



**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA**

**INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL E ESTUDO DA CURVA**  
**LIMAÇON DE PASCAL**

**THAÍS SANTOS MORENO**

**Sorocaba**

**2018**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar**  
**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA**

**INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL E ESTUDO DA CURVA**  
**LIMAÇON DE PASCAL**

**THAÍS SANTOS MORENO**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito parcial para a  
conclusão do Curso Licenciatura em  
Matemática, sob a Orientação do Prof. Dr.  
Antônio Luís Venezuela.

SANTOS MORENO, THAIS

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL E ESTUDO DA  
CURVA LIMAÇON DE PASCAL / THAIS SANTOS MORENO. -- 2018.  
52 f. : 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal de São  
Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: ATÔNIO LUÍS VENEZUELA

Banca examinadora: ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU,  
RENATO FERNANDES CANTÃO

Bibliografia

1. GEOMETRIA DIFERENCIAL. 2. LIMAÇON DE PASCAL. 3.  
CIRCUNFERÊNCIA E CARDIOIDE. 1. Orientador. II. Universidade Federal  
de São Carlos. III. Título.



Folha de aprovação

Thais Santos Moreno


"INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL E ESTUDO  
DA CURVA LIMAÇON DE PASCAL"

Trabalho de Conclusão de Curso

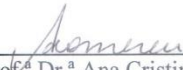
Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 14/08/2018.

Orientador

  
Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela

Membro 2

  
Prof.ª Dr.ª Ana Cristina de Oliveira Mereu

Membro 3

  
Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

*Porque Deus não nos deu o espírito de temor, mas de fortaleza, e de amor, e de moderação. (II Timóteo 1:7).*

## **Agradecimentos**

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me iluminado com todas as oportunidades que surgiram no decorrer desses anos e todas as experiências que acrescentaram muita competência na minha vida profissional e pessoal.

Agradeço à minha família por sempre ter acreditado em mim e apoiado em todas as decisões, desejando o êxito para minha pessoa em todo o tempo.

Agradeço ao Professor Doutor Antônio Luís Venezuela que me orientou durante a elaboração deste trabalho com muita paciência, dedicação e suporte.

Agradeço aos meus amigos Daniel Carlos Magno e Thales Soares que juntos formamos a turma íntegra de matemática do ano de 2012 da UFSCar Sorocaba.

Agradeço aos meus amigos Daniel, Jamille, João, Thalita e Willian pelos laços criados e os anos vividos em Portugal durante nossos estudos na Universidade de Coimbra.

Aos professores coordenadores do Programa de Licenciatura Internacional 2013/2015 que deram toda assistência durante esse período. À CAPES.

Em suma agradeço a todos aqueles que de alguma forma marcaram a minha vida universitária positivamente, a todos os professores e colegas que estiveram presentes engrandecendo meus conhecimentos e vivências.

Sumário	
Resumo.....	9
Introdução e Objetivo.....	11
1. Gaspard Monge: Breve História.....	13
2. Curvas .....	15
2.1 Pré-requisitos .....	15
2.2 Curvas parametrizadas .....	17
3. Introdução à Geometria Diferencial.....	23
3.1 Mudança de parâmetro de uma curva .....	24
3.2. Comprimento de arco.....	27
4. Introdução à Teoria Local das curvas .....	30
4.1 Componentes geométricos .....	30
4.2 Referencial de Frenet .....	30
4.3 Curvatura.....	31
4.3.1 Interpretação geométrica.....	33
5. Limaçon de Pascal .....	37
5.2 Circunferência.....	39
5.2.1 Estudo da circunferência.....	41
5.3 Cardioide.....	43
5.3.1 Estudo da cardioide.....	46
6 Considerações finais.....	49
Bibliografia .....	50

## Lista de Figuras

Figura 1. Representação de uma curva qualquer. ....	18
Figura 2. Parametrização da reta.....	19
Figura 3. Curva parametrizada diferenciável $\alpha(t)$ .....	19
Figura 4. Traço da curva $\gamma(t) = (t,  t )$ . ....	20
Figura 5. Traço da curva $\alpha(t) = (2t,  5t ), \forall t \in \mathbb{R}$ . ....	21
Figura 6. Traço da curva $\alpha(t) = (a, b)$ . ....	22
Figura 7. Traço da curva $\alpha(t) = (\text{sen}^2(t), \text{sen}(t))$ . ....	22
Figura 8. Traço da curva $\beta(t) = (t, t^3)$ . ....	24
Figura 9. Reparametrização $\beta$ da curva .....	25
Figura 10. Traço das curvas $\alpha(t)$ e $\beta(r)$ . ....	25
Figura 11. Relação entre os parâmetros.....	26
Figura 12. Linha poligonal.....	27
Figura 13. Traço da curva $\alpha(t) = (t, 3t+7)$ . ....	28
Figura 14. Referencial de Frenet.....	31
Figura 15. Interpretação do sinal de $k(s_0)$ .....	34
Figura 16. Traço da limaçon para $a=5$ e $b=10$ . ....	37
Figura 17. Traço da limaçon para $a=-3$ e $b=-7$ . ....	38
Figura 18. Traço da limaçon para $a=2$ e $b=-8$ . ....	38
Figura 19. Traço da limaçon para $a=-5$ e $b=11$ . ....	39
Figura 20. Circunferência centrada em $O(x_0, y_0)$ e de raio $r$ . ....	39
Figura 21. Traço da circunferência $\lambda(t)$ . ....	41
Figura 22. Formação da cardiode. ....	44
Figura 23. Traços das cardioides para $a=-10, a=-5$ e $a=-1$ . ....	45
Figura 24. Traços das cardioides para $a=1, a=5$ e $a=10$ . ....	45



## Resumo

Este trabalho objetiva estudar as curvas planas por meio de uma introdução à geometria diferencial, além de associá-los à limaçon de Pascal. A escolha deste tema ocorreu durante a busca por um assunto diferenciado daqueles vistos na graduação, mas que tratasse da Álgebra Linear que é uma disciplina de interesse. Encontramos então um tema que, além de usar a Álgebra Linear, também une conteúdos como o Cálculo e a Geometria. Utilizamos a obra de Tenenblat (2008) como principal bibliografia ao se tratar da introdução à Geometria Diferencial em  $\mathbb{R}^2$ , mas também foram utilizadas outras pesquisas com ênfase neste tema e à limaçon de Pascal que nos deram suporte para o desenvolvimento deste trabalho. A Geometria Diferencial é uma ciência da matemática aplicada que se iniciou na Antiguidade e nos permitiu realizar o estudo introdutório das curvas planas. Expomos os assuntos que se remetem às curvas parametrizadas planas: características e propriedades, elementos geométricos que as compõem e o estudo local das curvas. E por fim, vinculamos também os conteúdos estudados à limaçon de Pascal com dois casos específicos desta: a circunferência e a cardioide, atendendo nosso objetivo geral.

**Palavras-chave:** *Curvas planas, geometria diferencial, limaçon de Pascal.*

## Abstract

This work aims to study the plane curves by means of an introduction to the differential geometry, besides associating them with the Pascal's limaçon. This theme choice occurred during searching for differentiated subject from those seen at the undergraduate level, but which dealt with Linear Algebra which is an interest subject. We find a theme that, in addition to using Linear Algebra, also links contents such as Calculus and Geometry. We use Tenenblat (2008) work as the main bibliography when it comes to the introduction to Differential Geometry in  $\mathbb{R}^2$ , but also other researches with emphasis in this subject and Pascal's limaçon that gave us support for the development of this work. Differential Geometry is an applied mathematics science that began in antiquity and allowed us to perform the introductory study of flat curves. We present the subjects that refer to the parameterized flat curves: characteristics and properties, geometric elements that compose them and the local curves study of. And finally, we also link the contents studied to Pascal's limaçon with two specific cases of this: circle and cardioid, achieving our general objective.

**Keywords:** *flat curves, differential geometry, Pascal's "limaçon".*

## Introdução e Objetivo

O assunto abordado neste Trabalho de Conclusão de Curso consiste na Geometria Diferencial Plana, motivado na busca de um tema diferente aos vistos na graduação, mas que estivesse ligado à Álgebra Linear que é uma disciplina estimada por mim. Assim, encontramos a Geometria Diferencial, por sugestão do orientador, que além de envolver a Álgebra Linear, também trata de outros conteúdos, como o Cálculo Diferencial e Integral e a Geometria Plana. Como a Geometria Diferencial não pertence ao currículo da Universidade Federal de São Carlos e a maioria das bibliografias encontradas são de caráter mais formal e elaborada, foram necessários muitos estudos e, por esse motivo, optamos por um trabalho de categoria introdutória. O desenvolvimento da teoria é construído, principalmente, com base na obra de Tenenblat (2008) e realizamos diversas pesquisas para obter o máximo de conhecimento para dar suporte ao desenvolvimento deste trabalho.

Segundo Coimbra (2008) no que se refere à geometria diferencial, que se sustenta no estudo da geometria com o auxílio do cálculo diferencial e integral, entende-se que seus estudos foram iniciados na Antiguidade, com ideias primárias, provenientes das obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga. No entanto, os aspectos da Geometria Diferencial que conhecemos hoje tiveram início com Carl Gauss e Riemann, com suas respectivas obras do século XIX: “*Disquisitiones generales circa superficies curva (1828)*” e “*As hipóteses sobre as quais se baseiam os fundamentos da geometria (1854)*”.

O trabalho de Benetti (2009) aborda a teoria local das curvas, um dos temas clássicos presente na geometria diferencial, com o intuito de desenvolver um material de estudo que se torne uma fonte de pesquisa. Discute a importância do triedro de Frenet para o desenvolvimento da teoria local das curvas até determinar por completo a forma de uma curva.

Miyasaki (2017) apresenta tratamento diferente à Geometria Diferencial quando utiliza o software GeoGebra para estudar curvas planas. Considera esse programa uma rica ferramenta no ensino e aprendizagem da matemática. Aborda temas que incluem as curvas planas parametrizadas até o estudo do referencial de Frenet, fazendo do GeoGebra um importante meio de visualização.

O objetivo geral deste trabalho consiste no estudo introdutório da Geometria Diferencial, assim como conectar os conceitos vistos à limaçon de Pascal e dois casos

especiais. A escolha desta curva se deu durante as pesquisas por acharmos interessantes e conseguir ligá-la à Geometria Diferencial.

Objetivos específicos do nosso trabalho:

- Desenvolver o conceito de curvas parametrizadas;
- Caracterizar as curvas conforme os conceitos da geometria diferencial;
- Estudar a introdução à teoria local das curvas a partir do referencial de Frenet;
- Estudar a curva limaçon de Pascal e seus dois casos específicos: a circunferência e a cardioide.

Como forma de organização, dividimos essa proposta em cinco, sem contar com a Introdução e Objetivo. Para melhor compreensão deste trabalho, consideramos que o leitor tenha prévio conhecimento a respeito da Geometria Plana Euclidiana, do Cálculo Diferencial e Integral e da Álgebra Linear.

No primeiro capítulo escrevemos sobre Gaspard Monge, o pai da Geometria Diferencial, e suas contribuições.

No segundo capítulo, apresentamos as curvas parametrizadas, assim como as curvas parametrizadas diferenciais que constituem a base para o desenvolvimento dos demais assuntos.

No capítulo três, mostramos continuidade das curvas parametrizadas diferenciais; e quando dissertamos sobre as curvas regulares, estudamos a obtenção de curvas com mesmo traço e a medida do seu arco.

No quarto capítulo, analisamos a teoria local das curvas a partir de seus componentes geométricos para desenvolver o referencial de Frenet e entendermos o que é curvatura. Com o intuito de finalizar o estudo das curvas em  $\mathbb{R}^2$ , enunciamos o Teorema Fundamental das curvas planas.

Dedicamos o último capítulo para vincular os conceitos anteriormente estudados à curva limaçon de Pascal da qual selecionamos e apresentamos dois casos específicos para trabalhar.

## 1. Gaspard Monge: Breve História

Gaspard Monge (Beaune, 9 de maio de 1746 – Paris, 28 de julho de 1818) iniciou seus estudos na *Oratorian College* em Beaune, sua cidade de origem, considerada uma educação mais liberal comparada às outras escolas religiosas. Aos 16 anos, continuou seus estudos em Lyon e aos 17 anos tornou-se responsável por ministrar o curso de Física.

No ano de 1765, Monge foi nomeado desenhista na *École Royale du Génie* em Mézières, ocupação na qual não era possível colocar em prática seus conhecimentos matemáticos. Ele continuou desenvolvendo as ideias sobre a geometria, em tempo livre. Seus conhecimentos foram sendo reconhecidos quando, um ano após se tornar desenhista, elaborou técnicas para um plano de fortificação de impedimento ao inimigo.

Em 1768, Monge foi eleito para *Académie des Sciences* e se tornou professor de hidrodinâmica no Louvre, deixando, assim, a *École* de onde escreveu uma publicação sobre as evoluções das curvas de dupla curvatura.

Em 1769, sucedeu o professor de matemática Bossut da *École Royale du Génie*. Em 1770, ele recebeu um cargo adicional como instrutor de física experimental. Esse novo cargo foi considerado uma boa conquista, porém seu interesse ainda estava voltado na matemática.

Monge teve mérito na *Académie* pela generalização do cálculo de variações, geometria infinitesimal, a teoria de equações diferenciais parciais e combinatória. Além disso, escreveu muitos artigos para a academia sobre equações diferenciais no ponto de vista geométrico. Seu interesse se expandiu também para a física e a química.

Em 1780, teve menos tempo para se dedicar à *École* em Mézières, uma vez que se tornou geógrafo na *Académie des Sciences* de Paris. Sendo assim, renunciou a seu cargo em Mézières, em 1784, quando se tornou examinador de cadetes navais.

Com a Revolução Francesa, o curso da sua vida teve certas mudanças. Em 1792, a monarquia foi abolida na França e a república foi declarada e Monge se tornou Ministro da Marinha no governo pela Convenção Nacional, cargo a que renunciou após um ano.

Em 1794, participou da criação da *École Centrale des Travaux Publics* e foi nomeado para lecionar geometria descritiva treinando futuros professores da escola. Suas palestras sobre geometria infinitesimal originaram sua obra: "*Application of l'analyse à la géométrie*". A *École Normale* foi criada também com o intuito de formar professores, na qual Monge também lecionou geometria descritiva.

De 1796 a 1797, Monge esteve na Itália em uma comissão para selecionar os melhores tesouros de arte para os conquistadores e trazê-los para a França; foi quando se tornou amigo de Napoleão Bonaparte.

De volta a Paris, Monge foi nomeado diretor da *École Polytechnique* e, no ano seguinte, retornou à Itália envolvido na criação da República de Roma com um projeto para escolas avançadas.

Em maio de 1798, juntou-se à força expedicionária de Napoleão rumo ao Egito e à Síria. Durante os tempos difíceis ao lado de Napoleão, Monge continuou aperfeiçoando sua obra "*Application of l'analyse à la géométrie*".

Napoleão abandonou seu exército e retornou a Paris em 1799, quando deteve o poder absoluto na França. Ao retornar, Monge assumiu, novamente, o cargo de diretor da *École Polytechnique*, quando descobriu que seu livro "*Géométrie descriptive*" havia sido publicado por sua esposa.

Durante o estabelecimento do Consulado na França, Napoleão nomeou Monge como senador vitalício. Nos anos seguintes, Monge continuou uma série de atividades mantendo o interesse pela pesquisa em matemática.

A partir de 1809, desistiu do seu cargo na *École Polytechnique*, quando sua saúde começou a piorar.

Depois que Napoleão foi derrotado em Waterloo, Monge continuou a vê-lo, mas retornou a Paris em março de 1816. A partir de então, sua vida foi se tornando difícil, assediaram-no politicamente e sua vida foi continuamente ameaçada até sua morte.

Gaspard Monge é considerado o pai da Geometria Diferencial devido à sua obra "*Application de l'analyse à la géométrie*" onde introduziu o conceito de linhas de curvatura de uma superfície no espaço tridimensional, desenvolveu um método geral de aplicação de geometria para problemas de construção e introduziu dois planos de projeção perpendiculares entre si para a descrição gráfica de objetos sólidos.

## 2. Curvas

### 2.1 Pré-requisitos

Inicialmente, apresentaremos alguns resultados, sustentados no livro de Guidorizzi (2007), que são pré-requisitos e nos darão suporte para garantir o entendimento de conteúdos posteriormente apresentados. Utilizaremos também conteúdos sobre a Álgebra Linear e a Geometria Plana.

**Definição 2.1.** Sejam  $F : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $t_0 \in A$ .  $F$  é *contínua* em  $t_0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ .

**Definição 2.2.** Sejam  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $t_0 \in A$ . Definimos a *derivada* de  $F$  em  $t_0$  por  $\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ .

Se  $F$  admite derivada em  $t_0$ , então dizemos que  $F$  é *diferenciável* em  $t_0$ .

**Teorema 2.1.**  $F$  é diferenciável em  $t_0$  então  $F$  é contínua em  $t_0$ .

**Teorema 2.2.** Seja  $F : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $F(t) = (x(t), y(t))$ . Então,  $F(t)$  é diferenciável se, e somente se  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis.

As demonstrações desses dois teoremas podem ser encontradas em Guidorizzi (2007).

**Exemplo 2.1.** Seja  $F(t) = (\text{sen}(3t), e^{t^2})$ .

Sendo  $x(t) = \text{sen}(3t)$  e  $y(t) = e^{t^2}$ , temos que  $x'(t) = 3\cos(3t)$  e  $y'(t) = 2te^{t^2}$ .

Assim, pelo Teorema 2.2., concluímos que  $F(t)$  é diferenciável e  $F'(t) = (3\cos(3t), 2te^{t^2})$ .

**Definição 2.3.** A aplicação  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita de classe  $C^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se  $F$  possui derivadas até a ordem  $k$  e  $F^{(k)}$  for contínua em todo domínio.

**Exemplo 2.2.** Seja  $F : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $F(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t))$ . Sabemos que as funções  $\text{sen}(t)$  e  $\text{cos}(t)$  são diferenciáveis em todas as ordens em  $\mathbb{R}$  e são contínuas. Dessa forma, pelo Teorema 2.2.,  $F(t)$  também é diferenciável em todas as ordens em  $\mathbb{R}$  e, então, podemos concluir que esta função é de classe  $C^\infty$ .

**Definição 2.4.** Sejam  $U$  e  $V$  conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e a função  $f : U \rightarrow V$  uma bijeção. Dizemos que  $f$  é um *difeomorfismo* se  $f$  e  $f^{-1}$  são diferenciáveis.

**Definição 2.5.** Seja  $f : U \rightarrow V$ . Dizemos que  $f$  é um isomorfismo se  $f$  é uma aplicação linear bijetora.

**Definição 2.6.** Dizemos que a função  $f$  é difeomorfismo de classe  $C^k$  (respectivamente  $C^\infty$ ) se  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$  (respectivamente  $C^\infty$ ).

Os teoremas enunciados a seguir podem ser encontrados na obra de Tenenblat (2008), assim como suas demonstrações que não serão realizadas neste trabalho.

A seguir enunciaremos o Teorema da Função Inversa usada para indicar que uma curva é diferenciável.

**Teorema 2.3. Teorema da Função Inversa**

Seja uma aplicação  $F : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável de classe  $C^k$  (respectivamente  $C^\infty$ ) e  $p_0 \in A$  tal que  $\partial F_{p_0}$  é injetora. Então existe uma vizinhança  $U$  de  $p_0$ , contida em  $A$ , tal que  $F(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e a restrição de  $F$  a  $U$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ , de  $U$  sobre  $F(U)$ .

Podemos analisar se  $\partial F_{p_0}$  é injetora de diferentes maneiras. Como  $\partial F_{p_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação linear, então consideramos equivalentes:  $\partial F_{p_0}$  ser injetora, a matriz jacobiana de  $F$  em  $p_0$  ter posto  $n$ , o jacobiano de  $F$  em  $p_0$  ser não nulo ou se  $\partial F_{p_0}(w) = 0$ , então  $w = 0$ .

Os exemplos 3.1. e 3.2. foram retirados de Tezoto (2014).

**Definição 2.7.** Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por um vetor de componentes  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . As derivadas parciais dessas funções podem ser organizadas numa matriz  $m \times n$ , que é denominada *matriz jacobiana*. O *jacobiano* é dado pelo determinante da matriz jacobiana.

**Exemplo 2.3.** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ , mostraremos que  $F$  é localmente invertível, ou seja, dado qualquer ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , então existe uma vizinhança  $V$  com  $x_0 \in V$ , na qual a  $F$  é invertível.

Pelo Teorema 2.3., verificamos que o jacobiano de  $F$  não se anula,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ :



$$J_{F(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{d(e^x \cos(y))}{dx} & \frac{d(e^x \cos(y))}{dy} \\ \frac{d(e^x \sin(y))}{dx} & \frac{d(e^x \sin(y))}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{vmatrix} = \\ = e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \sin^2(y) = e^{2x} \neq 0.$$

**Exemplo 2.4.** Consideremos  $F$  definida por

$$F(x, y) = (x^3 - 2xy^2, x + y).$$

No ponto  $x_0 = (1, -1)$ , o jacobiano é dado por

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d(x^3 - 2xy^2)}{dx} & \frac{d(x^3 - 2xy^2)}{dy} \\ \frac{d(x+y)}{dx} & \frac{d(x+y)}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2y^2 + 4xy,$$

logo  $F(1, -1) = 3(1)^2 - 2(-1)^2 + 4(1)(-1) = -3 \neq 0$ .

Como  $F$  é diferenciável, concluímos, pelo Teorema da Função Inversa, que num conjunto aberto contendo  $x_0$  a função tem uma inversa  $F^{-1}$ .

Como consequência do Teorema 2.3., temos mais um resultado, o Teorema da Função Implícita.

**Teorema 2.4. Teorema da Função Implícita**

Sejam uma função diferenciável de classe  $C^k$ ,  $F: A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e  $F_1, \dots, F_n$  funções coordenadas de  $F$ . Denotamos por  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  e  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  os respectivos pontos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Fixados  $(a, b) \in A$  e  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(a, b) = c$ ,

se a matriz dada por  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b)$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ , tem posto  $n$  (determinante diferente de

zero), então existe uma vizinhança  $U$  de  $b$  em  $\mathbb{R}^m$  e uma função única  $G: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diferenciável de classe  $C^k$ , tal que  $G(b) = a$  e  $F(G(y), y) = c$ ,  $\forall y \in U$ .

## 2.2 Curvas parametrizadas

A Geometria Diferencial Plana é um campo da matemática que estuda a teoria de curvas a partir do Cálculo Diferencial combinado com a Geometria em  $\mathbb{R}^2$ . Dessa forma, para darmos continuidade ao trabalho, entenderemos o que são curvas.

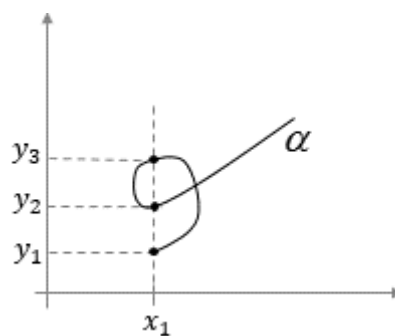
Segundo Benetti (2009) todos possuem pelo menos uma ideia intuitiva sobre curva. Podemos pensar, então, uma curva como um conjunto de pontos no plano e com dimensão igual a um. Assim, por exemplo, uma curva pode ser o gráfico de uma função real de uma variável ou a trajetória de uma partícula ao longo do plano num intervalo de tempo. Uma parábola, uma circunferência, uma elipse ou um traço qualquer podem ser considerados uma curva.

Muitas curvas como estas podem ser descritas por meio de equações cartesianas, ou seja, no caso das curvas planas, tomando-se  $y$  como uma função de  $x$ ,  $y = f(x)$ , escrevendo-se  $x$  como uma função de  $y$ ,  $x = g(y)$ , ou conhecendo a relação entre  $x$  e  $y$  que considera  $y$  implicitamente como uma função de  $x$ ,  $f(x, y) = 0$  (Benetti, 2009). Por exemplo, uma reta pode ser representada pela equação cartesiana  $y = x$ .

Como a curva pode ter vários formatos, nem sempre conseguimos escrevê-la por meio de uma equação cartesiana. Assim, podemos considerar curvas descritas por funções vetoriais, isto é, a função tem como domínio o conjunto dos números reais e sua imagem é um conjunto de vetores.

Vejamos a Figura 1, se considerarmos  $x_1$  pertencente a um intervalo  $I$  que descreve a forma, percebemos que nesta abscissa há três saídas ordenadas distintas,  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . É certo que retas verticais cortam a curva em mais de um ponto.

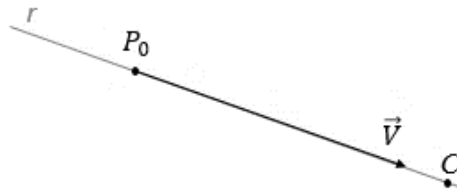
**Figura 1.** Representação de uma curva qualquer.



Fonte: Autor

Deste modo, como as coordenadas da partícula variam de acordo com o tempo percorrido, conseguimos representar cada ponto  $(x, y)$  que determina a curva em função de uma terceira variável, o tempo,  $t$ . Efetuamos, então,  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  que são denominadas *equações paramétricas* e que reproduzem a curva parametrizada  $(x, y) = (f(t), g(t))$ .

**Exemplo 2.5.** Parametrizando a reta  $r$ .

**Figura 2.** Parametrização da reta.

Fonte: Autor

A Figura 2 nos dá suporte para indicar a parametrização da reta  $r$ . Sejam o ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , tal que  $P_0 \in r$ , o vetor  $\vec{V} = (a, b)$  e  $C = (x, y)$  o ponto a ser determinado. O vetor  $\vec{V}$  indica a direção da reta e também pode ser escrito relativo à base canônica como  $\vec{V} = ae_1 + be_2$ , em que  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Deste modo, temos, para  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} P_0 C = t\vec{V} &\Rightarrow C - P_0 = t\vec{V} \Rightarrow C = P_0 + t\vec{V} \Rightarrow C = (x_0, y_0) + t(a, b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C = (x_0 + ta, y_0 + tb). \end{aligned}$$

Logo, chamando

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at, \\ y(t) = y_0 + bt. \end{cases}$$

obtemos as equações paramétricas da reta.

**Definição 2.8.** Seja uma curva  $\alpha$  parametrizada em que

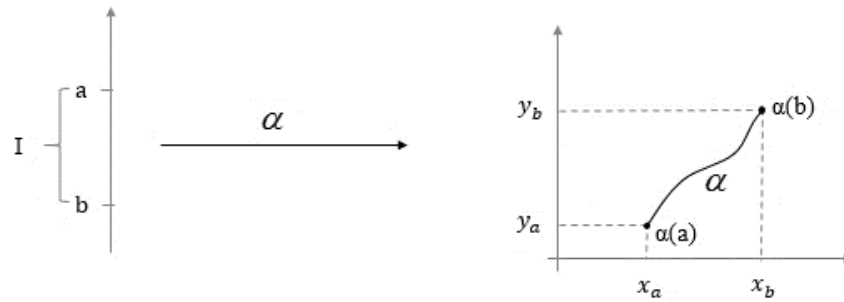
$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Essa curva parametrizada é *diferenciável* quando  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

Denominamos  $t \in I$  e  $\alpha(t)$ , respectivamente, *parâmetro* e *traço* da curva. O traço de  $\alpha$  é a imagem  $\alpha(I) = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ .

Graficamente, podemos representar uma *curva parametrizada diferenciável do plano* da seguinte forma.

**Figura 3.** Curva parametrizada diferenciável  $\alpha(t)$ .



Fonte: Autor

A curva utilizada no exemplo a seguir foi encontrada em Tenenblat (2008).

**Exemplo 2.6.** Seja a aplicação  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma(t) = (t, |t|)$ , vamos verificar se essa curva é diferenciável de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$ .

Sendo  $x(t) = t$  e  $y(t) = |t|$ , pelo Teorema 2.2. podemos verificar  $x(t)$  e  $y(t)$  separadamente.

Para  $x(t) = t$ , temos:  $x'(t) = 1$ ,  $x''(t) = 0$ ,  $x'''(t) = 0$ ,  $x^{(IV)}(t) = 0$ , ...

Logo, concluímos que  $x(t) = t$  é diferenciável de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$ , pois as derivadas de todas as ordens existem e são contínuas.

Para  $y(t) = |t|$  temos, por definição de módulo:

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0, \\ -t, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Calculando

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t - 0}{t - 0} = -1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - 0}{t - 0} = 1.$$

Como  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0}$ , então não existe  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0}$  e,

portanto,  $y(t)$  não é diferenciável em  $t = 0$ , ou seja,  $y(t)$  não é diferenciável de classe  $C^1$ , respectivamente  $C^\infty$ , em  $\mathbb{R}$ . Vemos ainda que:

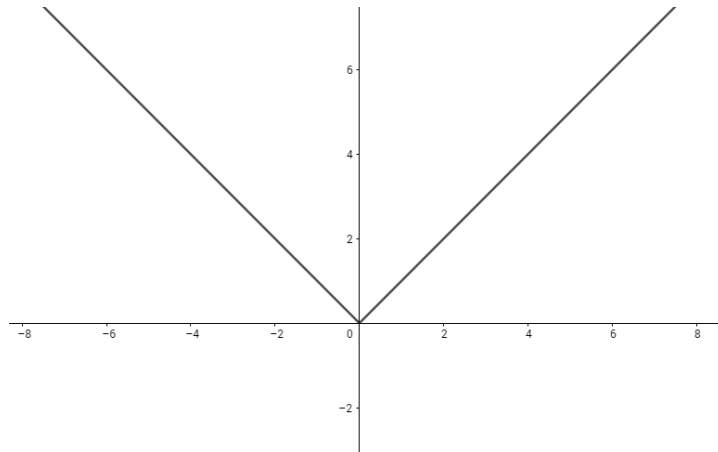
$$\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0.$$

Logo,  $y(t)$  é contínua em  $t = 0$ .

Deste modo, concluímos que  $\gamma(t) = (t, |t|)$  não é uma curva diferenciável do plano.

A Figura 4 mostra o traço de  $\gamma(t) = (t, |t|)$ .

**Figura 4.** Traço da curva  $\gamma(t) = (t, |t|)$ .



Fonte: Autor

**Exemplo 2.7.** Consideramos a aplicação

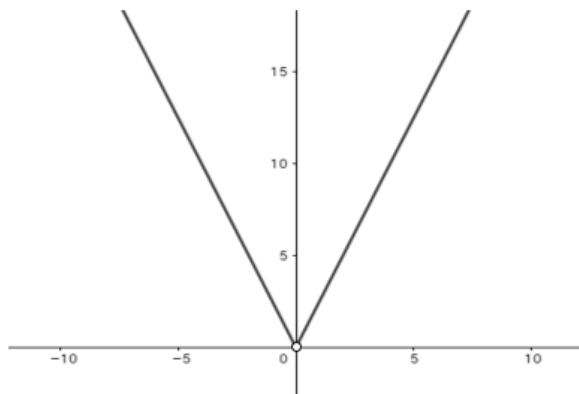
$$\alpha : I \subset \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (2t, |5t|).$$

Temos uma curva parametrizada do plano, uma vez que  $x(t) = 2t$  e  $y(t) = |5t|$  são diferenciáveis em todas as ordens no domínio, pois  $t \in \mathbb{R}^*$ .

A Figura 5 mostra o traço de  $\alpha(t) = (2t, |5t|)$ .

**Figura 5.** Traço da curva  $\alpha(t) = (2t, |5t|)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

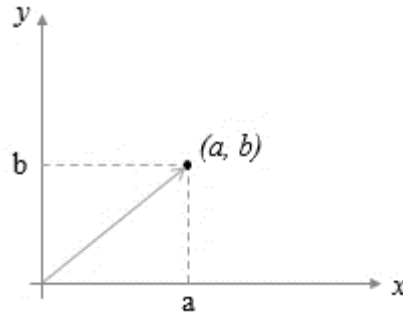


Fonte: Autor

**Exemplo 2.8.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , na qual para cada  $t \in \mathbb{R}$  se associa  $\alpha(t) = (a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  fixos, é considerada uma curva constante parametrizada diferenciável, cujo traço é representado pelo ponto  $(a, b)$ .

A Figura 6 mostra o traço de  $\alpha(t)$ .

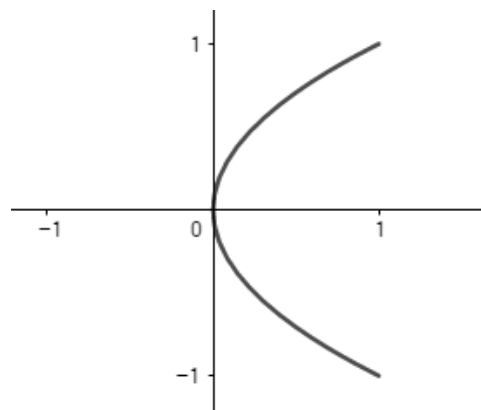
**Figura 6.** Traço da curva  $\alpha(t) = (a, b)$ .



Fonte: Autor

**Exemplo 2.9.** Na Figura 7, apresentamos o traço da curva diferenciável parametrizada  $\alpha(t) = (\text{sen}^2(t), \text{sen}(t))$ , em que  $t \in [-2\pi, 2\pi]$ .

**Figura 7.** Traço da curva  $\alpha(t) = (\text{sen}^2(t), \text{sen}(t))$ .



Fonte: Autor

### 3. Introdução à Geometria Diferencial

Neste capítulo, mostraremos uma maneira de se obter curvas regulares com mesmo traço e a função que determina o comprimento do arco de uma curva regular.

**Definição 3.1.** Seja a aplicação  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferencial parametrizada tal que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\forall t \in I$ . Representamos o *vetor tangente*, também conhecido como *vetor velocidade*, a  $\alpha$  em  $t$  por  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ .

Com a finalidade de desenvolver uma introdução à Teoria Local das curvas mais adiante, ressaltamos a importância da reta tangente à curva  $\alpha(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Deste modo, devemos considerar que o vetor tangente não seja nulo para todo  $t$ .

**Definição 3.2.** Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *regular* se  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in I$ .

**Exemplo 3.1.** Seja a aplicação

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & \text{se } t \geq 0, \\ (-t^2, t^2), & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Vamos verificar se a curva parametrizada diferenciável  $\gamma$  é regular.

Sejam

$$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow x(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \geq 0, \\ -t^2, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

E

$$y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow y(t) = t^2.$$

Então,

$$x' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow x'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se } t \geq 0, \\ -2t, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

$$y' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow y'(t) = 2t.$$

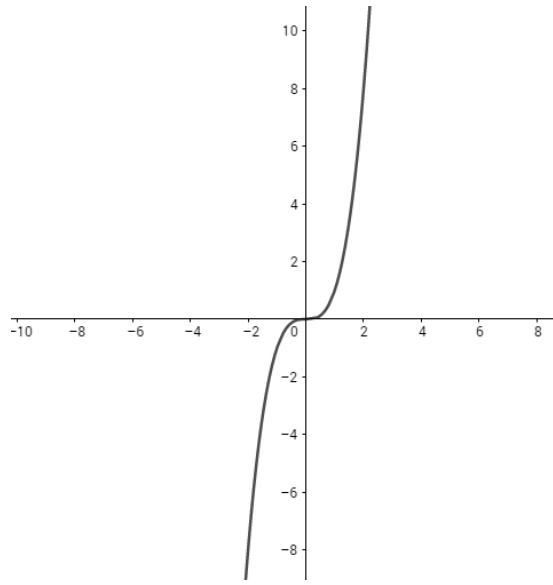
Assim, como  $\gamma'(0,0) = (0,0)$ , concluímos que  $\gamma$  não é regular.

**Exemplo 3.2.** Seja a aplicação

$$\begin{aligned}\beta: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \beta(t) = (t, t^3).\end{aligned}$$

A Figura 8 mostra o traço da curva  $\beta(t)$ .

**Figura 8.** Traço da curva  $\beta(t) = (t, t^3)$ .



Fonte: Autor

O vetor tangente a  $\beta$  em  $t$  é dado por  $\beta'(t) = (1, 3t^2)$ . E, assim, podemos concluir que  $\beta$  é regular, pois  $\beta'(t) = (1, 3t^2) \neq (0, 0), \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 3.3.** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. A reta tangente a  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$  na direção de  $\alpha'(t_0)$ , logo, a reta tangente é dada por  $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Como  $\alpha$  é regular, então  $g(r) \neq 0, \forall r \in \mathbb{R}$ .

### 3.1 Mudança de parâmetro de uma curva

Com os recursos que a geometria diferencial nos dispõe, temos a possibilidade de obter curvas regulares com traço igual ao de outras curvas regulares a partir de um método que estudaremos, denominado reparametrização da curva.

**Definição 3.4.** Vamos considerar  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ , seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $h: J \rightarrow I$  uma função diferenciável de classe  $C^\infty$  com primeira derivada diferente de zero para qualquer ponto pertencente a  $J$  e tal que  $h(J)=I$ . Então

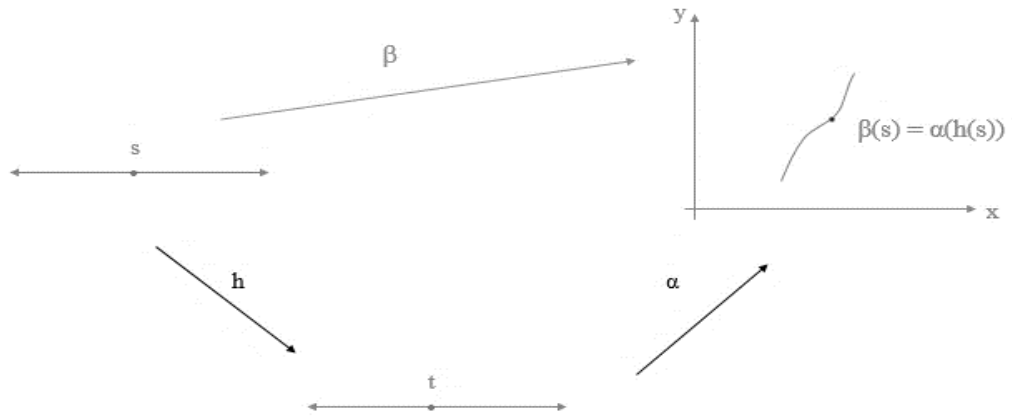
$$\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$$



tem o mesmo traço de  $\alpha$  e é uma curva regular denominada *reparametrização* de  $\alpha$  por  $h$ . A função  $h$  é a *mudança de parâmetro*.

Podemos visualizar a reparametrização por meio da Figura 9:

**Figura 9.** Reparametrização  $\beta$  da curva



Fonte: Autor

A mudança de parâmetro  $h$  é uma função estritamente crescente ou decrescente, e assim é bijetora. Temos que se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ , então podemos dizer que  $\alpha$  é uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1}$ . O sentido do percurso do traço de  $\alpha$  é dito *orientação* desta curva regular  $\alpha$ .

Dessa forma, se  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ , quando  $h$  é estritamente crescente, então  $\beta$  e  $\alpha$  têm mesma orientação. Já quando  $h$  é estritamente decrescente;  $\beta$  e  $\alpha$  têm orientações opostas.

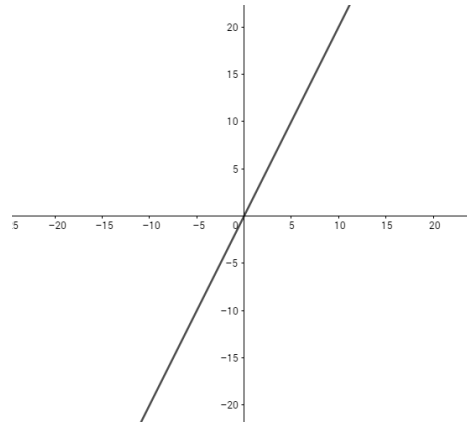
**Exemplo 3.3.** Sejam as aplicações,  $\forall t, r \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (t, 2t) \quad \text{e} \quad r \rightarrow \beta(r) = (2r+1, 4r+2).$$

O traço dessas duas curvas é igual, como vemos na Figura 10:

**Figura 10.** Traço das curvas  $\alpha(t)$  e  $\beta(r)$ .



Fonte: Autor

Determinaremos a relação entre os parâmetros para que tenhamos  $\alpha(t) = \beta(r)$ , ou seja,  $(t, 2t) = (2r+1, 4r+2) \Rightarrow t = 2r+1$ .

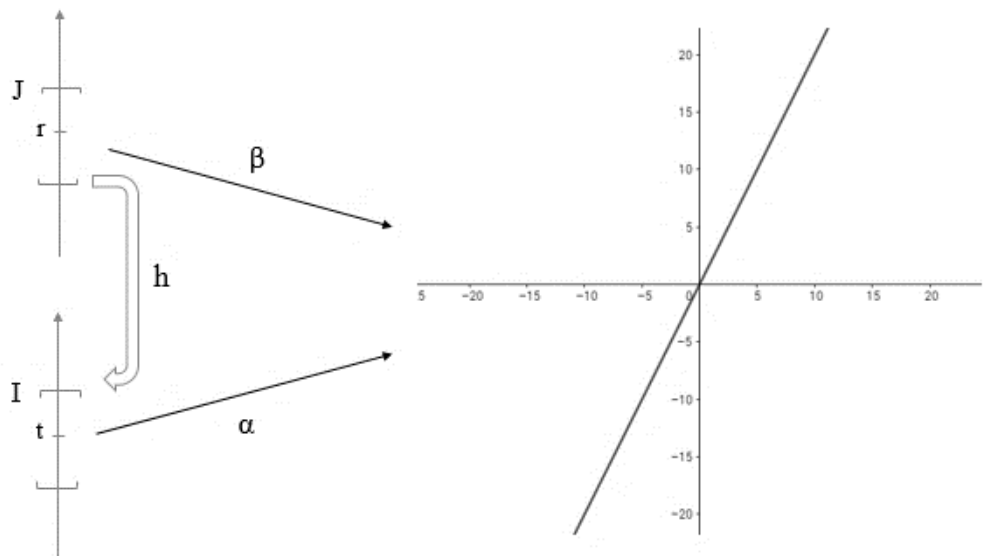
Sendo,

$$h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$$

$$r \rightarrow t = h(r).$$

A Figura 11 mostra as relações dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Figura 11.** Relação entre os parâmetros.



Fonte: Autor

Temos  $\beta(t) = \alpha(h(r)) = (\alpha \circ h)(r)$ .

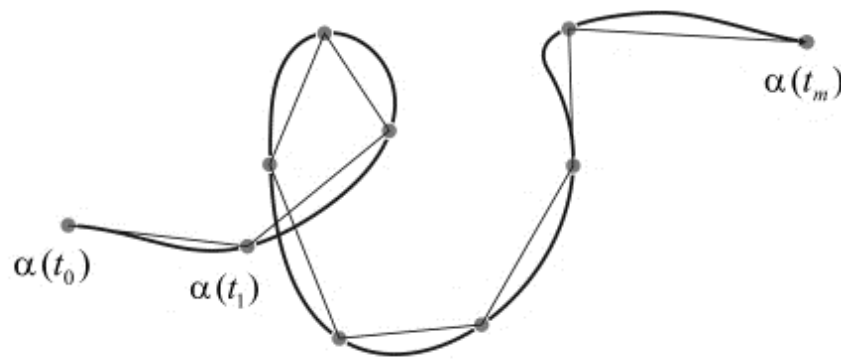
Assim, como  $t = 2r + 1$ , então  $h(r) = 2r + 1$ .

### 3.2. Comprimento de arco

Seguimos este capítulo com as ideias provenientes de Tenenblat (2008) e usamos a próxima definição para indicar o comprimento do arco de uma curva regular, isto é, sua medida dentro de um intervalo.

Seja uma curva regular  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , fixamos um intervalo  $[t_0, t_m]$  em seu domínio. Subdividimos arbitrariamente esse intervalo nos pontos  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$  e unimos os pontos  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$ , com  $i = 1, \dots, m$ , por seguimento de retas obtendo uma linha poligonal sobre a curva, como mostra a Figura 12.

Figura 12. Linha poligonal.



Fonte: BENETTI, 2009

Quando os intervalos dos pontos forem menores possíveis, o comprimento da linha poligonal inscrita à curva será igual ao arco da curva no intervalo dado. Como a curva é regular, podemos verificar que existe o limite superior do conjunto dos comprimentos dessas linhas poligonais e é igual a  $\int_{t_0}^{t_m} |\alpha'(t)| dt$ .

**Definição 3.5.** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, tal que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , a aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$ :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right| dt = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

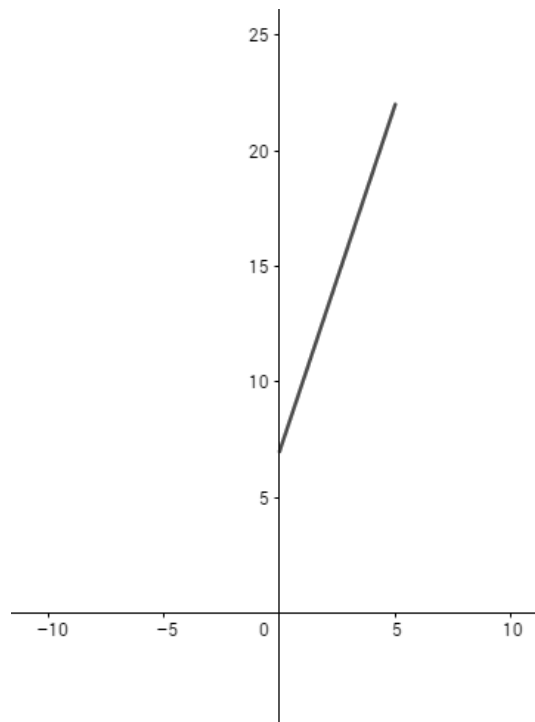
representa a *função comprimento de arco* desta curva partindo de  $t_0$ .

**Exemplo 3.4.** Seja a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 5] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t, 3t + 7). \end{aligned}$$

A Figura 13 mostra o traço de  $\alpha$ .

**Figura 13.** Traço da curva  $\alpha(t) = (t, 3t+7)$ .



Fonte: Autor

Vamos determinar o comprimento de arco desta curva em seu domínio,  $[0, 5] \subset \mathbb{R}$ .

Assim, temos

$$\alpha'(t) = (1, 3) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(t)| \\ &= \int_0^t \sqrt{10} \, dt = \sqrt{10}(t-0) = t\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Logo,  $s(t) = t\sqrt{10}$ .

**Definição 3.6.** Dizemos que uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é parametrizada por comprimento de arco se,  $\forall t_0, t_1 \in I$  em que  $t_0 \leq t_1$ ,  $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| = t_1 - t_0$ .

Como  $s(t) \geq 0, \forall t \in I$ , o comprimento do arco depende de uma orientação em  $[t_1, t_0]$ , posto que  $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| = -\int_{t_1}^{t_0} |\alpha'(t)|$ .

**Proposição 3.1.** Definimos que uma curva regular  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  encontra-se parametrizada por comprimento de arco se, e somente se,  $|\alpha'(t)| = 1$ , para qualquer  $t \in I$ .

**Demonstração:** Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada por comprimento de arco  $s$ , fixamos  $t_0 \in I$ . Consideremos  $s: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|$ ,  $\forall t \in I$ . Se  $t_0 \leq t$  então  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| = t - t_0$ ; se  $t \leq t_0$ , então  $-s(t) = -\int_t^{t_0} |\alpha'(t)| = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| = t - t_0$ . Portanto,  $\forall t \in I$ , temos  $s(t) = t - t_0$  em que  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = |\alpha'(t)|$ , podemos concluir que  $|\alpha'(t)| = 1$ .

□

**Proposição 3.2.** Consideremos uma curva regular,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ ,  $s: I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ . Então existe a função  $h$ , inversa de  $s$ , definida em  $J = s(I)$  tal que  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$  e  $\beta$  encontra-se parametrizada por comprimento de arco.

**Demonstração:** Como  $\alpha$  é uma curva regular, temos que  $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ , logo  $s$  é uma função estritamente crescente. Assim, existe uma inversa de  $s$ ,  $h: J \rightarrow I$ .

Como  $h(s(t)) = t$ ,  $\forall t \in I$ , então  $\frac{\partial h}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = 1$  e, portanto,  $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0$ . Concluimos

que  $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ ,  $s \in J$  é reparametrização de  $\alpha$  e ainda  $\left| \frac{\partial \beta}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1$ .

Logo,  $\beta$  está parametrizada por comprimento de arco.

□

Observamos que a parametrização não é única, uma vez que há dependência da função comprimento de arco e do  $t_0$  fixado.

## 4. Introdução à Teoria Local das curvas

Com a finalidade de iniciar o estudo da teoria local das curvas, vamos apresentar certos elementos geométricos das curvas parametrizadas diferenciáveis.

Vamos considerar uma curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular de classe  $C^\infty$  tal que  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ . Temos  $s$  como comprimento de arco desta curva parametrizada por comprimento de arco.

### 4.1 Componentes geométricos

Como vimos anteriormente, dada uma curva parametrizada diferenciável,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , o vetor tangente a essa curva em  $t \in I$  é dado por  $\alpha'(t)$ .

**Definição 4.1** Seja a curva  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$

é chamado de *vetor tangente unitário*.

Se  $\alpha(t)$ ,  $\forall t \in I$ , for uma curva parametrizada por comprimento do arco, então  $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ . De fato, uma curva parametrizada por comprimento de arco tem  $|\alpha'(s)| = 1$ .

O vetor  $T'(s) = \alpha''(s)$  é ortogonal ao vetor tangente unitário  $T(s)$ , tal que o produto interno desses vetores é igual a zero, isto é,  $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ . Entretanto, devemos garantir que o vetor  $T'(s)$  seja unitário e, para isso, precisamos normalizá-lo. Denominamos  $T'(s)$  de vetor normal.

**Definição 4.2.** O vetor  $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$  representa o *vetor normal unitário* a uma curva  $\alpha(s): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

A base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  formada pelos vetores unitários normal e tangente tem a mesma orientação que a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  ( $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ), representado na Figura 14. Assim,  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ .

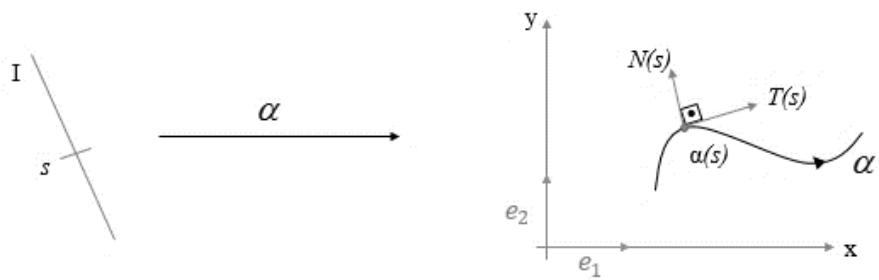
### 4.2 Referencial de Frenet

Definimos os conceitos dos vetores tangente e normal unitários, com isso podemos definir o referencial de Frenet.

**Definição 4.3.** O conjunto de vetores  $T(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  formam o *referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ , representado na Figura 14.

Temos que a reta normal a curva  $\alpha$  em  $s_0$  tem mesma direção de  $N(s_0)$  e passa por  $\alpha(s_0)$ .

**Figura 14.** Referencial de Frenet.



Fonte: Autor

### 4.3 Curvatura

A interpretação geométrica da curvatura é a medida do quanto uma curva se difere de uma reta, ou seja, a curvatura mede a taxa em que varia a direção da tangente à curva num ponto. Assim, precisamos que o comprimento do vetor tangente não se altere, por isso usamos uma curva parametrizada por comprimento de arco.

Sabemos que  $T(s)$  e  $N(s)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^\infty$  e que correspondem elementos de  $s \in I$  a  $\mathbb{R}^2$ ; e ainda,  $T'(s)$  e  $N'(s)$  são combinação de linear de  $T(s)$  e  $N(s)$ . Entendemos que como  $T(s)$  é um vetor unitário, então  $T'(s)$  e  $T(s)$  são ortogonais e, portanto  $T'(s)$  é proporcional ao vetor normal unitário  $N(s)$ . Ao fator de proporcionalidade denominamos *curvatura* ( $k(s)$ ) da curva em  $s$ .

**Definição 4.4.** A função  $k(s)$ ,  $s \in I$ , definida por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

é denominada *curvatura* da curva  $\alpha$  em  $s$ . O sinal da curvatura depende da orientação da curva.

Dada a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , pela definição 4.4., observamos

$$\begin{aligned} k(s) &= \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(s) \rangle = \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s)) \rangle = \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$T'(s) = k(s) N(s).$$

Da mesma forma, como  $\langle N(s), N'(s) \rangle = 0$  e  $N'(s)$  é proporcional a  $T(s)$ , portanto  $N'(s) = k(s) T(s)$ .

**Definição 4.5.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco em  $s \in I$ ,

$$T'(s) = k(s) N(s) \text{ e } N'(s) = k(s) T(s)$$

satisfeitos pelo referencial de Frenet, as equações acima são denominadas *fórmulas de Frenet* de uma curva plana.

A velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é expressa pela função  $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ .

Vimos que toda curva regular admite reparametrização por comprimento de arco, contudo, neste momento, vamos definir a curvatura de uma curva regular sem ter a necessidade de realizar tal parametrização.

**Definição 4.6.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de parâmetro  $r$ ,  $\forall r \in I$  e  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização de  $\alpha$  por comprimento de arco  $s$ , em que  $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ . Se  $T(s)$  e  $N(s)$  formam o referencial de Frenet de  $\beta(s)$ , e  $k(s)$  a curvatura, então temos que  $T(r) = T(s(r))$ ,  $N(r) = N(s(r))$  é o referencial de Frenet de  $\alpha$  e  $k(r) = k(s(r))$  é a curvatura.

Em seguida, apresentamos a curvatura de uma curva regular sem a ocorrência de reparametrização por comprimento do arco.

**Definição 4.7.** Seja  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ ,  $r \in I$  uma curva regular, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Então

$$T(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad N(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \text{ e } k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}.$$



**Demonstração:** Consideramos uma reparametrização  $\beta(s)$  de  $\alpha$  por comprimento de arco. Ao derivar  $\beta \circ s(r) = \alpha(r)$ , obtemos

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} = \alpha'(r), \quad (1)$$

e ainda, derivando mais uma vez,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \alpha''(r), \quad (2)$$

tal que

$$\frac{\partial s}{\partial r} = |\alpha'(r)|. \quad (3)$$

E então

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}. \quad (4)$$

De (1) e (3), sendo  $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ , temos

$$T(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Sabemos também que, por definição, o vetor normal é dado por

$$N(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Da maneira que  $k(s(r)) = \left\langle \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2}(s(r)), N(r) \right\rangle$  podemos concluir por (1) e (4)

$$k(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}.$$

□

Esta demonstração foi encontrada em Tenenblat (2008).

### 4.3.1 Interpretação geométrica

Nesta etapa, estudaremos a interpretação geométrica da curva regular considerando o sinal da curvatura.

**Definição 4.8.** Seja uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ . Compreendemos que  $\alpha''(s)$  é ortogonal a  $\alpha'(s)$  onde  $T(s) = \alpha'(s)$ . Supondo que  $k(s_0) \neq 0$ , fixado  $s_0 \in I$ , temos que a reta tangente a curva em  $s_0$ ,  $T(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0)$ , divide o plano em dois semiplanos.

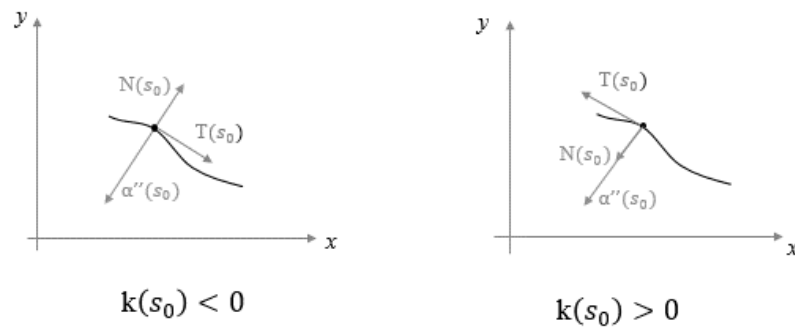
A expansão em séries de Taylor de  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , em torno de  $s_0$ ,  $\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s)$ , em que  $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0$  e, portanto,  $\alpha(s) - T(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s)$ , nos garante que como  $\alpha(s) - T(s)$  é um vetor no sentido do semiplano onde  $\alpha(s)$  está contido, sendo  $s$  tão próximos a  $s_0$ , então  $\alpha''(s)$  tem o mesmo sentido do semiplano que contém os pontos  $\alpha(s)$ .

Sendo  $k(s_0) = \langle \alpha''(s_0), N(s_0) \rangle$ , concluímos que

- Se  $k(s_0) > 0$ , então  $N(s_0)$  e  $\alpha''(s_0)$  têm mesmo sentido;
- Se  $k(s_0) < 0$ , então  $N(s_0)$  e  $\alpha''(s_0)$  têm sentidos opostos.

A Figura 15 mostra a interpretação do sinal da curvatura.

**Figura 15.** Interpretação do sinal de  $k(s_0)$ .



Fonte: Autor

**Definição 4.9.** Dada uma curva regular,  $\alpha(s)$ , com curvatura  $k(s) \neq 0$ , o raio de curvatura da curva em  $s$  corresponde a  $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ .

**Definição 4.10.** Um círculo de raio  $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$  e centro  $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$  é chamado *círculo osculador* e  $c(s)$  é o *centro de curvatura*.

Conforme a variação de  $s$ , o centro de curvatura descreve uma curva  $\beta$  dita a *evoluta* de  $\alpha$ . E dizemos que a *involuta* de uma curva regular  $\beta$  representa uma curva ortogonal às retas tangente de  $\beta$ . Deste modo, se  $\beta$  é evoluta de  $\alpha$ , então  $\alpha$  é uma involuta de  $\beta$ .

Por fim, enunciaremos o Teorema fundamental das curvas planas.

**Teorema 4.1.** *Teorema fundamental das curvas planas*

Dada  $k(s)$  uma função diferenciável, com  $s \in I$ , existe uma curva regular parametrizada por comprimento de arco  $s$ ,  $\alpha(s)$ , cuja curvatura é  $k(s)$  e essa curva é única ao fixar  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , sendo  $v_0$  um vetor unitário do plano. Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  tiverem mesma curvatura, então elas diferem por sua posição no plano, ou seja, existe um movimento rígido positivo, onde  $L$  é uma rotação; e  $T$ , translação no plano, tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s)).$$

**Demonstração:** Realizaremos a demonstração do teorema em três partes.

Primeiramente, nosso objetivo é verificar se a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  encontra-se parametrizada por comprimento de arco  $s$  e sua curvatura é  $k(s)$ .

Seja  $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$ , fixando  $s_0 \in I$ . Vamos fixar também um ponto do plano  $p_0 = (x_0, y_0)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Uma curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  tal que  $x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds$  e  $y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(s) + \lambda) ds$ .

O referencial de Frenet é dado, então, por

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \text{sen}(\theta(s) + \lambda)),$$

$$N(s) = (-\text{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

e, assim, temos  $|\alpha'(s)| = 1$ . Logo a curvatura é dada por  $\langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s) = k(s)$ .

Nesta segunda etapa, vamos provar a unicidade da curva regular parametrizada por comprimento de arco  $s$  quando fixados  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , com  $v_0$  um vetor unitário do plano.

Deste modo, dada uma curva regular parametrizada por comprimento de arco  $s$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Segue que, a partir das equações de Frenet,  $(x'', y'') = k(-y', x')$ , ou seja,  $x(s)$  e  $y(s)$  satisfazem

$$x'' = -k y',$$

$$y'' = -k x'.$$

Temos a garantia da existência de apenas uma solução, pelo Teorema da Unicidade (Guidorizzi, 2007) para sistema de equações diferenciais. Assim, fixados  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$  a curva  $\alpha(s)$  é única.

Por fim, sejam duas curvas com mesma curvatura,  $\alpha$  e  $\beta$ . Dado  $s_0$  fixo, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que a curva  $\bar{\alpha} = L \circ T \circ \beta$  satisfaz  $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$  e  $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$ . Logo,  $\bar{\alpha} \equiv \alpha$  e concluímos que  $\alpha = L \circ T \circ \beta$ .

□

O Teorema 4.1. mostra que uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha$  existe e é única, e depende apenas da sua curvatura. Caso existam duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco com mesma curvatura, então diferem a posição no plano.

## 5. Limaçon de Pascal

Este último capítulo será destinado à limaçon de Pascal e o estudo de dois de seus casos específicos: a circunferência e a cardioide via a geometria diferencial plana, ou seja, vamos utilizar os conteúdos vistos nos capítulos anteriores para analisar essas curvas.

A *limaçon de Pascal*, também conhecido como *caracol de Pascal* ou *conchóide da circunferência*, é uma curva parametrizada plana que recebeu esta nomeação pelo matemático francês Gilles de Roberval, em meados de 1630, quando as utilizou em uma de suas obras que tratava sobre métodos de traçar reta tangente (Ferreto, 2003).

Roberval empregou o nome limaçon de Pascal em homenagem ao pai de Blaise Pascal, Etienne Pascal, o precursor do estudo sobre essas curvas. Essa nomenclatura tem origem do latim *limax* que significa caracol.

A limaçon de Pascal pode ser representado como uma curva polar na forma  $r = b + a \cos(\theta)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , mas como tratamos, neste trabalho, das curvas parametrizadas, indicamos abaixo as equações paramétricas que representam a limaçon.

$$\begin{cases} x(t) = (a + b \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (a + b \cos(t)) \sin(t), \end{cases} \quad (5)$$

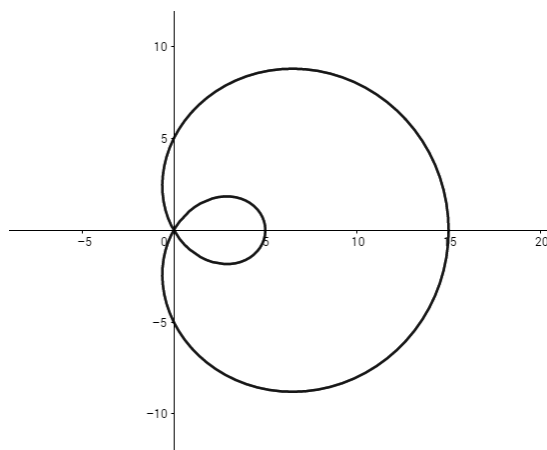
com  $t \in [0, 2\pi]$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.1.** Seja a limaçon de Pascal para  $a = 5$  e  $b = 10$ ,

$$\begin{cases} x(t) = (5 + 10 \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (5 + 10 \cos(t)) \sin(t), \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ . A Figura 16 mostra o traço desta curva.

**Figura 16.** Traço da limaçon para  $a = 5$  e  $b = 10$ .



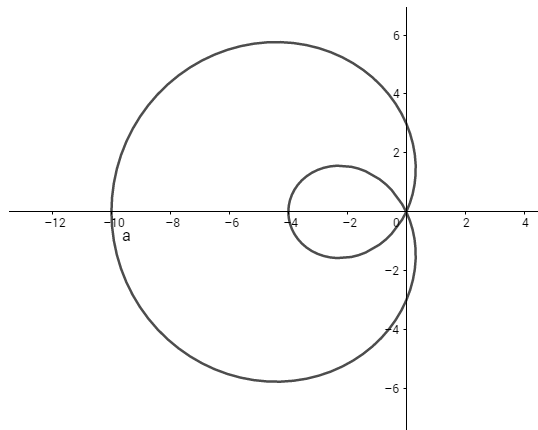
Fonte: Autor

**Exemplo 5.2.** Seja a limaçon de Pascal para  $a = -3$  e  $b = -7$ ,

$$\begin{cases} x(t) = (-3 - 7 \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (-3 - 7 \cos(t)) \sin(t), \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ . A Figura 17 mostra o traço desta curva.

**Figura 17.** Traço da limaçon para  $a = -3$  e  $b = -7$ .



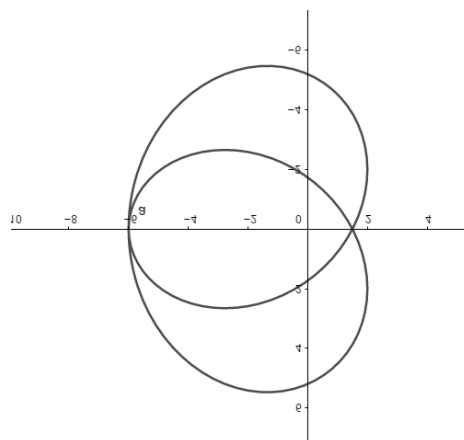
Fonte: Autor

**Exemplo 5.3.** Seja a limaçon de Pascal para  $a = 2$  e  $b = -8$ ,

$$\begin{cases} x(t) = (2 - 8 \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (2 - 8 \cos(t)) \sin(t), \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ . A Figura 18 mostra o traço desta curva.

**Figura 18.** Traço da limaçon para  $a = 2$  e  $b = -8$ .



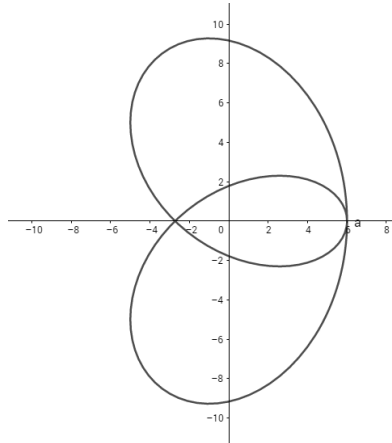
Fonte: Autor

**Exemplo 5.4.** Seja a limaçon de Pascal para  $a = -5$  e  $b = 11$ ,

$$\begin{cases} x(t) = (-5 + 11\cos(t))\cos(t), \\ y(t) = (-5 + 11\cos(t))\sin(t), \end{cases}$$

com  $t \in [0, 2\pi]$ . A Figura 19 mostra o traço desta curva.

**Figura 19.** Traço da limaçon para  $a = -5$  e  $b = 11$ .



Fonte: Autor

Em seguida, vamos apresentar um estudo sobre a circunferência e a cardioide e mostraremos também porque essas duas curvas podem ser consideradas uma limaçon de Pascal.

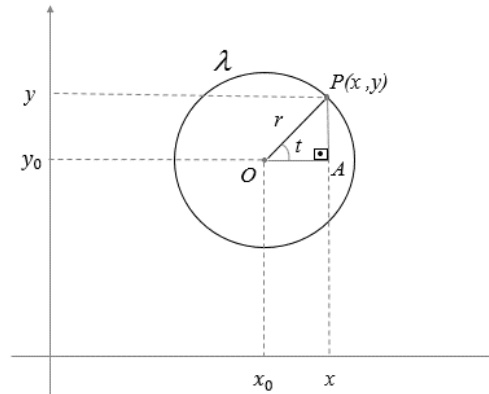
## 5.2 Circunferência

Uma circunferência é definida como um lugar geométrico formada pelo conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano que são equidistantes à um ponto dado.

**Definição 5.1.** Sejam  $\lambda$  uma circunferência de raio  $r$ , centrada de  $O(x_0, y_0)$  e  $P \in \mathbb{R}^2$ , então

$$P(x, y) \in \lambda \text{ se } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (6)$$

**Figura 20.** Circunferência centrada em  $O(x_0, y_0)$  e de raio  $r$ .



Fonte: Autor

Por (6), temos

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}\right) \in \lambda.$$

Assim, a partir da equação (7) e de conhecimentos prévios da trigonometria, temos

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{r} = \cos(t), \\ \frac{y-y_0}{r} = \text{sen}(t). \end{cases} \quad (8)$$

Logo, das Equações (8), para todo ponto  $P(x, y)$  pertencente à circunferência, temos as equações que parametrizam essa circunferência  $\lambda$  de centro  $O(x_0, y_0)$  e raio  $r$ :

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(t) + x_0, \\ y(t) = r \text{sen}(t) + y_0. \end{cases} \quad (9)$$

Em seguida, estabelecemos que a circunferência é um caso especial de limaçon de Pascal.

Sabemos que a limaçon é representada pelas Equações (5) e quando utilizamos a variável  $b = 0$ , obtemos:

$$\begin{cases} x(t) = (a + 0 \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (a + 0 \cos(t)) \text{sen}(t). \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = a \text{sen}(t). \end{cases} \quad (10)$$

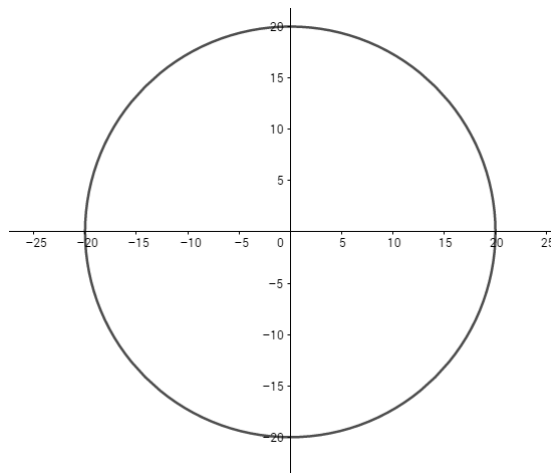


Notamos a partir das Equações (9) que as equações paramétricas descritas pelas Equações (10) representam uma circunferência de raio  $a$  centrada em  $O(0, 0)$ .

**Exemplo 5.5.** Expomos o traço da circunferência representada por  $\lambda(t) = (20\cos(t), 20\text{sen}(t))$  com  $t \in [0, 2\pi]$ , ou seja, consideramos  $a = 20$ .

A Figura 21 mostra o traço da curva  $\lambda(t) = (20\cos(t), 20\text{sen}(t))$ .

**Figura 21.** Traço da circunferência  $\lambda(t)$ .



Fonte: Autor

### 5.2.1 Estudo da circunferência

Vamos considerar uma circunferência qualquer representada pela aplicação, com  $a > 0$

$$\lambda: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow (a \cos(t), a \text{sen}(t)).$$

Derivando  $\lambda(t) = (a \cos(t), a \text{sen}(t))$  em algumas ordens, temos

$$\lambda'(t) = (-a \text{sen}(t), a \cos(t));$$

$$\lambda''(t) = (-a \cos(t), -a \text{sen}(t));$$

$$\lambda'''(t) = (a \text{sen}(t), -a \cos(t));$$

$$\lambda^{(IV)}(t) = (a \cos(t), a \text{sen}(t));$$

$$\lambda^{(V)}(t) = (-a \text{sen}(t), a \cos(t)).$$

Conforme o prosseguimento das derivadas, notamos que são cíclicas, isto é, a partir de um certo período ocorrem repetições. Além disso, todas as ordens são compostas por

funções  $\sin(t)$  e  $\cos(t)$  que são contínuas e diferenciáveis em todas as ordens para qualquer número real. Dessa forma, podemos concluir que  $\lambda(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$  é uma curva diferenciável de classe  $C^\infty$  em  $[0, 2\pi]$  cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio igual a  $a$ , com  $a > 0$ .

O vetor tangente da circunferência é expresso por  $\lambda'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t))$ .

Agora, vamos verificar se a circunferência  $\lambda$  é uma curva regular, ou seja, se o vetor velocidade não é nulo ( $\lambda'(t) \neq (0,0)$ ). Para isso, supomos que  $\lambda'(t) = (0,0)$ , então temos  $(-a\sin(t), a\cos(t)) = (0,0)$ . Logo,

$$\begin{cases} -a\sin(t) = 0 \\ a\cos(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-a\sin(t))^2 = 0, \\ (a\cos(t))^2 = 0. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} (a^2\sin^2(t)) = 0, \\ (a^2\cos^2(t)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

De (11) temos  $a^2\sin^2(t) + a^2\cos^2(t) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0$ ; esse fato se reduz ao absurdo uma vez que  $a \neq 0$ . Assim, concluímos que  $\lambda'(t) \neq (0,0)$  e, portanto, a circunferência é uma curva regular.

Sabendo que  $\lambda$  é uma curva parametrizada regular, então podemos definir a reta tangente a essa circunferência para qualquer ponto pertencente aos reais. Desta forma,  $\forall p_0, r \in \mathbb{R}$ ,

$$g(r) = (a\cos(p_0), a\sin(p_0)) + r(-a\sin(p_0), a\cos(p_0)). \quad (12)$$

Então, de (12) obtemos

$$g(r) = (a(\cos(p_0) - r\sin(p_0)), a(\sin(p_0) + r\cos(p_0))).$$

que representa a reta tangente.

Seja  $h(s) = \frac{s}{a}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ . A reparametrização de  $\lambda$  por  $h$  é a curva

$$\beta(s) = \lambda(h(s)) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a)).$$

Ao considerarmos o intervalo  $[0, 2\pi]$ , podemos ver, a seguir, o comprimento da curva  $\lambda(t)$  e de sua reparametrização  $\beta(s)$ .

$$\begin{aligned} s_\beta &= \int_0^{2\pi} |\beta'(s)| ds \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{((-a\sin(s/a))^2 + (a\cos(s/a))^2)} ds \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, ds = s \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi . \quad (14)$$

E, ainda,

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \int_0^{2\pi} |\lambda'(t)| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen}(t))^2 + (a \operatorname{cos}(t))^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |a| \, dt = |a| t \Big|_0^{2\pi} = |a|(2\pi - 0) = |a|2\pi . \end{aligned}$$

Por (13) e (14),  $\beta(s)$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, uma vez que  $|\beta'(s)| = 1$ .

Consideremos a curva  $\lambda(r) = (a \operatorname{cos}(r), a \operatorname{sen}(r))$ ,  $r \in [0, 2\pi]$ , para realização do estudo local das curvas; segue, portanto

$$T(r) = (-a \operatorname{sen}(r), a \operatorname{cos}(r));$$

$$N(r) = (-a \operatorname{cos}(r), -a \operatorname{sen}(r));$$

$$k(r) = \left( \frac{a \operatorname{cos}(r) a \operatorname{cos}(r) + (-a \operatorname{sen}(r))(-a \operatorname{sen}(r))}{\sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2(r) + a^2 \operatorname{cos}^2(r))^3}} \right) = \frac{1}{a} .$$

Para sua reparametrização, que vimos anteriormente,  $\beta(s) = (a \operatorname{cos}(s/a), a \operatorname{sen}(s/a))$ , temos,

$$T(s) = \beta'(s) = (-\operatorname{sen}(s/a), \operatorname{cos}(s/a));$$

$$N(s) = (-\operatorname{cos}(s/a), -\operatorname{sen}(s/a));$$

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{a} (\operatorname{cos}^2(s/a) + \operatorname{sen}^2(s/a)) = \frac{1}{a} .$$

Deste modo, podemos concluir que a curvatura da circunferência e sua reparametrização são iguais, assim como seus raios de curvatura, tal que  $\rho(s) = |a|$ .

### 5.3 Cardioide

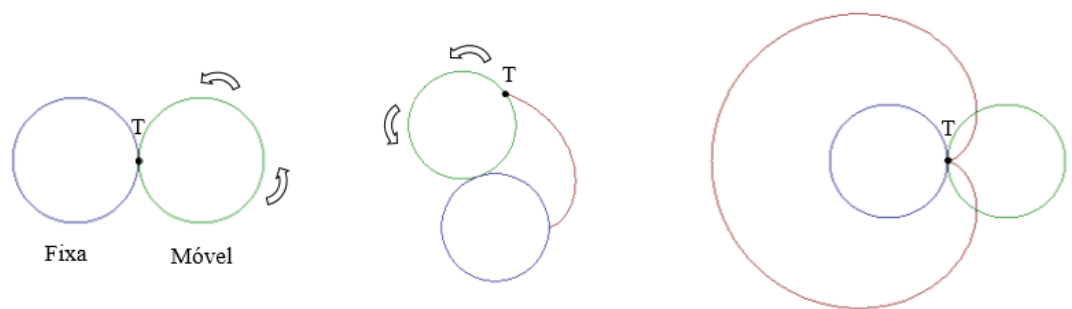
Abaixo temos um breve contexto histórico sobre a curva chamada cardioide e seu desenvolvimento.

A cardioide (do grego, *kardia*: coração e *eidos*: forma) é uma curva especial do limaçon de Pascal que teve características estudadas por muitos matemáticos, até mesmo anteriormente aos trabalhos realizados por Etienne Pascal sobre os conchóides, por volta de 1630. O matemático e pintor Albrecht der Messung, em meados de 1525, realizou um estudo

sobre maneiras de desenhar linhas na forma de caracóis com o intuito de aprimorar suas obras. A cardioide também foi explorada com um novo olhar, em 1674, pelo dinamarquês Ole Romer, quando relacionou a cardioide à uma engrenagem e suas dentições. Em 1708, determinou-se o perímetro da forma; esse feito foi realizado pelo matemático francês Philippe de La Hire. Até o momento, essa curva não era designada como conhecemos atualmente, e no ano de 1741, o matemático Johann Castillon atribuiu o nome *cardioide* à curva em sua publicação *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

A cardioide se aproxima da forma de um coração e pode ser obtida a partir de duas circunferências com mesmo diâmetro, sendo uma fixa e outra móvel. Marcamos um ponto tangente (T) entre as duas circunferências e traçamos o desenho que esse ponto gera conforme a circunferência gira em torno da outra. Este movimento está descrito na figura a seguir.

**Figura 22.** Formação da cardioide.



Fonte: <http://www.estgv.ipv.pt>

A limaçon de Pascal, curva apresentada anteriormente, caracterizada pelas Equações (5), degenera-se para uma cardioide quando as variáveis  $a$  e  $b$  são iguais. Assim:

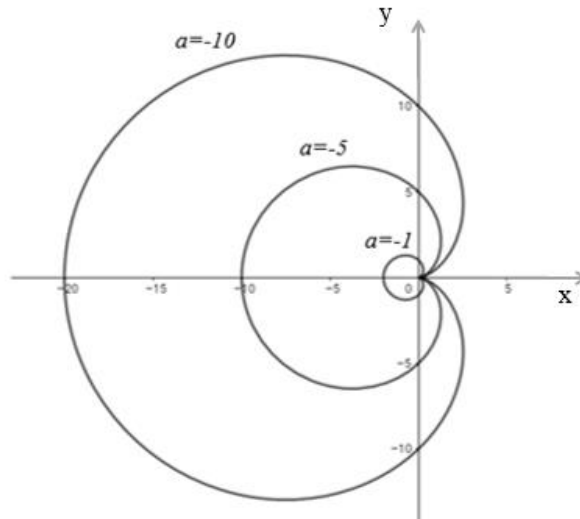
$$\begin{cases} x(t) = (a + a \cos(t)) \cos(t), \\ y(t) = (a + a \cos(t)) \sin(t), \end{cases} \quad (15)$$

com  $t \in [0, 2\pi]$  e  $a \in \mathbb{R}^*$ . Consideramos  $a \neq 0$  para que essas equações não se reduzam ao ponto (0,0). A partir das Equações (15), temos

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos(t)) a \cos(t), \\ y(t) = (1 + \cos(t)) a \sin(t). \end{cases}$$

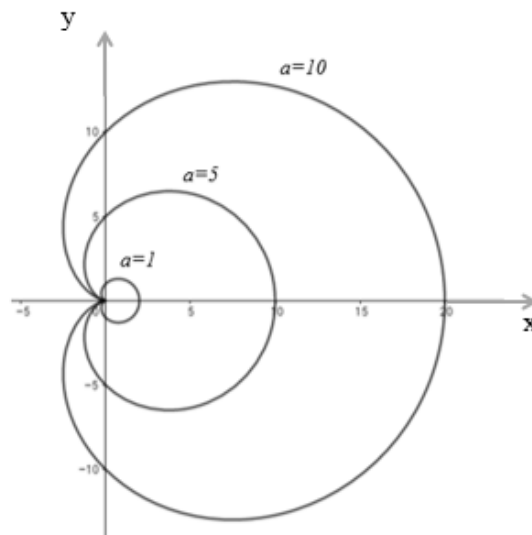
**Exemplo 5.6.** Traço de cardioides cada qual com um valor dado à variável  $a$ . Sendo:  $a = -10$ ,  $a = -5$  e  $a = -1$  (Figura 23) e  $a = 1$ ,  $a = 5$  e  $a = 10$  (Figura 24).

**Figura 23.** Traços das cardioides para  $a = -10$ ,  $a = -5$  e  $a = -1$ .



Fonte: Autor

**Figura 24.** Traços das cardioides para  $a = 1$ ,  $a = 5$  e  $a = 10$ .



Fonte: Autor

As Figuras 23 e 24 nos indicam que a disposição do traço, relativo ao eixo  $xOy$ , da cardioide se diferencia quando  $a$  é positivo e negativo.

### 5.3.1 Estudo da cardioide

Compreendemos que a cardioide é uma curva expressa pela seguinte aplicação,  
 $\forall a \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = ((a + a \cos(t)) \cos(t), (a + a \cos(t)) \sin(t)).$$

Assim, realizando derivadas em algumas ordens podemos fazer observações a respeito.

$$\gamma'(t) = (-2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t), a(\cos(2t) + \cos(t)));$$

$$\gamma''(t) = (-2a \cos(2t) - a \cos(t), -a(2 \sin(2t) + \sin(t)));$$

$$\gamma'''(t) = (8a \sin(t) \cos(t) + a \sin(t), -a(4 \cos(2t) + \cos(t)));$$

$$\gamma^{(IV)}(t) = (8a \cos(2t) + a \cos(t), a(8 \sin(2t) + \sin(t))).$$

Notamos uma padronização entre as derivadas de ordens pares, tanto quanto entre as derivadas de ordens ímpares. Apesar dos coeficientes numéricos se alterarem, as funções constituintes são as mesmas, tendo  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ ,  $\sin(2t)$  e  $\cos(2t)$  que são contínuas e diferenciáveis em todas as ordens. É importante ressaltar, proveniente do cálculo diferencial, que a multiplicação e a soma de duas funções contínuas, resultam em funções ainda contínuas. Logo, podemos concluir que a cardioide é uma curva parametrizada diferencial de classe  $C^\infty$ .

O vetor  $\gamma'(t)$  define a velocidade desta curva. Assim, temos  
 $\gamma'(t) = (-2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t), a(\cos(2t) + \cos(t))).$

Vamos verificar, neste momento, que a cardioide é uma curva regular, isto é,  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ . Para isso, supomos que  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (0, 0)$ , sendo  $x'(t) = -2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t)$  e  $y'(t) = a(\cos(2t) + \cos(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $a \in \mathbb{R}^*$ .

Assim, temos:

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow -2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } t = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } t = 2\pi.$$

E

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow a(\cos(2t) + \cos(t)) = 0$$

$$\Rightarrow t = \pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{3}.$$

Podemos ver que,  $\forall t \in [0, 2\pi]$ , não existe  $t$  tal que  $x'(t) = y'(t) = 0$ . Logo,  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$  e, por tanto, a cardioide é uma curva regular.

Determinamos, então, a reta tangente a cardioide,  $\forall t_0, r \in \mathbb{R}$ :

$$g(r) = ((a + a \cos(t_0)) \cos(t_0), (a + a \cos(t_0)) \operatorname{sen}(t_0)) + r(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t), a(\cos(2t) + \cos(t))).$$

O comprimento do arco da cardioide considerando o intervalo  $[0, 2\pi]$  é dado por

$$\begin{aligned} s_\gamma &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t), a(\cos(2t) + \cos(t)))| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t))^2 + (a(\cos(2t) + \cos(t)))^2} dt \\ &= 2a^2 t + 2a^2 \operatorname{sen}(t) \Big|_0^{2\pi} = 4a^2 \pi. \end{aligned}$$

A curva regular:

$$\beta(s) = (\gamma \circ h)(s) = ((a + a \cos(s+1)) \cos(s+1), (a + a \cos(s+1)) \operatorname{sen}(s+1)),$$

é a reparametrização da curva  $\gamma(t) = ((a + a \cos(t)) \cos(t), (a + a \cos(t)) \operatorname{sen}(t))$ , pois ocorreu uma mudança de parâmetro  $t$  para o parâmetro  $s$  por meio da função  $h(s) = s+1$ .

Como uma curva regular não se encontra necessariamente parametrizada por comprimento de arco, pela Definição 4.7, temos  $T(t)$  e  $N(t)$  que formam o referencial de Frenet. Considerando  $\gamma(t) = ((a + a \cos(t)) \cos(t), (a + a \cos(t)) \operatorname{sen}(t))$ , temos:

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t), a(\cos(2t) + \cos(t)))}{\sqrt{(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t))^2 + (a(\cos(2t) + \cos(t)))^2}} \\ &= \frac{(-a \operatorname{sen}(t) - 2a \cos(t) \operatorname{sen}(t), a \cos(t) + a \cos^2(t) - a \operatorname{sen}^2(t))}{\sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos(t)}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{(-a(\cos(2t) + \cos(t)), -2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t))}{\sqrt{(-2a \operatorname{sen}(t) \cos(t) - a \operatorname{sen}(t))^2 + (a(\cos(2t) + \cos(t)))^2}} \\ &= \frac{(-a \cos(t) - a \cos^2(t) + a \operatorname{sen}^2(t), -a \operatorname{sen}(t) - 2a \cos(t) \operatorname{sen}(t))}{\sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos(t)}}. \end{aligned}$$

Por fim, a curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{(-(-2a \cos(2t) - a \cos(t))(a(\cos(2t) + \cos(t))) + (-2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t))(-a(2 \sin(2t) + \sin(t))))}{\sqrt{((-2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t))^2 + (a(\cos(2t) + \cos(t)))^2)^3}}$$

$$= \frac{3a^2 + 3a^2 \cos(t)}{(2a^2 + 2a^2 \cos(t))^{3/2}}.$$

E o raio de curvatura da cardioide é dado por  $\rho(s) = \frac{1}{\left| \frac{3a^2 + 3a^2 \cos(t)}{(2a^2 + 2a^2 \cos(t))^{3/2}} \right|}$ .



## 6 Considerações finais

O presente trabalho de conclusão de curso estabeleceu os propósitos referidos em nossos objetivos, trazendo uma nova experiência ao abordar conhecimentos que não fizeram parte da graduação, incentivando-nos ainda mais com os estudos e pesquisas sobre o tema. A Geometria Diferencial possibilitou a interdisciplinaridade de conteúdos apreciados, como a Geometria, o Cálculo Diferencial e Integral e a Álgebra Linear.

Como a literatura sobre esse tema é abordada de forma mais robusta, realizamos um estudo introdutório sobre a Geometria Diferencial Plana, expondo pré-requisitos necessários para o entendimento dos conteúdos até o desenvolvimento introdutório da Teoria Local das Curvas. Utilizamos também a História da Matemática para escrever sobre o homem considerado pai da Geometria Diferencial: Gaspard Monge, um defensor da Revolução Francesa com muitas contribuições sobre o tema do nosso trabalho.

Nosso desenvolvimento sobre a Geometria Diferencial teve principal suporte no livro de Tenenblat (2008), por onde iniciamos nossos estudos com as curvas parametrizadas, entendendo sobre a continuidade, as curvas regulares, a reparametrização da curva e o comprimento do seu arco, para podermos falar sobre a Teoria Local das Curvas, desenvolvendo o referencial de Frenet e o Teorema Fundamental das curvas planas.

E findamos nosso trabalho conectando a Geometria Diferencial à curva limaçon de Pascal com mais dois casos específicos que foram escolhidos: a circunferência e a cardioide. Assim, nosso estudo evidencia que o conteúdo foi compreendido.

## Bibliografia

BENETTI, D. Um estudo sobre a Teoria Local de Curvas: Triedro de Frenet. TCC (Licenciatura em Matemática) – Departamento de matemática, UNEMAT, Sinop, 2009.

Disponível em:

<[http://sinop.unemat.br/site/download/tcc/tccs\\_do\\_curso\\_de\\_matematica/um\\_estudo\\_sobre\\_a\\_teorica\\_local\\_de\\_curvas\\_triedro\\_de\\_frenet\\_djeison\\_benetti.pdf](http://sinop.unemat.br/site/download/tcc/tccs_do_curso_de_matematica/um_estudo_sobre_a_teorica_local_de_curvas_triedro_de_frenet_djeison_benetti.pdf)>. Acesso em: 17 nov. 2017.

Cardioid. Disponível em: < <http://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html>>. Acesso em: 30 nov. 2017.

Cardioide. Disponível em:

< <http://knoow.net/cienciasexactas/matematica/cardioide/>>. Acesso em: 30 nov. 2017.

Cardioide. Disponível em:

<Fonte: <http://www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/ppestanda/cardioide/epicicloide.htm>>. Acesso em: 20 nov. 2018.

COIMBRA, J.R.V. Uma introdução à Geometria Diferencial. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em:

<[http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307015/1/Coimbra\\_JosededeRibamarVia\\_na\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307015/1/Coimbra_JosededeRibamarVia_na_M.pdf)>. Acesso em: 03 out. 2017.

FERRETO, D. Curvas: Estudo e Visualização com o software Cabri-Gèomètre II. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003. Disponível em:

<[https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96807/Daniel\\_Ferreto.PDF?sequence=1](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96807/Daniel_Ferreto.PDF?sequence=1)>. Acesso em: 05 mar. 2018.

Gaspard Monge. Disponível em: < <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Monge.html>> Acesso em: 02 de mar. 2018.

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo: Volumes II e IV, 5ª edição. Editora LTC, 2007.

LIMA, E. L. Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

LIMA, R. F. INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL. Amapá: SBM, 2016. 139 p. Disponível em: <[https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2016/06/Introdu%C3%A7%C3%A3o-a-Geometria-Diferencial\\_Ronaldo-Freire-Lima.pdf](https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2016/06/Introdu%C3%A7%C3%A3o-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf)>. Acesso em: 13 out. 2017.

LIMA, R. F. Topologia e Análise no Espaço  $R^n$ . Rio de Janeiro: SBM, 2015. Coleção Textos Universitários.

Limaçon. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html>>. Acesso em: 30 mar. 2018.

Limaçon de Pascal. Disponível em: <<https://www.mathcurve.com/courbes2d/limaçon/limaçon.shtml>>. Acesso em 10 jan. 2018.

MIYASAKI, R. Um estudo de curvas planas utilizando o GeoGebra. Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

TEZOTO, L. Sobre o Teorema da Função Inversa. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/124069/000832268.pdf;jsessionid=8CC926D4626E1DACEFE842CA75F2CBE8?sequence=1>> . Acesso em: 15 nov. 2017

RODRIGUES, L. M. D. de Á. Minicurso Teoria Local das Curvas Planas. In: XXIII Semana do IME – Universidade Federal de Goiás, Goiânia. Disponível em: <[https://semanadoime.mat.ufg.br/up/34/o/min\\_Luciana.pdf](https://semanadoime.mat.ufg.br/up/34/o/min_Luciana.pdf)>. Acesso em: 05 mar. 2018.

SANTANA, A. P., QUEIRÓ, J.F. INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

SIMONI, R. Teoria Local das Curvas. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Disponível em:

<[https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96536/Roberto\\_Simoni.pdf?sequence=1](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96536/Roberto_Simoni.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 15 mai. 2018.

STEWART, J. Cálculo: Volume II, 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TENENBLAT, K. INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008. 269 p.