, a solução ótima vale $-\infty$ ou é ilimitada, como pode ser visto [16]:

Figura 3.13 - Solução ótima ilimitada



Fonte: BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows*. 2. ed. Canadá: Wiley, 1952. 684 p.

■

Para sintetizar muito do que foi apresentado até aqui, tem-se os seguintes corolários.

Corolário 1 Se uma região factível, que satisfaz um problema na forma padrão, é não vazia, então ela possui pelo menos um vértice [15]. ■

Corolário 2 Se houver uma solução ótima para um problema de programação linear, então há uma solução ótima que é um vértice da região factível que satisfaz este problema [15]. ■

Corolário 3 Uma região factível possui, no máximo, um número finito de vértices [15]. ■

3.3 Forma Matricial da Programação Linear

Uma das formas de resolver um problema de programação linear é através da obtenção de soluções de um sistema de equações lineares $m \times n$ dado por $Ax = b$ qualquer, onde x é um vetor de dimensão n, b é um vetor de dimensão m e A é uma matriz $m \times n$.

Inicialmente, deve-se fixar valores para $n - m$ variáveis, resultando em um sistema de m variáveis (que restaram) e m equações. Como apresentado no apêndice A, se a matriz desse sistema restante for não singular, a solução é única. O modo inverso também é válido, basta selecionar m colunas da matriz A que formem uma matriz não singular e, em seguida, fixar as demais variáveis. Supondo que a matriz A tem posto completo por linhas ($posto(A) = m$), sempre é possível selecionar m colunas da matriz A (que são linearmente independentes devido ao posto completo da matriz) que formem uma matriz não singular, levando em conta que a hipótese de que $posto(A) = m$ implica que $m \leq n$. Nos casos em que $m = n$, o sistema tem solução única, entretanto, os problemas de programação linear na forma padrão têm infinitas soluções para situações em que $m < n$. O grau de liberdade é $n - m$, que ao ser fixado estas $n - m$ variáveis, o sistema passa a ter solução única.

Definição 3.1 *(partição básica)* Considere uma reorganização nas colunas da matriz da seguinte forma:

$$A = [B \quad N]$$

em que:

- $B_{m \times m}$, chamada *matriz básica*, é formada por m colunas da matriz A e é não singular, dada por $B = [a_{B_1} \quad a_{B_2} \quad \cdots \quad a_{B_m}]$, isto é, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ são os índices das colunas da matriz A que pertencem a B, chamados *índices básicos*;
- $N_{m \times (n-m)}$, chamada *matriz não básica*, é formada pelas $n - m$ colunas restantes de A (colunas que não estão em B), dada por $N = [a_{N_1} \quad a_{N_2} \quad \cdots \quad a_{N_{n-m}}]$, isto é, $N_1, N_2, \ldots, N_{n-m}$ são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N.

Essa partição nas colunas da matriz A é chamada *partição básica* e introduz uma partição no vetor x:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

em que:

- $x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$, chamado vetor das *variáveis básicas*;
- $x_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$, chamado vetor das *variáveis não básicas*.

Seja uma partição básica $A = [B \quad N]$, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito de forma equivalente como

$$Ax = b \Leftrightarrow [BN] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

ou

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Portanto,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \qquad \text{(solução geral)}.$$

A expressão anterior é chamada *solução geral do sistema*, pois com ela pode-se determinar qualquer solução do sistema, basta atribuir valores quaisquer às $n - m$ variáveis não básicas em x_N, de modo que as m variáveis básicas em x_B fiquem unicamente determinadas e a solução resultante satisfaça o sistema $Ax = b$. Entretanto, encontrar a solução desta forma não é o caminho mais vantajoso em termos computacionais, pois demanda o cálculo da inversa da matriz B [14]. ■

Definição 3.2 *(solução básica)* Considere uma partição básica $A = [B \quad N]$ e a seguinte solução obtida ao se fixar as $n - m$ variáveis de x_N em zero, isto é:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0. \end{cases}$$

A solução x calculada desta maneira é denominada *solução básica*. Se $x_B = B^{-1}b \geq 0$, ou seja, se todas as variáveis básicas são não negativas, diz-se que x é uma *solução básica factível*. Além disso, se $x_B = B^{-1}b > 0$ (todas as variáveis básicas são positivas), diz-se que a solução básica factível é *não degenerada* [14]. ■

Há casos em que o sistema de equações lineares $Ax = b$ não possui uma solução básica. Entretanto, uma forma de garanti-la é fazendo suposições sobre a matriz $A_{m \times n}$. Deve-se assumir que $n > m$, isto é, que o número de variáveis x_i excede o número de equações de restrições. Além disso, as linhas de A devem ser linearmente independentes, correspondendo à independência linear das m equações.

Hipótese 3.1 *(posto linha completo)* Uma matriz $A_{m \times n}$ tem posto completo se, e somente se, $m < n$ e as m linhas de A são linearmente independentes [15]. ■

A hipótese anterior garante que o sistema de equações lineares $Ax = b$ sempre terá uma solução, sendo uma solução básica, pelo menos. Em termos gráficos, isto significa que a região factível possuirá pelo menos um vértice.

3.4 Teorema Fundamental da Programação Linear

Através do Teorema Fundamental da Programação Linear é possível estabelecer a importância das soluções básicas factíveis na resolução de problemas lineares. O teorema mostra que em um problema de programação linear é necessário apenas considerar as soluções básicas factíveis quando se procura pela solução ótima, pois o valor ótimo é sempre encontrado entre tais soluções.

Seja um problema de programação linear na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{3.4}$$

Uma solução factível para as restrições que apresenta o valor mínimo para a função objetivo sujeita a essas mesmas restrições é dita *solução factível ótima*. Se esta solução é básica, então é chamada *solução básica factível ótima*.

Teorema 3.1 *(teorema fundamental da programação linear)* Dado um problema de programação linear na forma padrão (3.4) onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m [15]:

i) *se há um solução factível, há uma solução básica factível*;

ii) *se há uma solução factível ótima, há uma solução básica factível ótima*.

Prova de i [15].

Sejam a_1, a_2, ..., a_n os vetores da coluna da matriz A. Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja uma solução factível. Então, em termos das colunas de A, esta solução satisfaz:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b.$$

Suponha que exatamente p das x_i variáveis são maiores do que zero e, por conveniência, que elas são as p primeiras variáveis. Então

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b. \tag{3.5}$$

Há agora dois casos, dependendo se o conjunto a_1, a_2, ..., a_p é linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD).

Caso 1: Suponha que a_1, a_2, ..., $a_p$são linearmente independentes. Então claramente $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é básica e a prova está completa. Se $p < m$, então, uma vez que A tem posto m, $m - p$ vetores podem ser encontrados dos $n - p$ vetores restantes, de modo que o conjunto dos m vetores é linearmente independente. Atribuindo o valor zero para as $m - p$ variáveis correspondentes, produz uma solução básica factível (degenerada).

Caso 2: Suponha que a_1, a_2, ..., $a_p$são linearmente dependentes. Então, há uma combinação linear não trivial desses vetores que é zero. Desta forma, existem constantes y_1, y_2, ..., y_p, em que pelo menos uma delas pode ser considerada positiva, tal que

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_p a_p = 0. \tag{3.6}$$

Multiplicando (3.6) por um escalar ε e subtraindo de (3.5), obtém-se:

$$(x_1 - \varepsilon y_1)a_1 + (x_2 - \varepsilon y_2)a_2 + \cdots + (x_p - \varepsilon y_p)a_p = b. \quad (3.7)$$

Esta equação é válida para qualquer ε e, para cada ε, os componentes $x_i - \varepsilon y_i$ correspondem a uma solução de (3.7), embora elas possam violar a restrição $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$. Considerando $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0)$, tem-se que para qualquer ε

$$x - \varepsilon y \quad (3.8)$$

é uma solução para (3.7). Para $\varepsilon = 0$, x é a solução básica factível original. Quando ε cresce a partir de zero, as componentes de x podem aumentar, diminuir, ou permanecerem as mesmas, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Como se supõe que pelo menos um dos valores de y_i é positivo, pelo menos uma das componentes diminui quando ε aumenta. Aumenta-se ε até que uma ou mais das componentes tornem-se nulas, isto é, considera-se:

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i} \ / y_i > 0\right\}.$$

Para este valor de ε, a solução dada por (3.8) é factível e possui, no máximo, $p - 1$ variáveis positivas. Repetindo este processo, se necessário, pode-se eliminar as variáveis positivas até que se tenha uma solução factível com as colunas correspondentes que são linearmente independentes, situação onde o caso 1 se aplica. ■

Prova de ii [15].

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma solução factível ótima e como no caso da prova de (i) acima, suponha que há exatamente p variáveis positivas $x_1, x_2, \dots, x_p$. Novamente, há dois casos: Caso 1 e Caso 2.

O Caso 1 corresponde à independência linear e é tratado exatamente da mesma forma que o Caso 1 anterior.

O Caso 2 corresponde à dependência linear e também é tratado da mesma forma que o Caso 2 anterior, mas ele deve mostrar que para qualquer ε, a solução (3.8) é ótima. Para isso, observa-se que o valor da solução $x - \varepsilon y$ é

$$c^T x - \varepsilon c^T y. \tag{3.9}$$

Para ε suficientemente pequeno, $x - \varepsilon y$ é uma solução factível para valores positivos ou negativos de ε. Então, conclui-se que $c^T y = 0$, pois se $c^T y \neq 0$, um valor pequeno de ε com um sinal apropriado poderia ser determinado para fazer (3.9) menor que $c^T x$, mantendo a factibilidade. Isso violaria a hipótese de que x é uma solução ótima e, portanto, tem-se que $c^T y = 0$.

Tendo estabelecido que a nova solução factível com menos componentes positivos também é ótima, o restante da prova prossegue exatamente como na parte (i). ■

Este teorema reduz a tarefa de resolver um problema de programação linear para a de apenas procurar por soluções básicas factíveis.

Propriedade 3.1 Considere a região factível $S = \{x \in R^n \ tal\ que\ Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é um vértice de S se e somente se x for uma solução básica factível.

Como consequência, tem-se que a região factível S tem um número finito de vértices, pois há um número finito de partições básicas (que corresponde ao número de formas de selecionar m colunas entre as n possíveis de forma que sejam sempre linearmente independentes entre si), limitado por $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ [14]. ■

Propriedade 3.2 Em termos gráficos, se um problema de programação linear tem solução ótima, então existe um vértice ótimo [14]. ■

A partir disso, interpreta-se que se existe uma solução ótima, existe uma solução básica factível ótima, que pode ser encontrada entre todas as soluções básicas factíveis. Isso sugere um método de solução:

- Determine todas as K soluções factíveis (vértices da região factível S): $x^1, x^2, \dots, x^k$;
- Determine a solução ótima x_j tal que $f(x^j) = mínimo\ \{f(x^k), k = 1, 2, \dots, k\}$.

Ocorre que o número K, com $k \leq C_m^n$, pode ser significativamente grande em problemas práticos, de forma que esse procedimento torna-se inviável computacionalmente. Há um método mais elaborado que, a partir de uma solução básica factível, emite outras soluções básicas melhores que a inicial. É conhecido como *método simplex* e será trabalhado no próximo capítulo.

4 MÉTODO SIMPLEX

O método simplex permite que computadores disponíveis hoje no mercado possam resolver com sucesso problemas com um número relativamente grande de variáveis e restrições, através de implementações razoavelmente simples. Esses problemas podem possuir dezenas, centenas ou até mesmo milhões de variáveis e restrições.

Este método tem como função procurar um vértice ótimo entre os k vértices presentes na região factível S, sendo estes vértices soluções básicas factíveis. Ao encontrar uma solução básica factível, o método identifica se esta é uma solução ótima ou não. Caso seja, o problema esta resolvido, caso contrário, deve-se buscar a solução ótima através das soluções básicas factíveis.

Desta forma, a partir de uma solução básica inicial, o método é capaz de selecionar outras soluções básicas melhores que a primeira. Por exemplo, considerando um problema na forma padrão com uma solução básica inicial, a partir desta solução, outras soluções básicas são encontradas, de maneira que cada uma sempre apresente um valor menor que a anterior até que a última a ser encontrada possua um valor mínimo para aquele problema, considerado como solução ótima.

Para a compreensão do procedimento de aplicação do método simplex, deve-se primeiro, entender o processo de pivoteamento realizado em um sistema de equações lineares. Para tanto, considera-se o sistema linear de equações na forma matricial

$$Ax = b$$

em que A é uma matriz $m \times n$, x é um vetor de dimensão n, b é um vetor de dimensão m e $m \leq n$.

Se $m < n$ e as equações do sistema são linearmente independentes, então há infinitas soluções para tal sistema. Para que haja uma única solução, os coeficientes das $n - m$ equações (colunas) linearmente independentes devem formar uma matriz identidade, obtendo-se desta forma uma solução básica para $Ax = b$, de modo que as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_m$ são chamadas *variáveis não básicas* e as variáveis $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ são chamadas *variáveis básicas*. Portanto,

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_m = 0 \text{ e } x_{m+1} = b_1, x_{m+2} = b_2, \ldots, x_n = b_n$$

ou, na forma vetorial: $x = (0, b)$ onde 0 é o vetor zero de dimensão m e b é o vetor de dimensão m.

Na intenção de facilitar o processo do método simplex, é utilizado uma tabela (ou *tableau*) que contém os coeficientes das n variáveis e os valores do vetor b, de forma que apresente a seguinte configuração:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{matrix}.$$

O tableau anterior corresponde a um sistema na forma canônica. Caso se queira trocar uma das variáveis da base, por exemplo, x_p $(m + 1 \leq p \leq n)$ por uma das varáveis não básicas, por exemplo, x_q $(1 \leq q \leq m)$, o processo é simples, porém só pode ser realizado se, e somente se, $a_{pq} \neq 0$. Então, divide-se a linha p por a_{pq} para que o coeficiente de x_q na linha p seja 1. Em seguida, deve-se subtrair apropriados múltiplos da nova linha p de cada uma das outras linhas a fim de que os outros coeficientes de x_q sejam 0 nessas linhas. Com isso, tem-se que a coluna q torna-se 0, exceto na posição ocupada pela linha p, onde valerá 1. Ao final deste processo, a variável básica x_p passa a ser não básica e a variável não básica x_q passa a ser básica, de forma que as colunas das outras variáveis básicas não são alteradas. Deste modo, sejam a'_{ij} os coeficientes do novo tableau formado, tem-se

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{pj}}{a_{pq}} a_{iq}, \quad i \neq p \\ a'_{pj} = \dfrac{a_{pj}}{a_{pq}} \end{cases}$$

que são as *equações pivô* que surgem frequentemente na programação linear, sendo a_{pq} o *elemento pivô* no sistema de equações inicial.

No entanto, ao realizar o pivotemento, nem sempre a nova solução básica será não negativa. Então, devem ser satisfeitas algumas condições para que esta operação mantenha a viabilidade da nova variável básica. Há técnicas que permitem selecionar a variável básica que se tornará não básica e a variável não básica que se tornará básica.

Durante o processo de aplicação do método simplex, a hipótese abaixo é bastante importante, visto que sua invalidade pode comprometer a continuação do funcionamento do método dentro processo.

Hipótese 4.1 *(Hipótese da não degeneração)* Considere o sistema

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Todas as suas soluções básicas factíveis são soluções básicas factíveis não degeneradas. ■

O método simplex visa otimizar o valor da função objetivo de um problema de programação linear. Se este problema estiver na forma padrão, então servirá para minimizar o valor da função objetivo. Para isso, a implementação do método consiste em trocar uma variável não básica de posição com uma variável básica.

Para tanto, o primeiro passo é determinar qual será a variável não básica a entrar na base. Deve-se levar em conta a função objetivo do problema. Seja a função objetivo

$$f(x) = f(\hat{x}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}},$$

em que $f(\hat{x})$ é a parte da função objetivo correspondente às variáveis básicas e $\hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \cdots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}$ é a parte da função objetivo correspondente às variáveis não básicas, sendo $\hat{c}_{N_k}$ $(1 \leq k \leq n - m)$ o custo de cada uma das variáveis não básicas. A variável não básica a entrar na base pode ser aquela que possui o menor custo negativo $(\min\{\hat{c}_{N_1}, \hat{c}_{N_2}, \dots, \hat{c}_{N_{n-m}}\} < 0)$, pois assim a função objetivo tenderá a decrescer mais rapidamente ao perturbar esta variável. Essa escolha é conhecida na literatura como a *regra de Dantzig* [14].

O segundo passo para que a implementação do método simplex funcione, é determinar a variável a deixar a base. Considere o sistema correspondente às restrições de um problema de programação linear na forma padrão:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

e sua representação em um tableu:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{matrix}$$

que representa a solução com as variáveis básicas $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$. Assumindo que $b_1, b_2, \dots, b_m$ são não negativos, a solução básica $x_{m+1} = b_1, x_{m+2} = b_2, \dots, x_n = b_m$ é factível. Supondo que se deseja trazer a variável não básica x_q, com $1 \leq q \leq m$, para a base mantendo a factibilidade da solução. Para determinar qual elemento da q-ésima coluna será o elemento pivô (e, portanto qual variável deixará a base), deve-se calcular as razões

$$\frac{x_i}{a_{kq}} = \frac{b_k}{a_{kq}} \qquad a_{kq} > 0,$$

com $i = m + 1, m + 2, \dots, n$ e $k = 1,2, \dots., m$. Seleciona-se então, a menor razão não negativa. O elemento pivô será a_{kq}, que ocupa a posição de encontro da coluna q com a linha que gerou a menor razão $\frac{b_k}{a_{kq}}$ e, portanto, x_{m+k} será a variável a deixar a base. Caso todos os elementos da coluna q sejam negativos, a razão $\frac{b_k}{a_{kq}}$ não será calculada e o problema, que possui um conjunto de soluções factíveis, será dito ilimitado.

Todo esse procedimento para encontrar o elemento pivô é um caminho para que uma nova solução factível seja encontrada. Para dar continuidade ao processo, o terceiro passo é iniciado, onde as linhas para formar um novo tableau a partir do antigo são calculadas.

De início, deve-se calcular a nova linha pivô. Para tanto, divide-se os elementos da linha k pelo elemento pivô a_{kq} a fim de que este tenha valor unitário 1. Em seguida, subtrai-se de cada linha, a nova linha pivô multiplicada pelo elemento que situa-se no encontro entre a coluna q e a linha em que está sendo realizada a subtração, de modo que cada um dos elementos das novas linhas calculadas possam ser determinados por:

$$a'_p = a_p - \frac{a_k}{a_{kq}} a_{pq} \qquad 1 \leq p \leq m.$$

Com isso, um novo tableau é formado com uma nova solução básica, em que a variável x_q passou a ser básica e a variável x_{m+k} passou a ser não básica. Para saber se o problema está resolvido, deve-se observar se entre os custos da função objetivo há algum elemento negativo. Se não tiver, a solução básica calculada é dita solução básica ótima, sendo uma solução factível mínima, caso contrário, os passos descritos anteriormente deverão ser refeitos para uma nova tabela e assim por diante, até que se encontre um tableau em que todos os custos da função objetivo sejam positivos e, consequentemente, esta tenha um valor ótimo.

A seguir encontra-se um teorema que define a condição para que uma função objetivo possa ter seu valor melhorado (otimizado).

Teorema 4.1 (*Melhoria da Solução Básica Factível*). Dada uma solução básica factível não degenerada com a função objetivo valendo f_0, suponha que para algum $j(x_j \in x_N)$, $c_j < 0$. Então, há uma solução factível com a função objetivo valendo $f < f_0$. Se a coluna a_j pode ser substituída por algum vetor da base original para formar uma nova solução básica factível, esta nova solução terá $f < f_0$. Se a_j não pode ser substituída para formar uma solução básica factível, então o conjunto de soluções factíveis K é ilimitado e a função objetivo pode assumir valores pequenos (tendendo ao menos infinito) [15].

Prova. Seja $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ uma solução factível com valor objetivo f_0 e suponha que $c_{m+1} < 0$. Então, de qualquer modo, uma nova solução factível pode ser construída da forma $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x'_{m+1}, 0, 0, \dots, 0)$ com $x'_{m+1} > 0$, de forma que

$$f - f_0 = c_{m+1}x'_{m+1} < 0,$$

e, portanto, $f < f_0$ para qualquer solução deste tipo. Deseja-se tornar x'_{m+1} tão grande quanto possível. Como x'_{m+1} é aumentada, os outros componentes aumentam, permanecem constantes, ou diminuem. Logo, x'_{m+1} pode ser aumentado até um $x'_i = 0$, $i \leq m$, caso em que obtém-se uma nova solução básica factível ou se nenhum dos x'_is diminuírem, x'_{m+1}pode ser aumentado sem limite indicando uma solução ilimitada e um valor objetivo sem limite inferior [15]. ■

Desta forma, sendo $c_j < 0$ para algum j, é possível fazer com que a variável x_j torne-se positiva e o valor da função objetivo diminua. Nos casos em que $c_j \geq 0$, isso implica que a solução é ótima para todo j, como descrito no teorema a seguir.

Teorema 4.2 *(Teorema da Condição de Otimalidade)* Se uma solução básica factível possui $c_j \geq 0$ para todo j, então esta solução é ótima [15].

Prova. Qualquer outra solução factível deve ter $x_i \geq 0$ para todo i, e portanto o valor f da função objetivo satisfaz $f - f_0 \geq 0$. ■

Quando se aplica o método simplex, na grande maioria das vezes, se está trabalhando com soluções básicas factíveis não degeneradas. Porém, em alguns casos, soluções básicas factíveis degeneradas podem ocorrer. Muitas vezes elas podem ser manuseadas como uma solução básica factível não degenerada para que a aplicação do método ocorra normalmente. No entanto, quando uma coluna q é selecionada para entrar na base, o valor mínimo das divisões $\frac{b_i}{a_{iq}}$ pode ser zero, implicando que a variável básica nula deve sair, pois é o valor mínimo entre as divisões realizadas. Isso significa que a nova variável x_q a entrar terá valor zero, o valor objetivo não diminuirá e a nova solução básica factível será também degenerada. Repetindo o mesmo processo, notaremos que a nova solução básica factível será novamente degenerada, representando um ciclo que pode ser repetido indefinidamente. Esse processo costuma chamar-se *ciclagem* [15].

Alguns problemas de programação linear não apresentam logo no começo uma solução básica factível inicial sobre o qual o método simplex deverá ser aplicado. Entretanto, há maneiras de encontrar essa solução. Uma delas é através de uma função objetivo auxiliar que possui variáveis artificiais.

Considere o problema de programação linear na forma padrão que não apresenta uma solução básica factível inicial

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

com $b \geq 0$. Uma das formas de encontrar a solução factível inicial para este problema é considerar o problema de minimização (artificial)

$$
\begin{aligned}
&minimizar \quad && \sum_{i=1}^{m} y_i \\
&sujeito\ a && Ax + y = b \qquad (4.2)\\
& && x \geq 0 \\
& && y \geq 0
\end{aligned}
$$

onde $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ é o vetor das variáveis artificiais. Se há uma solução factível para (4.1), então (4.2) possui um valor mínimo tal que o vetor y vale zero ($y = 0$). Por outro lado, se não há solução factível para (4.1), então o valor mínimo para (4.2) é maior que zero.

Com a inserção das variáveis artificiais em (4.1), o problema (4.2) adquire a configuração de um problema de programação linear com variáveis x e y na forma canônica. Logo a solução básica factível é $y = b$, podendo ser aplicado o método simplex. Ao final da aplicação, percebe-se que as variáveis artificiais que foram inseridas no problema com caráter de variáveis básicas, tornar-se-ão variáveis não básicas, de modo que a solução básica final será dada pelo vetor x, tal como no problema inicial. É importante ressaltar que as variáveis artificiais são utilizadas nos problemas que não possuem variáveis de folga, com a intenção de criar uma solução básica inicial para o problema que não a possui.

Esta forma de calcular a solução de um problema de programação linear produz um resultado que satisfaz as restrições estabelecidas, representando a *fase I* de um método conhecido como *método das duas* fases. Na fase I, variáveis artificiais são introduzidas e uma solução básica factível é encontrada ou comprova-se que não existe solução factível. Na *fase II*, através do uso da solução básica factível resultante da fase I, a função objetivo original é minimizada. Durante a fase II as variáveis artificiais e a função objetivo da fase I são omitidas, pois foram anuladas.

Embora seja, aparentemente, mais fácil compreender muito do método simplex pelo uso do tableau, devido à visualização de todos os elementos, é bastante interessante a abordagem deste conteúdo através da forma matricial.

A representação matricial do método simplex serve de base para o método *simplex revisado* (que em muitos casos resulta numa considerável vantagem computacional) e para a *programação linear dual*.

O tableau inicial do método simplex na forma matricial tem a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} c^T & 0 \\ A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T & 0 \\ B & N & b \end{bmatrix}$$

que nem sempre encontra-se na forma canônica. Se a matriz B é usada como a base, então o tableau correspondente torna-se

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c_N^T - c_B^T B^{-1} N & -c_B^T B^{-1} b \\ I & B^{-1} N & B^{-1} b \end{bmatrix}$$

que é a matriz que se deseja [15].

O próximo capítulo traz a formulação matemática da Dualidade de problemas de Programação Linear.

5 DUALIDADE

Um problema de programação linear dito *dual* é intimamente relacionado com um problema de programação linear (dito primal) a ele correspondente. O estudo da dualidade proporciona um aprofundamento no conteúdo do método simplex e sua aplicação, além de ser um método alternativo de solução de problemas. Em muitos casos é mais fácil resolver um problema pela forma dual construída, outras, pela forma primal. Assim, tratar um problema de programação linear pela forma primal e dual pode representar uma vantagem computacional significativa.

O problema dual é construído a partir de um problema primal, de forma que com um problema dual também é possível encontrar sua forma primal (procurando o problema dual do problema dual), pois o processo para encontrar uma ou outra forma é a mesma. Desta maneira, tem-se que ambos são construídos através de suas restrições e custos da função objetivo, se um for do tipo minimização o outro será maximização e vice versa. Se os valores ótimos correspondentes às funções objetivos forem finitos, então são iguais entre si. As variáveis do problema dual podem ser interpretadas como os preços associados às restrições do problema primal e estão intimamente ligadas com o cálculo dos custos relativos no método simplex.

Para definir um problema na forma dual, deve-se partir de um problema de programação linear na forma padrão e transformá-lo na forma primal a seguir:

$$\begin{array}{ll} & Primal \\ Minimizar & c^T x \\ Sujeito\ a & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

O seu dual é expresso por:

$$Dual$$

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Maximizar} & \lambda^T b \\
\textit{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \\
 & \lambda \geq 0,
\end{array}
$$

onde A é uma matriz $m \times n$, x é um vetor coluna de dimensão n, b é um vetor coluna de dimensão m, c^T é um vetor linha de dimensão n e λ^T é um vetor linha de dimensão m. O vetor x é a variável do problema primal e λ é a variável do problema dual.

O par de problemas anteriores é denominado *forma simétrica de dualidade* e pode ser utilizado para definir o problema dual de qualquer problema de programação linear.

Se um problema na forma primal mudar algumas das suas inequações para equações, as variáveis λ correspondentes no problema dual serão variáveis livres. Se algumas das variáveis x do problema primal são variáveis livres, então as inequações correspondentes a elas em $\lambda^T A \geq c^T$ no problema dual se tornarão equações.

Lema 5.1 (*Lema da dualidade fraca*) Se x for factível para o problema primal na forma padrão a seguir

$$Primal$$

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimizar} & c^T x \\
\textit{Sujeito a} & Ax \geq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

e λ for factível para o problema dual correspondente, definido como

$$Dual$$

$$\begin{aligned} &Maximizar && \lambda^T b \\ &Sujeito\ a && \lambda^T A \le c^T \\ & && \lambda \ge 0, \end{aligned}$$

então

$$c^T x \ge \lambda^T b.$$

Prova. Tem-se que

$$Ax = b,$$

então, pode-se escrever

$$\lambda^T A x = \lambda^T b.$$

Pelo problema dual obtém-se que

$$\lambda^T A \le c^T,$$

logo

$$c^T x \ge \lambda^T A x = \lambda^T b.$$

Portanto,

$$c^T x \ge \lambda^T b,$$

Para todo $x \ge 0$ e $\lambda^T A \le c^T$ [15]. ∎

O lema anterior mostra que a solução factível de qualquer um dos problemas tratados (primal ou dual), provoca um limite no valor da função objetivo do outro problema. Todos os valores associados ao problema primal são maiores do que os valores associados ao problema dual. Entretanto, uma vez que o problema primal procura por um valor mínimo para a função objetivo, o problema dual procura pelo máximo, de forma que ambos os problemas procuram atingir um o valor do outro, como expresso no corolário a seguir [15].

Corolário 5.1 Seja x_0 um vetor que satisfaz o problema primal e o λ_0 um vetor que satisfaz o problema dual. Se x_0 e λ_0 são factíveis para os problemas primal e dual do lema 1, respectivamente, e se $c^T x_0 = \lambda_0^T b$, então x_0 e λ_0 são soluções ótimas para seus correspondentes problemas [15].

O inverso do que afirma o corolário anterior também é válido, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.1 *(teorema da dualidade da programação linear)* Se um dos problemas apresentados no lema 1 (primal ou dual) tem uma solução finita ótima, então o outro também terá, de forma que o valor da função objetivo correspondente a ambos serão iguais. Se algum dos problemas (primal ou dual) tiver uma solução ilimitada, o outro problema não possuirá solução factível. ■

Como consequência deste teorema, tem-se que se o problema primal for resolvido através do método simplex, a solução para o problema dual correspondente é prontamente obtida.

Supondo que o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & c^T x \\ \textit{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

possua a solução básica factível ótima $x = (x_B, 0)$ correspondente base B. Deve-se determinar a solução do problema dual

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximizar} & \lambda^T b \\ \textit{Sujeito a} & \lambda^T A \leq c^T \end{array}$$

em ternos de B.

Considere a partição de A como $A = [B, D]$. Sendo a solução básica factível $x_B = B^{-1}b$ ótima, o custo relativo dado por r deve ser não negativo em cada componente. Como

$$r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1} D$$

e r_D é não negativo em cada componente, tem-se que

$$c_B^T B^{-1} D \leq c_D^T.$$

Seja $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$. Essa escolha para λ resolve o problema dual, de forma que

$$\lambda^T A = [\lambda^T B, \lambda^T D] = [c_B^T, c_B^T B^{-1} D] \leq [c_B^T, c_D^T] = c^T.$$

Então, sendo $\lambda^T A \leq c^T$, λ é factível para o problema dual. Por outro lado,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B,$$

de modo que o valor da função objetivo do problema dual para λ é igual ao valor da função objetivo do problema primal.

Teorema 5.2 Supondo que o problema de programação linear

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad c^T x \\ &\textit{Sujeito a} \quad Ax = b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

tenha uma solução básica factível ótima correspondente à base B. Então, o vetor λ que satisfaz

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

é uma solução ótima do seguinte problema dual

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad \lambda^T b \\ &\textit{Sujeito a} \quad \lambda^T A \leq c^T. \end{aligned}$$

Desta forma, o valor ótimo de ambos os problemas são iguais [15]. ■

Com a formulação matemática da Programação Linear apresentada até aqui, começa a partir do próximo capítulo, a introdução à Economia.

6 ALGUNS CONCEITOS ECONÔMICOS

O campo de aplicação da Economia é bastante amplo. No mundo dos negócios, particularmente, seus conceitos da Matemática Financeira fazem-se muito importantes, pois representam uma linguagem quase que corriqueira.

No presente trabalho, ao utilizar-se do Método Simplex e da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, alguns desses conceitos foram muito utilizados e os principais estão definidos a seguir.

6.1 Conceitos da Matemática Financeira

- Investimento

É uma aplicação de um tipo de recurso a fim de receber futuramente algum retorno superior ao valor do que foi investido, ou seja, é uma aplicação com expectativa de lucro.

- Retorno

É representado pelo lucro ou perdas de ativos financeiros obtidos pelos investimentos após um período de tempo.

- Lucro

É todo retorno positivo de investimentos feitos por uma pessoa ou empresa, podendo ser em bens ou dinheiro. É um valor excedente ao capital investido.

- Portfólio

É o conjunto formado por um grupo de ativos financeiros, como fundo de investimento, aplicações imobiliárias, ações, etc. Esses ativos pertencem a um investidor, pessoa física ou jurídica.

- Ações

São frações do capital social de uma empresa aberta, isto é, são pequenas partes de uma empresa. Cada ação é um título nominativo negociável que pode ser adquirida por um investidor [1].

- Juros

É o rendimento que se obtém quando se empresta dinheiro por um determinado período. É como uma compensação pelo tempo que o credor ficará sem utilizar o dinheiro emprestado. Os juros são taxas percentuais, definidas pelo credor, de acordo com a inflação e/ou risco do empréstimo. No Brasil, os bancos utilizam uma taxa de referência básica, criada em 1979 pelo Banco Central do Brasil, chamada Taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). Essa taxa também é utilizada na delimitação das taxas de juros para o comércio.

- Inflação

É a média do crescimento dos preços de um conjunto de bens e serviços em um determinado período. É representada pela perda do valor do dinheiro ao longo do tempo ou perda do poder de compra do dinheiro. Pode ocorrer devido ao aumento na quantidade de moeda circulante, aumento na demanda de produtos ou aumento nos custos dos mesmos ou serviços.

- Risco

É caracterizado pela possibilidade de que algo desfavorável possa ocorrer. Nos investimentos está relacionado com a possibilidade de se lucrar menos que o esperado ou não lucrar. O risco pode ser caracterizado de duas formas: diversificável e não diversificável. O risco não diversificável (ou risco de mercado) refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo, ou seja, refere-se a riscos que praticamente todos os ativos estão sujeitos, como os riscos associados às variáveis inflação, juros, taxas de câmbio, instabilidade política ou guerras. Já os riscos diversificáveis são relacionados a empresas, setor, mercado, economia ou país, logo são passíveis de redução através de diversificação.

- Diversificação

É a forma de um determinado investidor dividir seu capital em diferentes ativos financeiros. Essa prática faz com que o risco de perda de capital seja reduzido, sendo aplicável apenas ao risco diversificável.

- Volatilidade

É uma variável que mostra a intensidade e a frequência das oscilações nas cotações de um ativo financeiro, seja título, fundo de investimento ou ainda, índices das bolsas de valores, considerado um determinado período de tempo. É um dos parâmetros mais frequentemente utilizados como forma de mensurar o risco de um ativo analisado. Mercados que se movem rapidamente são mercados de alta volatilidade e os que se movem lentamente são mercados de baixa volatilidade [2].

No próximo capítulo são abordados os principais conceitos de Estatística utilizados na formação de uma carteira de investimento, fazendo uso da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz e do Método Simplex.

7 ALGUNS PARÂMETROS ESTATÍSTICOS

"Em um sentido amplo, estatística é a arte e a ciência de coletar, analisar, apresentar e interpretar dados [3]."

Na área de economia e administração o uso da estatística é de suma importância, pois auxilia grandemente os gestores nas tomadas de decisão, pois proporciona uma visão mais aprofundada do ambiente empresarial e econômico. Desta forma, os gestores mais bem sucedidos são aqueles que são capazes de interpretar dados estatísticos obtidos e usá-los de forma a tirar vantagens dessas informações.

Muitas empresas, ao realizarem auditorias, estão na verdade fazendo uso de alguns mecanismos da estatística, assim como os analistas financeiros que usam diversas informações estatísticas para direcionar suas recomendações de investimento. Para títulos financeiros, os analistas avaliam diversos dados como lucros e rentabilidade em dividendos. Com isso conseguem concluir se um título está desvalorizado ou não ao compará-lo com as informações sobre a média do mercado de ações.

As informações estatísticas também auxiliam os economistas a fazerem previsões sobre o futuro da economia ou algum aspecto dela. Através dos dados estatísticos, a inflação é calculada, por exemplo.

A seguir encontra-se uma síntese de alguns parâmetros estatísticos, destinados a amostras, que servem de base para análise e escolha de melhores portfólios de investimentos, segundo a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz [3].

7.1 Média

A média ($\bar{x}$) constitui uma medida da posição central dos dados. É representada pela soma de todos os termos (x_i) de uma amostra, dividida pelo número (n) de termos que essa amostra possui, sendo esses termos todos igualmente prováveis:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

7.2 Média Ponderada

É semelhante à média apresentada anteriormente. Porém, a média ponderada é calculada dando a cada termo (x_i) um peso que reflita a sua importância, como mostrado a seguir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

em que

x_i: o valor da observação i

w_i: o peso da observação i.

7.3 Variância

A variância (s^2) é a medida da variabilidade que utiliza todos os dados da amostra. Baseia-se na diferença entre o valor de cada observação (x_i) e a média ($\bar{x}$). Essa diferença é denominada *desvio em torno da média*. No caso da variância, os desvios em torno da média são elevados ao quadrado. Com uma amostra finita de n termos igualmente prováveis, a variância é definida como:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Em suma, variância é a média dos quadrados dos desvios das observações em relação à média.

É importante ressaltar que ao elevar ao quadrado o desvio da média ($(x_i - \bar{x})^2$), a unidade associada à variância da amostra calculada (s^2) também é elevada ao quadrado.

A variância é uma medida eficaz ao comparar a quantidade de variabilidade de duas ou mais variáveis. Em uma comparação de variáveis, aquela que tem a maior variância exibe mais variabilidade.

7.4 Desvio padrão

O desvio padrão (s) é definido como a raiz quadrada positiva da variância (s^2):

$$s = \sqrt{s^2}.$$

A vantagem de utilizar o desvio padrão ao invés da variância é que o desvio padrão é medido nas mesmas unidades que os dados originais. Por isso, é mais facilmente comparado a outros parâmetros estatísticos.

7.5 Coeficiente de Variação

É um parâmetro da estatística descritiva que indica o tamanho do desvio padrão em relação à média, sendo, geralmente, expresso como uma porcentagem como indicado a seguir.

$$\text{Coeficiente de Variação} = \left(\frac{Desvio\ padrão}{Média} \times 100\right)\%.$$

O coeficiente de variação é útil ao realizar a comparação da variabilidade de variáveis que possuem desvios padrão e médias diferentes.

7.6 Covariância

Pode ser considerada como uma medida descritiva de dependência linear entre duas variáveis aleatórias (x e y), numa amostra com n elementos. A covariância da amostra é definida da seguinte maneira:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}.$$

Se seu valor for positivo, há uma associação linear positiva entre as variáveis, ou seja, se o valor de uma delas aumenta, o valor da outra também aumentará. De modo análogo, se seu valor for negativo, há uma associação linear negativa entre as variáveis, de forma que à medida que o valor de uma delas aumenta, o valor da outra diminui.

A desvantagem de utilizar a covariância como medida da intensidade da relação linear entre duas variáveis aleatórias é a dependência das unidades de medidas destas variáveis. Deste modo, se a unidade de medida de uma delas for alterada o valor da covariância pode ser também alterado, quando na verdade, deveria manter-se o mesmo visto que a relação entre elas não se altera.

7.7 Correlação

É uma medida de associação linear entre duas variáveis que não é afetada pelas unidades de medida. É um conceito utilizado para medir o grau de dependência linear entre duas variáveis:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

em que

r_{xy}: coeficiente de correlação da amostra

s_{xy}: covariância da amostra

s_x: desvio padrão da amostra de x

s_y: desvio padrão da amostra de y.

Se todos os pontos de um conjunto de dados se situam em uma linha reta positivamente inclinada, o valor do coeficiente de correlação da amostra é $+1$, indicando que há uma relação linear positivamente perfeita entre as variáveis analisadas. De forma análoga, se todos os pontos de um conjunto de dados se situam em uma linha reta negativamente inclinada, o valor do coeficiente de correlação da amostra é -1, indicando que há uma relação linear negativamente perfeita entre as variáveis analisadas. Se o coeficiente de correlação for igual à zero, significa que não há nenhuma relação linear entre as variáveis analisadas e, se corresponder a um valor próximo de zero, indica uma relação linear fraca.

Desta forma, tem-se que o coeficiente de correlação varia entre -1 e $+1$. Valores próximos a -1 ou $+1$ indicam uma relação linear forte. Entretanto, valores próximos a zero indicam uma relação linear fraca.

O próximo capítulo aborda os conceitos da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, base de conhecimento para a formação da carteira de investimento.

8 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS DE MARKOWITZ

No cenário econômico atual, ao estabelecer uma carteira de investimento, os investidores buscam alternativas para obter o maior lucro possível dentro de um cenário de risco reduzido, representando uma situação ideal. Para auxiliá-los, o uso da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, apresentada nesta seção, é bastante frequente.

8.1 Biografia de Harry Max Markowitz

Harry Max Markowitz nasceu em 1927, em Chicago e cursou a Universidade da mesma cidade. Estudou micro e macro economia, mas acabou interessando-se pela "Economia da Incerteza", influenciado pelos argumentos de alguns de seus grandes professores, como Friedman, Marschak e Savage. O tema para a dissertação de Markowitz foi: "Aplicação de Métodos Matemáticos para o mercado de ações".

Em Chicago foi convidado a se tornar um dos estudantes membros da Comissão Cowles para Pesquisa em Economia. Na época, era um grupo pequeno, porém bastante aplicado em suas tarefas. Esta comissão teve o poder de influenciar o pensamento Econômico e Econométrico, além de angariar um número significativo de prêmios Nobel.

Em uma tarde, enquanto lia a Teoria do Valor de Investimento de John Burr Williams na biblioteca, Markowitz pensou nos conceitos básicos da teoria de portfólio (carteira). Williams propunha que o valor de uma ação deveria ser igual ao valor presente dos seus futuros dividendos. Era comum os investidores realizarem um único investimento, mas Markowitz percebeu que para maximizar o valor de uma carteira, os investidores deveriam diversificar, pois desta forma, se preocupariam tanto com o risco, quanto com o retorno, devendo selecionar uma opção que fosse ótima do ponto de vista desses dois critérios.

Em 1952, Markowitz deixou a Universidade de Chicago e se juntou à RAND Corporation, uma entidade que desenvolve pesquisas e análises para o Departamento de Defesa dos Estados Unidos. Pouco tempo depois, George Dantzig também se uniu à RAND Corporation. Enquanto Markowitz não trabalhava na teoria de portfólio da RAND, aprendeu as técnicas de otimização e o algoritmo básico do simplex de George Dantzig, o que influenciou claramente seu trabalho posterior sobre o cálculo rápido das fronteiras de média variância.

Seu famoso artigo sobre "Seleção de Carteiras" apareceu em 1952 e, nos 38 anos seguintes, Markowitz trabalhou com muitas pessoas em muitos tópicos. O foco sempre foi a aplicação de técnicas matemáticas e computacionais para problemas práticos, especificamente, problemas de decisões de negócios sob incerteza. Algumas vezes eram aplicadas técnicas já existentes, mas em outras eram desenvolvidas novas técnicas que acabavam sendo mais bem sucedidas na prática, do que as antigas.

Em 1989, Markowitz recebeu o Prêmio Von Neumann em Teoria em Pesquisas Operacionais pela Sociedade de Pesquisa Operacional da América e do Instituto de Ciências de Gestão. Eles citaram as obras de Markowitz nas áreas de teoria de carteiras, técnicas de matrizes esparsas e da linguagem de programação SIMCRIPT.

O trabalho de Markowitz sobre técnicas de matrizes esparsas foi uma consequência do trabalho feito em colaboração com Alan S. Manne, Tibor Fabian, Thomas Marschak, Alan J. Rowe e outros membros da RAND Corporation, na década de 1950, sobre modelos de análises de atividades de grandes indústrias e multi-indústrias quanto à capacidade industrial.

Markowitz observou que a maior parte dos coeficientes de suas matrizes eram zero, isto é, os não zeros estavam "esparsos" na matriz e que, tipicamente, as matrizes triangulares associadas a soluções proveniente da eliminação Gaussiana permaneceriam esparsas se os elementos pivô fossem escolhidos cuidadosamente. William Orchard-Hayes programou o primeiro código de matriz esparsa. Desde então, um trabalho significativo foi feito sobre técnicas de matrizes esparsas, por exemplo, sobre métodos de seleção de pivôs e de armazenamento de elementos diferentes de zero. Atualmente, técnicas de matrizes esparsas é padrão em grandes códigos de programação linear.

Durante a década de 1950, Markowitz percebeu que muitos problemas práticos solicitavam mais que uma solução analítica e que técnicas de simulação eram necessárias. Na RAND Corporation participou da construção de grandes modelos de simulação de logística. Entretanto, um problema com o uso de simulação levava o período de tempo necessário para programar um simulador detalhadamente. No início de 1960, retornou para a RAND Corporation com o propósito de desenvolver uma linguagem de programação, mais tarde chamada SIMSCRIPT, que reduzia o tempo de programação, permitindo que o programador descrevesse o sistema a ser simulado em vez de descrever as ações que o computador deve tomar para realizar esta simulação [4].

Markowitz também desenvolveu um modelo de análise da relação risco-retorno para carteiras de investimento, no qual as informações necessárias para a escolha do melhor portfólio para quaisquer níveis de risco estão contidas nos parâmetros estatísticos: média, variância, desvio-padrão, covariâncias e correlações [5].

Harry Markowitz contribuiu de maneira significativa para a formação da Teoria Financeira, de forma que seu trabalho é utilizado em grande escala até os dias de hoje.

Atualmente, o conceito de risco (incerteza) estudado por Markowitz é utilizado diariamente na maioria das operações financeiras, inclusive na Bolsa de Valores. Grandes empresas utilizam o risco para avaliar seus investimentos. Isto mostra uma pequena parcela da importância da obra de Harry Markowitz para a Economia.

8.2 Uso da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz

Ao criar uma carteira de investimentos, o interesse do investidor geralmente está em obter o maior lucro com o menor risco de perda de capital. Para tanto, há a necessidade de utilizar algum modelo matemático para atingir o objetivo esperado ou se aproximar o máximo possível deste. A Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz veio para auxiliar nesta perspectiva e nas tomadas de decisões do mercado financeiro. Na realidade, o modelo média-variância de Markowitz foi o precursor na área de otimização de portfólio, onde o retorno esperado e a volatilidade do mesmo são de extrema importância na definição da melhor carteira de investimento. O problema é formulado de modo a se minimizar o risco do portfólio ou maximizar o nível de retorno do mesmo.

A teoria de portfólio considera a rentabilidade do ativo como uma variável aleatória, e uma carteira como uma combinação ponderada de ativos, de modo que o retorno de uma carteira é a combinação ponderada dos retornos dos ativos, como mostrado na fórmula a seguir:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

onde

R_p: retorno esperado da carteira

R_i: retorno do ativo i

n: número de ativos na carteira

w_i: peso do ativo i na composição da carteira.

Além disso, o retorno da carteira também é uma variável aleatória e, consequentemente, tem um valor esperado e uma variância. O risco não é a média dos riscos dos ativos que compõem o portfólio, mas uma função das variâncias de cada ativo e como eles se correlacionam. Desta forma, tem-se que para carteiras formadas por diferentes ativos, a variância será dada por [6]:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j s_{ij}$$

onde

V: variância da carteira

n: número de ativos na carteira

w_i: peso do ativo i na composição da carteira

w_j: peso do ativo j na composição da carteira

s_{ij}: covariância entre o par de ativos i e j, se i for diferente de j, e variância se i for igual a j.

Conhecidos os possíveis riscos e retornos que um investidor pode assumir ao montar uma carteira de investimento, muito provavelmente escolherá aquela que lhe ofereça uma relação risco-retorno mais favorável às suas características individuais e pretensões. Desta forma, se dois ativos possuem o mesmo nível de risco, provavelmente a escolha deverá ser pelo ativo que oferece o maior retorno, de maneira que se oferecem o mesmo nível de retorno, provavelmente a escolha deverá ser pelo ativo de menor risco, ou seja, um investidor, diante da opção de aplicar entre dois ativos que ofereçam retornos esperados idênticos, deve escolher aquele que lhe dê o maior grau de certeza quanto à rentabilidade, ou seja, o de menor dispersão (variância ou desvio padrão).

A concentração de investimentos gera maior risco para o investidor, de forma que a diversificação dos mesmos proporciona uma redução de risco na carteira. A diversificação defendida por Harry Markowitz relaciona o grau de correlação entre os retornos dos ativos e procura combinar ativos que têm correlações baixas, gerando uma carteira de investimentos com risco reduzido.

A diversificação pode proporcionar à carteira um risco igual ou menor que o risco individual de cada ativo presente em sua composição, chegando muitas vezes a ser menor que o risco do ativo mais seguro.

Vale lembrar que a diversificação não é dada apenas quanto o investimento é feito em mais de um ativo, ao invés de em apenas um. A diversificação também ocorre quando os ativos selecionados para a formação da carteira são de setores econômicos diferentes, de forma que se um ativo sofrer uma desvalorização devida a algum fator específico do seu setor econômico, os demais não sofrerão.

Na prática do mercado, o risco de uma ação é definido por seu desvio padrão, o quanto os retornos desviam da média. A possibilidade de o investimento incorrer em perda é comumente relacionada ao histórico do papel, sua previsibilidade e sua volatilidade.

O risco que um investidor está disposto a assumir pode variar muito dependendo de fatores como idade, nível social, estado civil, perspectivas futuras, entre outros fatores. A composição de uma carteira pode variar muito devido ao fato de existirem diferentes tipos de investidores que desejam assumir diferentes riscos e retornos [6].

Os investidores costumam ser divididos em três categorias de perfil: conservador, moderado e arrojado. O investidor deve saber em qual perfil se encaixa a fim de descobrir quais são os investimentos mais convenientes para ele. Esta é mais uma forma de minimizar o risco, pois tende a proteger o investidor de acontecimentos desagradáveis.

O investidor conservador é o que tem maior aversão à tomada de risco, procura evitar investimentos arriscados, buscando poupar seu dinheiro. Por apresentar essas características, costuma não diversificar seus investimentos o que, no geral, mantém um baixo risco de perda de capital, porém sem expectativa de grandes retornos. O investidor moderado é um perfil intermediário, é um investidor que aceita mudar sua opinião e sair da zona de conforto que o investidor conservador ocupa, mas receoso dos riscos a ponto de poder voltar a ocupar o perfil anterior. Contudo, procura tomar suas decisões de forma bem pensada e planejada, o que na prática tende a gerar bons resultados. Já o investidor arrojado visa à rentabilidade. Ele pode obter um alto lucro com seus investimentos, mas corre um grande risco de perder dinheiro por diversas vezes nesse período.

Deste modo, nunca existirá uma carteira de ações que agrade a todos, já que quanto maior o retorno desejado, maior será o risco a se assumir.

A Programação Linear pode auxiliar na redução apenas do risco diversificável, lembrando que é pouco provável que consiga reduzir o risco total à zero, por existir ainda o risco não diversificável ou como também é conhecido, risco de mercado.

O modelo matemático da Teoria Moderna de Portfólios identifica, dentre as infinitas possibilidades de combinações entres n ativos diferentes, aquelas que se localizam na fronteira eficiente: uma curva que une todas as carteiras capazes de gerar o máximo retorno possível, para cada nível de risco.

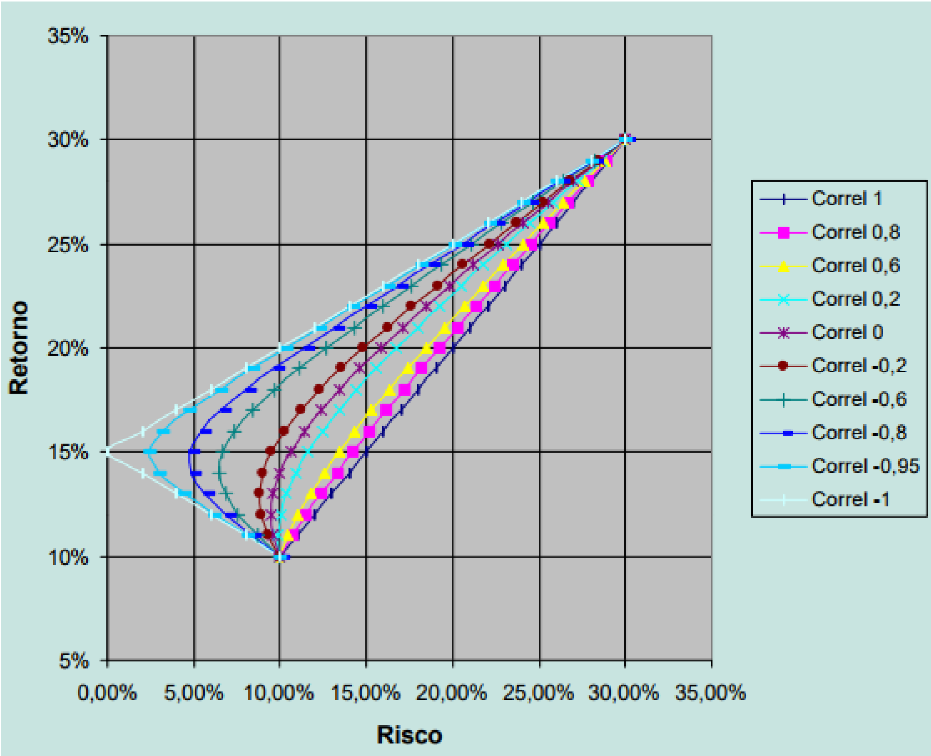
É possível identificar estes portfólios eficientes utilizando apenas três informações: a taxa de retorno dos ativos integrantes da carteira, a variância das taxas de retornos e a covariância entre todas as taxas de retorno [7].

Harry Markowitz também percebeu que o risco de uma combinação de ativos é diferente do risco de um único ativo. Por isso começou a considerar adicionalmente às duas dimensões do investimento (risco e retorno), uma terceira, representada pela correlação entre investimentos (ou a covariância). Isto reflete o grau no qual se espera que os investimentos se inter-relacionem.

A covariância possui grande amplitude, podendo assumir um valor alto, negativo ou nulo. Por esse motivo, muitos especialistas na área de administração de portfólios, preferem trabalhar com o coeficiente de correlação, que varia apenas de -1 a 1.

Ativos com correlação perfeitamente positiva (+1) são aqueles que variam de forma idêntica no decorrer do tempo, enquanto os de correlação perfeitamente negativa (-1) são aqueles que variam de forma estritamente oposta [8]. Isto é melhor visualizado através da figura a seguir, onde pode-se observar a chamada fronteira eficiente (representada por cada uma das curvas) de uma situação hipotética, que mostra o risco e retorno para as diversas composições entre dois ativos.

Figura 8.1 - Risco e retorno de uma carteira de dois ativos em função da correlação.



Fonte: GOLÇALVES JUNIOR, C.; MONTEVECHI, J. A. B.; PAMPLONA, E.O. *Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)*. In: SIMPEP, 9., 2002, Bauru. Anais... Bauru: SIMPEP, 2002, p. 1-10. Disponível em: <http://www.rodrigofernandez.com.br/ecomp/ref/excel_markowitz.pdf>. Acesso em: dez. 2015.

De acordo com a Figura 8.1, é possível notar que quando a correlação entre os ativos é +1, o retorno aumenta à medida que o risco também aumenta. Entretanto, quando a correlação entre os ativos é -1, o risco pode ser reduzido à zero. Contudo, é importante lembrar que não há ativos com correlação perfeitamente negativa no mercado financeiro. Percebe-se também, que qualquer uma das carteiras que possuem os ativos com correlação não perfeitamente positiva, o risco apresentado é sempre menor que o risco da carteira com correlação perfeitamente positiva. Por esse motivo, a diversificação através de baixas correlações entre ativos é tão valorizada.

Logo, tem-se que de acordo com o modelo de Markowitz, a variância ou risco da carteira depende da covariância entre os pares de ativos, a qual por sua vez depende da correlação entre estes. Assim, qualquer correlação menor que uma correlação perfeitamente positiva, reduz o risco de um portfólio, ou seja, quanto menor a correlação entre ativos de uma carteira, menor o risco desta.

No próximo capítulo há a apresentação dos investimentos melhor avaliados, por especialistas da área de Economia, a serem negociados no ano de 2016.

9 INVESTIMENTOS ECONÔMICOS

Como foi visto, com uma maior diversificação ao formar a carteira de investimentos, é possível obter um retorno maior com o risco de perdas reduzido. Um bom gestor deve ser capaz de criar este cenário ideal. Para tanto, as informações sobre os históricos das cotações de investimentos são de grande valia, bem como os fatores que exercem influência recente à formação da carteira.

Neste capítulo, encontra-se a previsão dos melhores investimentos, para o ano de 2016, feita por especialistas da área após a análise de como o mercado financeiro de comportou durante o ano de 2015 [9].

9.1 Previsão dos Melhores Investimentos para o Ano de 2016

Os investimentos de renda fixa foram os mais indicados por gestores de fundos, analistas e assessores financeiros para 2016 [9].

Aplicações conservadoras de renda fixa, como os fundos DI e os títulos públicos que acompanham a variação da taxa Selic eram consideradas boas opções com a alta dos juros. Os retornos mais significativos seriam os oriundos dos CDBs, LCIs e LCAs de bancos de médio porte.

A expectativa era de que a inflação em 2016 atingisse algo em torno de 7%. Devido a este fato, especialistas recomendavam aplicações em títulos públicos associados ao IPCA.

Com a alta dos juros e do desemprego, o valor dos imóveis sofreu uma baixa em 2016. Comprar um imóvel nesse período com a intenção de alugá-lo era vantajoso em situações em que o valor da locação, por mês, correspondesse a mais de 0,7% do preço do imóvel.

Investir em ações era indicado para aqueles que tinham a possibilidade de deixar o dinheiro no mercado por mais de cinco anos, pois estando o Brasil em um momento de crise política e econômica, realizar este investimento em curto prazo talvez não fosse uma boa escolha. A sugestão era que para aqueles que preferirem arriscar e investir em ações em 2016, as melhores opções, segundo os principais analistas e gestores de recursos do país, eram ações de empresas como AMBEV (ABEV3), CIELO (CIEL3), COSAN (CSAN3), EMBRAER (EMBR3) e ITAÚ (ITUB4).

Com o dólar em alta, era interessante investir no exterior com a finalidade de proteger o patrimônio da desvalorização do real. Entre os investimentos no exterior mais indicados por especialistas estão as ações de empresas europeias (principalmente as alemães) e ações de bancos e empresas do setor de tecnologia nos Estados Unidos. É possível aplicar em fundos de BDRs (Brazilian Depositary Receipts), que são ações de empresas americanas, como Apple, Google e Facebook, negociadas na Bovespa.

O próximo capítulo traz a formação de uma carteira de investimentos, com ativos sugeridos neste capítulo, bem como sua análise.

10 CARTEIRA DE INVESTIMENTO

No capítulo anterior, foram descritos os investimentos melhor avaliados em 2015 a serem feitos no ano de 2016, segundo especialistas da área de Economia. Neste capítulo, a formação de uma carteira de investimentos será feita com cinco desses ativos indicados.

Como a Teoria Moderna de Markowitz foi desenvolvida para ser aplicada em portfólios de ações, os investimentos selecionados são ações negociadas na BOVESPA. São eles: AMBEV (ABEV3), CIELO (CIEL3), COSAN (CSAN3), EMBRAER (EMBR3) e ITAÚ (ITUB4). Além destes, as ações da PETROBRÁS (PETR4) E VALE (VALE5) foram selecionadas por serem aplicações populares entre os ativos brasileiros. Assim como foi sugerido no capítulo anterior investir no exterior, um fundo de BDRs também foi selecionado, mais especificamente da empresa WALT DISNEY (DISB34) por apresentar rentabilidades mensais bastante interessantes. Em seguida, escolheram-se as ações das LOJAS RENNER (LREN3) devido à valorização da política de gestão da empresa, fazendo que mesmo em momentos de crise, possa gerar um lucro significativo. Por fim, as ações da empresa RAIA DROGASIL (RADL3) entraram na carteira, devido à boa rentabilidade no período avaliado e certa segurança de que o setor farmacêutico tende a resistir frente às crises econômicas, devido à demanda de seus produtos por grande parte da população durante todo o ano.

Tem-se que no total, dez ativos foram selecionados: AMBEV (ABEV3), CIELO (CIEL3), COSAN (CSAN3), EMBRAER (EMBR3), ITAÚ (ITUB4), PETROBRÁS (PETR4), VALE (VALE5), WALT DISNEY (DISB34), LOJAS RENNER (LREN3) e RAIA DROGASIL (RADL3).

É interessante notar que cada um desses dez ativos escolhidos é de um setor da economia diferente. Desta forma, ao selecioná-los, está sendo feita a diversificação, visto que se um deles sofre um prejuízo devido alguma característica própria do setor econômico ao qual pertence, os demais não sofrerá. De forma geral, tem-se que a AMBEV pertence ao setor das indústrias de bebidas, a CIELO à indústria de serviços financeiros ao consumidor, a COSAN à indústria do comércio varejista especializada, a EMBRAER à indústria de transporte espacial e aéreo, o ITAÚ à indústria dos bancos regionais, a PETROBRÁS à indústria de extração de petróleo e gás natural, a VALE à indústria de extração de minerais metálicos, a WALT DISNEY à indústria de atividades de rádio e de televisão a cabo, as

LOJAS RENNER à indústria de comércio varejista de artigos do vestuário e a RAIA DROGASIL à indústria de comércio varejista de medicamentos [10].

Como o objetivo é formar uma carteira com cinco ativos para ser otimizada, um estudo estatístico deve ser realizado sobre os dez ativos descritos anteriormente a fim de selecionar os cinco melhores do ponto de vista da relação risco-retorno, como mostra a próxima seção.

10. 1 Formação da Carteira de Investimento

Selecionados os dez ativos, suas rentabilidades mensais durante o ano de 2015, bem como a média anual dessas rentabilidades mensais devem ser levantadas, pois todo o estudo estatístico presente na Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz dependerá delas. Essas informações estão organizadas nas tabelas a seguir, de forma a facilitar a compreensão dos valores trabalhados. Os cálculos estatísticos desta seção foram realizados com o auxílio do *software* Excel [11].

Tabela 1 - Rendimento Percentual Mensal dos Ativos ao Longo do Ano de 2015

Mês	ABEV3	CIEL3	CSAN3	EMBR3	ITUB4	PETR4	VALE5	DISB34	LREN3	RADL3
jan/15	9,29%	-3,99%	-15,00%	-2,84%	-4,88%	-18,36%	-13,97%	-1,28%	-7,81%	1,97%
fev/15	4,05%	11,75%	15,35%	4,88%	13,76%	16,99%	11,85%	20,33%	19,28%	10,60%
mar/15	1,07%	3,36%	-1,42%	-1,25%	-3,23%	1,67%	-16,54%	12,62%	8,21%	0,87%
abr/15	2,68%	10,14%	5,78%	-4,18%	9,16%	34,12%	18,94%	-3,16%	16,86%	19,41%
mai/15	-2,88%	-4,62%	-13,81%	1,54%	-10,85%	-5,52%	-7,68%	7,05%	1,94%	4,15%
jun/15	4,42%	9,54%	-0,04%	-0,67%	-0,30%	3,08%	-7,03%	2,11%	5,75%	12,85%
jul/15	1,87%	-0,20%	-17,32%	1,02%	-3,25%	-17,39%	-5,92%	15,58%	-3,64%	8,56%
ago/15	-1,89%	-12,30%	-12,72%	-3,69%	-10,58%	-12,48%	-3,43%	-10,04%	-9,51%	-8,75%
set/15	2,47%	-3,69%	13,07%	10,94%	-0,09%	-21,22%	-5,87%	7,77%	-5,46%	-1,21%
out/15	-1,67%	-0,12%	22,76%	10,92%	-0,09%	6,49%	7,92%	11,16%	0,54%	2,28%
nov/15	-2,34%	-4,08%	-2,46%	7,51%	5,03%	-0,52%	-24,23%	0,34%	-5,42%	-0,85%
dez/15	-3,43%	-4,34%	4,53%	-0,56%	-4,50%	-12,65%	-3,57%	-3,93%	-2,01%	-10,22%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/brazil>. Acesso em: set. 2017.

Tabela 2 - Rendimento Percentual Médio dos Ativos no Ano de 2015

Ano	ABEV3	CIEL3	CSAN3	EMBR3	ITUB4	PETR4	VALE5	DISB34	LREN3	RADL3
2015	1,1367%	0,1208%	-0,1067%	1,9683%	-0,8183%	-2,1492%	-4,1275%	4,8792%	1,5608%	3,3050%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/brazil>. Acesso em: set. 2017.

Com os dados da Tabela 1, é possível construir a Tabela 3, que mostra o valor da correlação entre cada um dos dez ativos e, construir a Tabela 4, que mostra o valor das variâncias e covariâncias entre cada um desses dez ativos. Essas tabelas encontram-se a seguir.

Tabela 3 - Correlação entre os Ativos

	ABEV3	CIEL3	CSAN3	EMBR3	ITUB4	PETR4	VALE5	DISB34	LREN3	RADL3
ABEV3	1									
CIEL3	0,4428	1								
CSAN3	-0,0852	0,4392	1							
EMBR3	-0,2305	-0,0442	0,6190	1						
ITUB4	0,2976	0,7577	0,6181	0,2868	1					
PETR4	0,0338	0,7521	0,4649	-0,1036	0,7019	1				
VALE5	0,0701	0,5000	0,5294	-0,0303	0,4654	0,6343	1			
DISB34	0,1583	0,4724	0,3084	0,4855	0,3594	0,1162	0,1277	1		
LREN3	0,1920	0,8957	0,4510	-0,1164	0,6921	0,8632	0,6202	0,4261	1	
RADL3	0,4973	0,8372	0,1186	-0,1271	0,5838	0,6814	0,4856	0,3558	0,7145	1

Tabela 4 - Variância e Covariância entre os Ativos

	ABEV3	CIEL3	CSAN3	EMBR3	ITUB4	PETR4	VALE5	DISB34	LREN3	RADL3
ABEV3	0,0013									
CIEL3	0,0011	0,0048								
CSAN3	-0,0004	0,0038	0,0155							
EMBR3	-0,0004	-0,0002	0,0040	0,0026						
ITUB4	0,0008	0,0037	0,0054	0,0010	0,0049					
PETR4	0,0002	0,0081	0,0090	-0,0008	0,0076	0,0241				
VALE5	0,0003	0,0040	0,0077	-0,0002	0,0038	0,0114	0,0135			
DISB34	0,0005	0,0028	0,0033	0,0022	0,0022	0,0016	0,0013	0,0075		
LREN3	0,0006	0,0056	0,0050	-0,0005	0,0043	0,0120	0,0064	0,0033	0,0080	
RADL3	0,0015	0,0048	0,0012	-0,0005	0,0033	0,0087	0,0046	0,0025	0,0052	0,0067

As células mais escuras na Tabela 4 representam a variância entre os ativos que correspondem, as demais células representam a covariância entre os ativos ao qual estão associadas, visto que para variáveis iguais calcula-se a variância entre elas e para variáveis diferentes, calcula-se a covariância entre ambas.

É importante mencionar que tanto a Tabela 3, quanto a Tabela 4, encontra-se na forma triangular apenas para a facilitação da leitura das informações, pois na verdade são representações de matrizes simétricas.

Para formar uma carteira de investimento com cinco ativos entre os dez selecionados anteriormente, deverão ser escolhidos os cinco melhores ativos do ponto de vista da relação risco-retorno.

No capítulo 8, falou-se sobre a correlação entre ativos, que quanto mais próxima for do valor de -1, menor serão os seus riscos. Desta forma, além da diversificação, através da seleção de ativos de setores econômicos diferentes, diminuir o risco da carteira, ao escolher os cinco ativos que possuem as menores correlações, o risco do portfólio será ainda mais minimizado.

A seguir, na Tabela 5, há a marcação de todos os valores de correlações negativas, bem como os dos cinco ativos selecionados que têm os menores valores de correlação.

Tabela 5 - Correlação entre os Cinco Melhores Ativos para a Formação da Carteira

	ABEV3	CIEL3	CSAN3	EMBR3	ITUB4	PETR4	VALE5	DISB34	LREN3	RADL3
ABEV3	1									
CIEL3	0,4428	1								
CSAN3	**-0,0852**	0,4392	1							
EMBR3	**-0,2305**	**-0,0442**	0,6190	1						
ITUB4	0,2976	0,7577	0,6181	0,2868	1					
PETR4	0,0338	0,7521	0,4649	**-0,1036**	0,7019	1				
VALE5	0,0701	0,5000	0,5294	**-0,0303**	0,4654	0,6343	1			
DISB34	0,1583	0,4724	0,3084	0,4855	0,3594	0,1162	0,1277	1		
LREN3	0,1920	0,8957	0,4510	**-0,1164**	0,6921	0,8632	0,6202	0,4261	1	
RADL3	0,4973	0,8372	0,1186	**-0,1271**	0,5838	0,6814	0,4856	0,3558	0,7145	1

Nota-se então, através da tabela anterior, que os cinco ativos selecionados por terem os menores valores de correlação entre todos os dez são: AMBEV (ABEV3), EMBRAER

(EMBR3), PETROBRÁS (PETR4), LOJAS RENNER (LREN3) e RAIA DROGASIL (RADL3).

Logo, a carteira formada a ser otimizada é a carteira composta pelos cinco ativos descritos anteriormente e, na próxima seção será mostrado como foi feita a modelagem desta carteira em um problema de Programação Linear, para que pudesse ser otimizada através do Método Simplex.

Para tanto, é importante que seja conhecido o risco individual de cada um desses cinco ativos, dado pelo coeficiente de variação. A variância de cada um deles é proveniente da Tabela 4. O Desvio padrão é calculado como a raiz quadrada positiva da variância, como mostrado no capítulo 7. A média de retorno é originada da Tabela 2 e o coeficiente de variação é estabelecido como mostrado também no capítulo 7.

A seguir encontram-se cinco tabelas, cada uma indicando o cálculo do risco individual de cada um dos cinco ativos, representado pelo coeficiente de variação.

Tabela 6 - Risco do Ativo ABEV3

Variância	0,0013
Desv. P.	0,0361
Média	1,1367%
Coef. Var.	317,7633%

Tabela 7 - Risco do Ativo EMBR3

Variância	0,0026
Desv. P.	0,0514
Média	1,9683%
Coef. Var.	261,3483%

Tabela 8 - Risco do Ativo PETR4

Variância	0,0241
Desv. P.	0,1551
Média	-2,1492%
Coef. Var.	-721,8370%

Tabela 9 - Risco do Ativo LREN3

Variância	0,0080
Desv. P.	0,0894
Média	1,5608%
Coef. Var.	572,8119%

Tabela 10 - Risco do Ativo RADL3

Variância	0,0067
Desv. P.	0,0820
Média	3,3050%
Coef. Var.	248,0788%

10. 2 Modelagem da Carteira de Investimento em Problema de Programação Linear

O problema a ser otimizado consistia em formar uma carteira composta por cinco ativos diferentes, selecionados através de análises estatísticas, dentre dez ativos. Logo, tem-se que

$$n = 5,$$

sendo n o número de ativos da carteira.

Considerando, então, que os ativos selecionados ABEV3, EMBR3, PETR4, LREN3 e RADL3 têm um retorno individual médio anual de R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5, respectivamente, dado pelos valores da Tabela 2, então o retorno total da carteira (R_p) é dado por

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3 + w_4R_4 + w_5R_5,$$

onde

w_1: é o peso do ativo ABEV3 na composição da carteira

w_2: é o peso do ativo EMBR3 na composição da carteira

w_3: é o peso do ativo PETR4 na composição da carteira

w_4: é o peso do ativo LREN3 na composição da carteira

w_5: é o peso do ativo RADL3 na composição da carteira,

pois o retorno de uma carteira é a combinação ponderada dos retornos dos ativos, como visto no capítulo 8.

Desta forma, tem-se que:

$$R_p = 0{,}011367w_1 + 0{,}019683w_2 - 0{,}021492w_3 + 0{,}015608w_4 + 0{,}033050w_5.$$

O problema busca a maximização do retorno, de modo que a função objetivo a ser maximizada será então dada por:

$$f: 0{,}011367w_1 + 0{,}019683w_2 - 0{,}021492w_3 + 0{,}015608w_4 + 0{,}033050w_5.$$

Logo, as variáveis de decisão do problema de Programação Linear serão os pesos (w_i, $i = 1, 2, 3, 4\ e\ 5$) dos retornos individuais (R_i) de cada ativo, que ao serem otimizados através do Método Simplex, o retorno total da carteira será maximizado.

Em seguida, deve-se estabelecer as restrições do problema.

1) A primeira delas é composta pelas restrições de não negatividade, em que as variáveis de decisão, dadas pelos pesos, devem sempre ter um valor nulo ou positivo. De forma que:

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0 \text{ e } w_5 \geq 0.$$

2) A segunda é que a soma dos pesos deve ser igual a 1:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1.$$

Estas são as restrições essenciais para que o problema seja resolvido.

Montando um problema de Programação Linear com a função objetivo dada pelo retorno e com as duas restrições anteriores, ele teria a seguinte configuração:

Maximizar $f(w) = 0{,}011367w_1 + 0{,}019683w_2 - 0{,}021492w_3 + 0{,}015608w_4 + 0{,}033050w_5$

Sujeito a $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1$

e $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$ e $w_5 \geq 0.$

A resolução deste problema através da aplicação do Método Simplex com o uso do *software* MATLAB [12] e da linha de comando Linprog, seria

$$w_5 = 1 \text{ ou } w_5 = 100\%.$$

e a função objetivo otimizada valeria

$$f = 0{,}033050 \text{ ou } f = 3{,}3050\%.$$

Esses números sugerem que todo o capital deve ser investido no ativo RADL3. Isso se deve ao fato de que, individualmente, este ativo foi o que apresentou o menor risco absoluto (dado por 248,0788%) e maior rendimento (dado por 3,3050%) entre os cinco ativos selecionados, como pode ser observado nas Tabelas 6 a 10.

Entretanto, por mais seguro e rentável que um ativo seja do ponto de vista matemático, investir todo o capital nele, também é altamente arriscado, visto que não está ocorrendo a diversificação dos investimentos. A empresa RAIA DROGASIL, detentora do ativo RADL3 pode sofrer algum infortúnio e culminar com um enorme prejuízo para o investidor que depositou todo o seu capital nesta aplicação.

A fim de que o capital seja mais bem distribuído entre os ativos, outras restrições podem formar o problema. Contudo, sabe-se que é praticamente impossível modelá-lo perfeitamente, pois muitas características não permitem esse trabalho e, caso seja possível, muitas vezes o próprio problema deixa de ser factível.

Por exemplo, ao investir em uma carteira de ações, formada por ativos escolhidos pelo investidor, este deve contratar uma corretora, para que sua carteira seja negociada na BOVESPA. Entretanto, as taxas de corretagem e custódia costumam variar de uma corretora para outra, levando em conta até mesmo o valor que está sendo investido. Deste modo, essa é uma característica difícil de modelar, visto que depende de fatores individuais de cada investidor e de cada corretora.

Outra propriedade difícil de transformar em equação é a quantidade de impostos a pagar pelo investimento, visto que as taxas variam de acordo com o montante a ser investido e até mesmo em conformidade com o quanto foi vendido das ações no dia ou no mês.

Enfim, alguns quesitos inerentes ao problema são difíceis de modelar, porém, outros são possíveis e podem ser modelados de acordo com o perfil do investidor, auxiliando no objetivo proposto, seja ele de maximização ou minimização da função objetivo.

Neste trabalho, o problema trata-se de um investidor de perfil moderado que, sempre que pode, busca minimizar o risco de seu investimento. Por esse motivo, o retorno é maximizado e o risco é minimizado durante todo o processo da formação da carteira e modelagem do problema.

Por esta razão, as restrições foram elaboradas pelo critério de tentar minimizar cada vez mais o risco da carteira. É importante ressaltar que elas podem variar de investidor para investidor, impondo limites diferentes aos ativos, de acordo com o perfil e pretensões requeridas.

Como dito anteriormente, observando as Tabelas de 6 a 10, percebe-se que o ativo RADL3 era, individualmente, o mais seguro e rentável. Uma das formas de limitar sua participação na carteira pelos motivos já citados seria considerar

$$w_5 \leq 0{,}4.$$

Limitar o ativo RADL3 ao máximo de 40% na composição da carteira é interessante pelo fato que permite que um bom ativo como ele tenha uma participação significativa, porém permitindo a diversificação da carteira.

Outro fator que garante a diversificação da carteira é a participação de todos os ativos, estipulando, obrigatoriamente, um valor mínimo que cada um deles deve ter na composição do portfólio. Escolheu-se supor que cada um tenha uma participação de pelo menos 3% da carteira, então:

$$w_1 \geq 0{,}03,\ w_2 \geq 0{,}03,\ w_3 \geq 0{,}03,\ w_4 \geq 0{,}03 \text{ e } w_5 \geq 0{,}03.$$

Entretanto, observando as Tabelas 6 a 10, é notável que o ativo PETR4 foi o único que proporcionou um prejuízo, indicado pelo retorno médio negativo correspondente a -2,1492%. Além disso, foi também o ativo de maior risco absoluto, dado por 721,8370%. Deste modo, para minimizar o risco total da carteira, a participação do ativo PETR4 foi limitada superiormente de forma que deveria representar menos que 5% da composição da carteira. Portanto,

$$w_3 \leq 0{,}05.$$

Observando a Tabela 5, percebe-se que a maior correlação entre os cinco ativos selecionados para a formação do portfólio corresponde ao valor de -0,1036, que correlaciona o ativo EMBR3 e PETR4. Por ser o maior valor de correlação, é o que representa o maior risco para a carteira, logo tanto EMBR3 quanto PETR4 devem ser limitados de forma a minimizar o risco do portfólio. Além disso, observando as Tabelas 6 a 10, percebe-se que o ativo PETR4 foi o único ativo que rendeu negativamente, gerando prejuízo para o investidor no ano de 2015, e foi o ativo que teve o maior risco individual absoluto entre os cinco ativos da carteira, como dito anteriormente. Já a EMBR3 foi o segundo melhor ativo, tanto do ponto de vista risco (dado por 261,3483%), quanto retorno (dado por 1,9683%), analisado individualmente.

Portanto, parece interessante estipular um valor para a soma dos pesos de EMBR3 e PETR4 que os limitem, mas sem restringir que um bom ativo como EMBR3 possa ter uma composição interessante na carteira. Escolheu-se, então, que os ativos de EMBR3 e PETR4 deveriam representar no máximo 30% da composição do portfólio, como representado a seguir:

$$w_2 + w_3 \leq 0{,}3.$$

De maneira análoga, observando a Tabela 5, nota-se que a menor correlação entre os cinco ativos selecionados corresponde ao valor de -0,2305, que correlaciona os ativos ABEV3 e EMBR3. Por ser o menor valor de correlação, é o que representa o menor risco para a carteira, logo tanto ABEV3 quanto EMBR3 devem ter seus pesos ser valorizados, resultando na minimização do risco do portfólio. Uma dessas formas seria estipular um valor mínimo para a soma dos pesos de ABEV3 e EMBR3 na composição da carteira. Escolheu-se,

$$w_1 + w_2 \geq 0{,}4,$$

pois se os ativos fossem igualmente ponderados no portfólio, cada um teria uma participação de 20%. Logo, é interessante considerar que a soma de dois dos melhores ativos seja maior que 40%.

10.3 Problema de Programação Linear a Ser Otimizado

Com todas essas restrições definidas na seção anterior, formou-se então, o problema de Programação Linear a ser resolvido através do Método Simplex, descrito a seguir:

Maximizar $f(w) = 0{,}011367w_1 + 0{,}019683w_2 - 0{,}021492w_3 + 0{,}015608w_4 + 0{,}033050w_5$

Sujeito a $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1.$

$w_5 \leq 0{,}4$

$w_1 \geq 0{,}03$

$w_2 \geq 0{,}03$

$w_3 \geq 0{,}03$

$w_4 \geq 0{,}03$

$w_5 \geq 0{,}03$

$w_3 \leq 0{,}05$

$w_2 + w_3 \leq 0{,}3$

$w_1 + w_2 \geq 0{,}4$

e $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$, $w_4 \geq 0$ e $w_5 \geq 0$.

10.4 Otimização do Problema e Análise dos Resultados

Utilizando o software MATLAB [12], sob a linha de comando Linprog, para resolver o problema dado na seção anterior pelo Método Simplex, a otimização gera os seguintes resultados:

$$f(w) = 0{,}02202072 \text{ ou } f(w) = 2{,}202072\%$$

$$w_1 = 0{,}1300 \text{ ou } w_1 = 13{,}00\%$$

$$w_2 = 0{,}2700 \text{ ou } w_2 = 27{,}00\%$$

$$w_3 = 0{,}0300 \text{ ou } w_3 = 3{,}00\%$$

$$w_4 = 0{,}1700 \text{ ou } w_4 = 17{,}00\%$$

$$w_5 = 0{,}4000 \text{ ou } w_5 = 40{,}00\%.$$

Observando os resultados anteriores e as Tabelas 6 a 10, algumas considerações podem ser feitas.

É interessante notar que o ativo RADL3, dado como o mais rentável e seguro, individualmente, entre os cinco ativos, foi o que teve maior participação na carteira, correspondendo a 40% da mesma.

O segundo ativo mais bem avaliado em termos de risco e retorno, EMBR3, foi o segundo maior em termos de participação no portfólio, representando 27% da composição do mesmo.

O ativo com maior risco e menor retorno, PETR4, foi o que teve menor participação na carteira, correspondendo a 3% da mesma. O que colaborou para isto foi o fato de estar limitado inferiormente e superiormente a valores baixos, devido ao seu alto risco.

E entre os ativos ABEV3 e LREN3, a otimização selecionou maior participação para LREN3, que possui maior risco que ABEV3, mas possui também maior retorno. Como o problema trata-se de maximização do retorno, é provável que esta seja a causa. Desta forma, os resultados indicaram que ABEV3 deve corresponder a 13% da composição da carteira e, LREN3 a 17%.

Além disso, através da otimização, maximizando o retorno total da carteira, tem-se que este foi dado em 2,202072% ao final de 2015.

Para calcular o risco da carteira no MATLAB [12], um problema deverá ser formado, em que a função objetivo será

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j s_{ij}$$

como dada no capítulo 8 e, as restrições deverão ser as mesmas do problema que foi otimizado. Porém, não é possível resolver esse novo problema através do Método Simplex, pois a função objetivo não é linear. Ele deverá ser resolvido através da Programação Quadrática, assunto que não é tema deste trabalho. Portanto, o risco foi calculado através do Solver do Excel [11], selecionando a resolução através da Programação Linear e do Método Simplex.

O Excel ofereceu os mesmos valores para os pesos dos ativos na composição da carteira que o MATLAB. Entretanto, a função objetivo teve uma pequena variação e foi dada com o valor total de 2,202083%. O risco da carteira foi definido em 229,7307%, o que representa um risco bastante grande.

A otimização realizada com os dados do ano de 2015, produziu um resultado dentro do esperado, visto que os especialistas sugeriam não investir em ações e sim em renda fixa, como apresentado no capítulo anterior. A renda fixa poupança, por exemplo, rende cerca de 6% ano. Desta forma, não seria tão vantajoso investir numa carteira de ações num momento de crise política e econômica como 2015. Entretanto, no geral, o investimento em carteira de ações é de alto risco, gerando a dúvida de que se caso uma carteira composta pelos cinco ativos aqui trabalhados e seus respectivos pesos, encontrados após a otimização, fosse formada no início de 2016, será que ao final deste ano o retorno seria semelhante? Essa é uma questão interessante que será respondida na próxima seção.

10.5 Eficiência Prática dos Resultados Obtidos

Para analisar a eficiência dos resultados obtidos na seção anterior, deve-se calcular o retorno total da carteira (R_p) ao final do ano de 2016, formada pelos cinco ativos utilizados no presente trabalho: AMBEV (ABEV3), EMBRAER (EMBR3), PETROBRÁS (PETR4), LOJAS RENNER (LREN3) e RAIA DROGASIL (RADL3), com suas respectivas importâncias (pesos) na composição da carteira encontradas após a otimização do problema, dadas por:

$$w_1 = 0{,}1300$$
$$w_2 = 0{,}2700$$
$$w_3 = 0{,}0300$$
$$w_4 = 0{,}1700$$
$$w_5 = 0{,}4000.$$

Para tanto, foi necessária uma nova coleta de dados, mais especificamente, a coleta das rentabilidades mensais dos cinco ativos durante o ano de 2016 e a média anual dessas rentabilidades mensais. Essas informações estão organizadas nas tabelas a seguir, de forma a facilitar a compreensão dos valores trabalhados.

Tabela 11 - Rendimento Percentual Mensal dos Ativos ao Longo do Ano de 2016

Mês	ABEV3	EMBR3	PETR4	LREN3	RADL3
jan/16	4,51%	-4,90%	-27,76%	3,74%	16,58%
fev/16	-4,80%	5,02%	6,20%	1,47%	10,92%
mar/16	6,69%	-21,06%	62,45%	15,50%	13,50%
abr/16	3,03%	-13,78%	22,51%	-0,10%	5,44%
mai/16	-1,44%	-8,58%	-21,41%	0,63%	4,91%
jun/16	-0,31%	-6,82%	17,16%	13,35%	9,37%
jul/16	-1,31%	-15,27%	26,01%	15,07%	4,97%
ago/16	2,07%	-3,38%	8,26%	-5,98%	-9,95%
set/16	3,28%	-2,10%	5,60%	-4,53%	11,02%
out/16	-4,99%	22,41%	30,36%	10,34%	6,91%
nov/16	-8,92%	-3,38%	-9,55%	-16,74%	-9,00%
dez/16	-4,37%	-3,62%	-7,06%	3,07%	-5,12%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/brazil>. Acesso em: set. 2017.

Tabela 12 - Rendimento Percentual Médio dos Ativos no Ano de 2016

Ano	ABEV3	EMBR3	PETR4	LREN3	RADL3
2016	-0,5467%	-4,6217%	9,3975%	2,9850%	4,9625%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/brazil>. Acesso em: set. 2017.

Analisando a Tabela 12, percebe-se que o rendimento médio anual individual de cada ativo (R_i, $1 \leq i \leq 5$) em 2016, correspondeu a:

$$R_1 = -0{,}005467$$
$$R_2 = -0{,}046217$$
$$R_3 = 0{,}093975$$
$$R_4 = 0{,}029850$$
$$R_5 = 0{,}049625.$$

Desta forma, o retorno da carteira é calculado por

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3 + w_4R_4 + w_5R_5,$$

como mostrado na seção 10.2. Logo,

$$R_p = 1{,}455458\%.$$

Isso significa que utilizando os pesos calculados com os valores dos rendimentos mensais de 2015, uma carteira formada no início de 2016, geraria ao final deste ano um rendimento de 1,455458%. É um rendimento inferior ao esperado pela otimização, que foi de 2,202072%. Entretanto, representa um rendimento positivo e não um prejuízo.

Para analisar se houve alteração com o risco da carteira, a tabela de variância e covariância entre os cinco ativos trabalhados, representada a seguir, é bastante utilizada.

Tabela 13 – Variância e Covariância entre os Ativos

	ABEV3	EMBR3	PETR4	LREN3	RADL3
ABEV3	0,0020				
EMBR3	-0,0025	0,0110			
PETR4	0,0032	-0,0047	0,0562		
LREN3	0,0014	-0,0016	0,0127	0,0084	
RADL3	0,0019	-0,0007	0,0042	0,0044	0,0069

O Excel [11] calculou, novamente através do Solver, um risco de 363,5192% para esta nova carteira, um valor bastante elevado e maior que o da carteira formada com dados do ano de 2015, onde o risco foi definido em 229,7307%.

Por tudo o que foi exposto até aqui, é possível chegar à conclusão de que o retorno foi menor que o esperado e o risco foi maior que o desejado. Isso se deve ao fato de que o investimento em ações é de alto risco, podendo sofrer alterações imensas de um ano para o outro, sem contar a crise política e econômica enfrentado pelo Brasil nos anos de 2015 e 2016. Além disso, o retorno obtido foi bem menor que a poupança que rende cerca de 6%

ano. Pode-se perceber que no ano de 2015 e 2016 era mais vantajoso investir em renda fixa, como os especialistas da área da Economia sugeriram, assim como apresentado na seção 9.1.

11 CONCLUSÕES

Formar uma carteira de investimento composta por ações negociadas na BOVESPA, à primeira vista parece uma ideia muito convidativa. Os altos retornos mensais muitas vezes camuflam entre si riscos menores. Riscos que, na prática, podem representar um prejuízo maior que o lucro obtido com uma taxa de retorno mais alta.

Investir o capital no mercado de ações é um investimento de altíssimo risco, pois nunca é possível ter certeza de como o mercado reagirá a infortúnios como um desastre ambiental. Por exemplo, como o que ocorreu em Mariana-MG, em novembro de 2015, provocado pela Samarco, empresa também controlada pela VALE, cujo ativo foi analisado neste trabalho.

Desta forma, um ativo que é rentável e seguro em um ano, no outro pode não ser e vice versa, devido a inúmeros fatores. Por exemplo, de acordo com a Tabela 1 (com dados de 2015), o ativo PETR4 teve rendimentos mensais significativamente baixos, gerando grande prejuízo, porém de acordo com a Tabela 11 (com dados de 2016), observa-se que teve rendimentos mensais significativamente altos, o que propiciou um alto lucro.

Com os dados do ano de 2015, viu-se na Tabela 5, que os ativos mais seguros para formar uma carteira de investimento composta por cinco ativos eram: AMBEV (ABEV3), EMBRAER (EMBR3), PETROBRÁS (PETR4), LOJAS RENNER (LREN3) e RAIA DROGASIL (RADL3). Entretanto, ao observar os valores das correlações entre os dez ativos dos quais os cinco anteriores foram selecionados, é possível ver que em 2016 houve uma mudança neste cenário.

Nota-se que os investimentos mais seguros em 2016 (os que apresentaram correlações entre si mais próximas de -1) foram: AMBEV (ABEV3), CIELO (CIEL3), EMBRAER (EMBR3), WALT DISNEY (DISB34), LOJAS RENNER (LREN3) e RAIA DROGASIL (RADL3). O que geraria outra carteira de investimento, com outra modelagem.

Além disso, a seção 10.5 mostrou que os valores otimizados baseados nos dados de 2015, obtiveram um resultado positivo, porém menor que a renda fixa poupança, por exemplo, sugerindo que este período talvez não fosse o mais vantajoso para investir numa carteira de ações, assim como afirmavam os especialistas.

Todavia, deve-se levar em conta, como dito já anteriormente, que não é possível construir um modelo de carteira ótima, pois cada uma delas é formada para um tipo de perfil de investidor específico. Desta forma, observa-se que a formação de um portfólio, bem como sua modelagem, é algo extremamente subjetivo.

Por fim, investir em uma carteira ações pode ser vantajoso para aqueles que têm a perspicácia de saber dar os passos certos. Todo o estudo matemático presente neste trabalho serve para que este fim seja alcançado. A Matemática não garante na prática a rentabilidade dada em seus resultados, porém direciona o investidor para o horizonte que almeja, minimizando possíveis resultados indesejáveis ou catastróficos.

REFERÊNCIAS

[1] BM&FBOVESPA. *Como investir em ações*. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/como-investir/como-investir-em-acoes/>. Acesso em: jul. 2017.

[2] SOARES, V. C. A. S. *Aplicações do problema de otimização de carteiras de investimento*. 2011. 72 f. Dissertação de Mestrado - IMECC, UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2011.

[3] ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J.; WILLIAMS, T. A. *Estatística aplicada à administração e economia*. 2. Ed. São Paulo: Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda., 2008.

[4] NOBELPRIZE.ORG.*Harry M. Markowitz - Biographica*l. *Nobelprize.org*. Disponível em: <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1990/markowitz-bio.html>. Acesso em: jul. 2016.

[5] SOARES, V. C. A. S. *Aplicações do Problema de Otimização de Carteiras de Investimento*. 2011. 72 f. Dissertação de Mestrado - IMECC, UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2011.

[6] GOLÇALVES JUNIOR, C.; MONTEVECHI, J. A. B.; PAMPLONA, E.O. *Seleção de carteiras através do modelo de Markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)*. In: SIMPEP, 9., 2002, Bauru. Anais... Bauru: SIMPEP, 2002, p. 1-10. Disponível em: <http://www.rodrigofernandez.com.br/ecomp/ref/excel_markowitz.pdf>. Acesso em: dez. 2015.

[7] TARSO, E.; ZIN, R. A.. *Como o Pequeno Investidor Pode Usar as Teorias de Graham e Markowitz*. Reavi., Vale do Itajaí, v. 4, n. 6, p. 28-41, mai. 2016.

[8] SILVA, A. C. D. *O modelo de Harry Markowitz aplicado à dívida pública*. 1996, 22 p. Monografia vencedora em 1º lugar no Prêmio STN de Monografia. Brasília : ESAF, 1996.

[9] VALLE, P. O ano da renda fixa. *Exame*, São Paulo, Edição 1104, Ano 49, n. 24, p. 46-49, dez. 2015.

[10] INVESTING. *Dados Históricos*. Disponível em: <https://br.investing.com/equities/brazil>. Acesso em: set. 2017.

[11] EXCEL. Versão 2010. EUA: Microsoft, 2010.

[12] MATLAB. Versão 2016.

[13] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 736 p.

[14] ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R., YANASSE, H. *Pesquisa operacional*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 524 p.

[15] LUENBERGER, D. G; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. 3. ed. Nova Iorque: Springer, 2008. 546 p.

[16] BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear programming and network flows*. 2. ed. Canadá: Wiley, 1952. 684 p.

APÊNDICE A

No intuito de facilitar a compreensão do leitor acerca do trabalho de pesquisa realizado até aqui, apresenta-se neste apêndice uma síntese da álgebra associada às matrizes e sua utilização no processo de resolução de problemas envolvendo sistemas lineares e da pesquisa operacional de modo geral.

A intenção é facilitar o entendimento dos leitores que pouco conhecem desse assunto ou que o estudaram a um tempo suficiente para que alguns detalhes devam ser relembrados.

Inicialmente, recorda-se que é possível multiplicar duas matrizes A e B se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Definição A.1 Seja A uma matriz $n \times m$ e B uma matriz $m \times p$. A *matriz produto* de A e B, indicada por AB, é uma matriz C, da forma $n \times p$, cujas entradas c_{ij} são

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$ [13]. ■

Exemplo A.1 Seja [13]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2(3) + 1(-1) + 0(6) & 2(2) + 1(1) + 0(4) \\ -1(3) + 3(-1) + 2(6) & -1(2) + 3(1) + 2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$ ■

Definição A.2 Seja A e B duas matrizes tal que o produto AB entre elas é possível. Não há garantia de que o produto BA também seja possível e caso seja, de modo geral, $AB \neq BA$. ■

Definição A.3 Uma matriz *quadrada* tem o mesmo número de linhas e colunas. Uma matriz *diagonal* é uma matriz quadrada $D = (d_{ij})$, com $\left(d_{ij}\right) = 0$ sempre que $i \neq j$. A *matriz identidade de ordem* n, $I_n = (\delta ij)$, é uma matriz diagonal com entradas

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j, \\ 0, se\ i \neq j. \end{cases}$$

Quando o tamanho de $I_n$está claro, essa matriz é geralmente identificada como I [13]. ■

Definição A.4 Uma matriz $n \times n$ *triangular superior* $U = (u_{ij})$ tem, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, as entradas

$$u_{ij} = 0, \text{ para todo } i = j + 1, j + 2, \dots, n;$$

e uma matriz *triangular inferior* $L = (l_{ij})$ tem, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, as entradas

$$l_{ij} = 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, j - 1 \text{ [13].}$$ ■

Definição A.5 A matriz identidade I_n é comutativa com qualquer matriz $A_{n\times n}$. Logo,

$$I_nA = A = AI_n.$$ ■

Definição A.6 Uma matriz $A_{n\times n}$ é chamada *não singular* (ou *invertível*) se existe uma matriz ${A^{-1}}_{n\times n}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A matriz A^{-1} é chamada *inversa* da matriz A. Uma matriz sem inversa é chamada *singular* (ou *não invertível*) [13]. ■

Um método para calcular a inversa de uma matriz $A_{n\times n}$ consiste em formar uma matriz estendida colocando a matriz I_n à direita de A, da seguinte forma:

$$[A \quad \vdots \quad I].$$

Se através do escalonamento, obtém-se uma matriz identidade à esquerda, então a matriz situada à direita é não singular, sendo o inverso da matriz A, dado por A^{-1}.

$$[I \quad \vdots \quad A^{-1}].$$

Se o inverso (A^{-1}) da matriz $A_{n\times n}$ for definido, pode-se resolver um sistema linear na forma $Ax = b$ da seguinte forma:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$
$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$
$$I_n x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b,$$

sendo $x = A^{-1}b$ a solução única do sistema. É importante ressaltar que ao calcular diretamente x na busca pela resolução, em geral não é o método mais eficiente.

Apesar de esta ser uma maneira relativamente fácil de resolver um sistema linear na forma $Ax = b$ com A^{-1} conhecido, este não é o método mais vantajoso computacionalmente, visto que para a determinação de A^{-1}, da maneira descrita anteriormente, é dispensado um elevado custo.

Teorema A.1 Para toda matriz $A_{n\times n}$ não singular [13]:

a. A^{-1} é única.

b. A^{-1} é não singular e $(A^{-1})^{-1} = A$.

c. Se B também é uma matriz não singular $n \times n$, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$ ■

Definição A.7 A *transposta* de uma matriz $A_{n\times m}$, $A = (a_{ij})$, é a matriz ${A^t}_{m\times n}$, onde para cada i, a i-ésima coluna de A^t é igual a i-ésima linha de A, isto é, $A^t = (a_{ji})$. Uma matriz quadrada é chamada de *simétrica* se $A = A^t$ [13]. ■

Teorema A.2 As seguintes operações envolvendo a transposta de uma matriz são válidas sempre que a operação é possível [13]:

a. $(A^t)^t = A$,

b. $(A+B)^t = A^t + B^t$,

c. $(AB)^t = B^t A^t$,

d. Se A^{-1} existe, então $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$. ■

O *determinante* de uma matriz oferece resultados de existência e unicidade para sistemas lineares que possuem o mesmo número de equações e incógnitas. Desta forma, supondo que uma matriz denotada por A, seja quadrada, seu determinante é definido como $\det A$ ou $|A|$.

Definição A.8

a. Se $A = [a]$ é uma matriz 1×1, então $\det A = a$.

b. Se A é uma matriz $n \times n$, o *menor* M_{ij} é o determinante da submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz A.

c. O *cofator* A_{ij} associado com M_{ij} é definido por $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

d. O *determinante* de uma matriz $A_{n \times n}$, quando $n > 1$, é dado tanto por

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\,, i = 1, 2, \ldots, n,$$

como por

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\,, j = 1, 2, \ldots, n \text{ [13].}$$ ■

Teorema A.3 Suponha que A seja uma matriz $n \times n$:

a. Se qualquer linha ou coluna de A tem apenas entradas iguais à zero, então $\det A = 0$.

b. Se A tem duas linhas ou colunas iguais, então $\det A = 0$.

c. Se $\tilde{A}$ é obtido de A pela operação $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$, com $i \neq j$, então $\det \tilde{A} = -\det A$.

d. Se $\tilde{A}$ é obtido de A pela operação $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$, então $\det \tilde{A} = \lambda \det A$.

e. Se $\tilde{A}$ é obtido de A pela operação $\left(E_i + \lambda E_j\right) \rightarrow (E_i)$, com $i \neq j$, então $\det \tilde{A} = \det A$.

f. Se B também é uma matriz de $n \times n$, então $\det AB = \det A \det B$.

g. $\det A^t = \det A$.

h. Quando A^{-1} existe, $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

i. A é não singular se, e somente se, $\det A \neq 0$.

j. Se A é uma matriz triangular superior, diagonal ou triangular inferior, então $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ [13]. ■

Teorema A.4 As seguintes afirmações são equivalentes para qualquer matriz $A_{n\times n}$:

a. A equação $Ax = 0$ tem a solução única $x = 0$.

b. O sistema $Ax = b$ tem uma única solução para qualquer vetor b n-dimensional em coluna.

c. A matriz A é não singular; isto é, A^{-1} existe.

d. $\det A \neq 0$.

e. A eliminação de Gauss com intercâmbio de linhas pode ser executada no sistema $Ax = b$ para qualquer vetor b n-dimensional em coluna [13]. ■

A eliminação de Gauss é um método bastante utilizado para resolução de sistemas lineares de forma direta, sendo até mesmo empregado em outros métodos de resolução. Por exemplo, para resolver um sistema da forma $Ax = b$, faz-se o uso da eliminação de Gauss a fim de fatorar a matriz A em outras duas matrizes: L, uma matriz triangular inferior e, U, uma matriz triangular superior, de forma que A corresponda a LU, isto é, $A = LU$.

A vantagem em resolver o sistema linear da forma $Ax = b$ utilizando a fatoração citada anteriormente, encontra-se no custo computacional, que é muito menor se comparado a quando o sistema é resolvido unicamente pela eliminação de Gauss.

Sabendo que a matriz A do sistema linear $Ax = b$ será fatorado de forma que será transformada em

$$LUx = b,$$

inicialmente, deve-se considerar

$$y = Ux$$

e resolver o sistema

$$Ly = b$$

para y. Em seguida, já com o valor de y, é fácil resolver $Ux = y$, encontrando o valor de x, que nada mais é que a resolução do sistema linear $Ax = b$ proposto inicialmente.

O primeiro passo para fatorar uma matriz A em LU é realizar a eliminação de Gauss sem intercâmbio de linhas na matriz A de forma que torne-se uma matriz triangular superior, que é denotada por U. Para tanto, deve-se realizar, para cada $j = 2, 3, \dots, n$ as operações

$$\left(E_j - m_{j,1}E_1\right) \rightarrow \left(E_j\right), \text{ onde } m_{j,1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \text{ [13].}$$

Essas operações transformam o sistema em outro no qual todas as entradas na primeira coluna abaixo da diagonal principal são iguais à zero. Este processo deve ser realizado até que a matriz inicial se transforme em uma matriz triangular superior.

A matriz L será triangular inferior, complementar a U e com todos os elementos da diagonal valendo 1. Os elementos abaixo da diagonal serão os multiplicadores utilizados na eliminação Gaussiana para transformar o sistema linear $Ax = b$ num sistema triangular superior. Desta forma, os valores da primeira coluna serão os multiplicadores da primeira iteração, os valores da segunda coluna serão os multiplicadores da segunda iteração e assim por diante.

Teorema A.5 Se a eliminação de Gauss pode ser executada no sistema linear $Ax = b$ sem intercâmbio de linhas, então a matriz A pode ser fatorada no produto de uma matriz triangular inferior L e uma matriz triangular superior U [13],

$$A = LU,$$

onde $m_{ji} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$,

$$U=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \text{ e } L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n.n-1} & 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo A.2 Considere o sistema linear

$$\begin{gathered} x_1+x_2+3x_4=4, \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=-3, \\ -x_1+2x_2+3x_3-x_4=4. \end{gathered}$$

Ao fazer a eliminação de Gauss a fim de converter o sistema para um sistema triangular superior, num primeiro momento, realizando a sequência de operações $(E_2-2E_1)\to(E_2)$, $(E_3-3E_1)\to(E_3)$, $(E_4-(-1)E_1)\to(E_4)$, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{gathered} x_1+x_2+3x_4=4, \\ -x_2-x_3-5x_4=-7, \\ -4x_2-x_3-7x_4=-15, \\ 3x_2+3x_3+2x_4=8. \end{gathered}$$

Em seguida, através das operações $(E_3-4E_2)\to(E_3)$, $(E_4-(-3)E_2)\to(E_4)$, o sistema torna-se triangular superior, dado a seguir:

$$\begin{gathered} x_1+x_2+3x_4=4, \\ -x_2-x_3-5x_4=-7, \\ 3x_3+13x_4=13, \\ -13x_4=-13. \end{gathered}$$

Os multiplicadores m_{ij} e a matriz triangular superior produzem a fatoração

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU.$$

Essa fatoração permite resolver facilmente qualquer sistema envolvendo a matriz A. Resolvendo

$$Ax = LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

inicialmente introduz-se a substituição $y = Ux$. Então faz-se $Ly = b$, isto é,

$$LUx = Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Esse sistema é resolvido para y por um processo de substituição retroativa simples, gerando os seguintes resultados: $y_1 = 4$, $y_2 = -7$, $y_3 = 13$ e $y_4 = -13$.

Então resolve-se $Ux = y$ para x, o que é a solução do sistema original, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a substituição retroativa simples, obtém-se $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_1 = -1$ [13]. ■

A seguir será tratado sobre duas classes de matrizes (estritamente dominante em diagonal e definida positiva) para as quais a eliminação de Gauss pode ser executada eficazmente sem intercâmbio de linhas [13].

Definição A.9 A matriz $A_{n\times n}$ é chamada de *estritamente dominante em diagonal* quando

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

é válido para cada $i = 1, 2, \dots, n$ [13]. ■

Exemplo A.3 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz não simétrica A é estritamente dominante em diagonal já que $|7| > |2| + |0|$, $|5| > |3| + |-1|$ e $|-6| > |0| + |5|$. A matriz simétrica B não é estritamente dominante em diagonal porque, por exemplo, na primeira linha o valor absoluto do elemento da diagonal é $|6| < |4| + |-3| = 7$. É interessante notar que A^t não é estritamente dominante em diagonal, assim B^t também não é [13]. ■

Teorema A.6 Uma matriz A estritamente dominante em diagonal é não singular. Mais que isso, nesse caso, a eliminação gaussiana pode ser executada em qualquer sistema linear da forma $Ax = b$ para obter sua única solução sem troca de colunas ou linhas, e os cálculos serão estáveis com respeito ao crescimento dos erros de arredondamento [13]. ■

Definição A.10 Uma matriz A é *definida positiva* se ela é simétrica e se $x^t Ax > 0$ para todo vetor n-dimensional $x \neq 0$ [13]. ■

A matriz 1×1 gerada pela operação $x^t Ax$ tem um valor positivo para sua única entrada, já que a operação é executada como se segue [13]:

$$x^t Ax = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \right].$$

Exemplo A.4 A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é definida positiva, para a suposição de que x é qualquer vetor tridimensional de coluna. Então

$$x^t Ax = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 x_3 + 2x_3^2.$$

Rearranjando os termos, tem-se

$$x^t A x = x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

e

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0,$$

a menos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ [13]. ■

Teorema A.7 Se a matriz A é uma matriz definida positiva $n \times n$, então

- **a.** A é não singular;
- **b.** $a_{ii} > 0$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$;
- **c.** $máx_{1 \le k, j \le n} |a_{kj}| \le máx_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$;
- **d.** $(a_{ij})^2 < a_{ii} a_{jj}$, para cada $i \neq j$.

Porém, uma matriz, ainda que satisfaça as condições anteriores, nem sempre é definida positiva [13]. ■

Definição A.11 Uma *submatriz condutora principal* de uma matriz A é uma matriz da forma

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

para todo $1 \le k \le n$ [13]. ■

Teorema A.8 Uma matriz simétrica A é definida positiva se, e somente se, cada uma de suas matrizes condutoras principais tem um determinante positivo [13]. ■

Exemplo A.5 No exemplo 4 utilizou-se a definição para mostrar que a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é definida positiva. Para confirmar esse fato utilizando o Teorema 8, faz-se [13]:

$$\det A_1 = \det[2] = 2 > 0,$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

e

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(4 - 1) + (-2 + 0) = 4 > 0.$$ ■

Teorema A.9 A matriz simétrica A será definida positiva se, e somente se, a eliminação de Gauss sem intercâmbio de linhas puder ser executada no sistema linear $Ax = b$ com todos os elementos pivôs positivos. Mais ainda, nesse caso, os cálculos são estáveis em relação ao crescimento do erro de arredondamento [13]. ■

Corolário A.1 A matriz A será definida positiva se, e somente se, A puder ser fatorada no formato LDL^t, onde L é a triangular inferior com valores 1 em sua diagonal, e D é uma matriz diagonal com entradas diagonais positivas [13]. ■

Corolário A.2 A matriz A será definida positiva se, e somente se, A puder ser fatorada na forma LL^t, onde L é a triangular inferior com entradas diagonais diferentes de zero [13]. ■

Corolário A.3 Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ para a qual a eliminação de Gauss pode ser aplicada sem intercâmbio de linhas. Então A pode ser fatorada em LDL^t, onde L é a triangular inferior com valores 1 em sua diagonal, e D é a matriz diagonal com $a_{11}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n)}$ em sua diagonal [13]. ■

Exemplo A.6 A matriz [13]

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4{,}25 & 2{,}75 \\ 1 & 2{,}75 & 3{,}5 \end{bmatrix}$$

é definida positiva. A fatoração LDL^t de A é

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e o Algoritmo de Choleski produz a fatoração

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

A base para a iniciação do estudo de pesquisa operacional é o conhecimento a cerca das maneiras de resolução de sistemas de equações lineares.

Um sistema de equações lineares $m \times n$ composto por m equações e n variáveis é representado da seguinte forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{gathered}$$

que representada na forma de uma matriz aumentada (matriz completa ou matriz ampliada), isto é, aquela que contém tanto os coeficientes ($a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) e os termos independentes ($b_i, 1 \leq i \leq m$) do sistema, tem a seguinte configuração:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

De forma mais generalizada, a matriz anterior pode ser interpretada como $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes do sistema, x é a representação das variáveis correspondentes a cada um dos coeficientes e b é a matriz dos termos independentes do sistema.

Além disso, no que diz respeito à resolução, há uma única solução (quando o sistema é possível e determinado), nenhuma solução (quando o sistema é impossível) ou infinitas soluções (quando o universo é R^n e o sistema é possível e indeterminado).

No caso em que o sistema é possível e determinado, ou seja, apresenta uma única solução, não há problema de otimização a ser resolvido, já que a solução é única.

Definição A.12 Uma matriz $A_{m\times n}$ tem posto completo por linhas se o conjunto das m linhas de A for linearmente independente. Denota-se $posto(A) = m$, sendo $m \leq n$ [14]. ■

Para identificar a dependência linear de uma matriz, basta realizar a eliminação Gaussiana (escalonamento por linhas). Se pelo menos uma das linhas for nula, então a matriz é linearmente dependente.

Nos casos de sistemas na forma escalonada com posto completo por linhas, m variáveis têm suas colunas como matriz identidade, de forma que o número de variáveis independentes (grau de liberdade) é $n - m$. É importante ressaltar que numa matriz escalonada, as variáveis associadas às colunas não pivôs são chamadas variáveis independentes, podendo assumir quaisquer valores, já as variáveis associadas às colunas pivôs são denominadas variáveis dependentes.