Universidade Federal De São Carlos
***Campus* Sorocaba**

Análise de erros em um contexto geométrico envolvendo alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Trabalho de Conclusão de Curso

Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Sorocaba 2016

Universidade Federal De São Carlos
***Campus* Sorocaba**

Análise de erros em um contexto geométrico envolvendo alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Autor: Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física, Química e Matemática (DFQM) da UFSCar, Campus Sorocaba, como requisito parcial para a obtenção da graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Licenciatura em Matemática

Sorocaba 2016

Folha de aprovação

Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza

Análise de Erros em um Contexto Geométrico Envolvendo Alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 20/12/2016.

Orientador ______________________________
Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Membro 2 ______________________________
Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela

Membro 3 ______________________________
Prof. Dr. Antonio Noel Filho

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que sempre me ajudaram a superar as dificuldades. Principalmente a minha mãe Jurema e ao meu pai Jobe, que me educaram e me ajudaram chegar onde eu queria. Aos meus irmãos Júlia e Willian. E aos meus amigos de curso.

Agradecimentos

Agradeço A Deus que me guiou e me conduziu desde o início desta empreitada, não se esquecendo de Nossa Senhora, Mãe de Nosso Senhor Jesus Cristo e nossa Mãe, que me protege de todos os perigos e que sempre intercede por mim junto do Pai.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo César Oliveira, por me conduzir na área de pesquisa da Educação Matemática, pela qual hoje tenho imenso carinho, sempre motivando a estudar mais e principalmente por abrir portas que aproveitei durante minha caminhada de graduação, obrigado especialmente pela paciência e dedicação comigo.

Aos meus professores da graduação que estiveram comigo por toda minha graduação, tirando dúvidas e fazendo com que eu amadurecesse e me dando bases para ser um bom profissional.

Aos meus amigos da graduação de forma muito especial às turmas 010 de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física, que com certeza serão grandes vitoriosos.

Aos meus familiares que tanto me deram apoio e me confortaram durante toda a jornada que trilhei nos últimos anos, especialmente meus pais e irmãos.

E por fim, a todos aqueles, ao qual guardo um carinho especial e que estiveram presentes comigo em algum momento desta minha jornada e que não estão mais presentes em minha vida, mas que onde estiverem oram por mim.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo a classificação e a análise dos erros apresentados nas respostas dos alunos em uma sequência de tarefas, que apresenta como objetivo comparar a área da superfície de embalagens de leite condensado com diferentes dimensões. Os indivíduos participantes da pesquisa apresentaram dificuldades na disciplina de matemática, sendo assim, ao se analisar suas respostas buscou se responder as questões “Quais são os erros apresentados com maior frequência pelos alunos?” e “Quais os possíveis motivos que os levam a apresentar tais erros?”. A pesquisa é de caráter qualitativo, no qual os erros apresentados pelos alunos foram classificados com base na Taxionomia proposta por Rafaella Borasi e como suporte para análise das respostas foi utilizado os estudos acerca dos Registros de representação semiótica proposta por Raymond Duval. Ao final da pesquisa pode-se observar que o erro de arredondamento de números decimais foi o erro de maior frequência apresentado pelos alunos, sendo que, o pouco tratamento das regras de arredondamento durante o ensino fundamental pode ter contribuído para o resultado apresentado.

Palavras-chave: geometria, volume, ensino fundamental, análise de erro, registros de representação semiótica.

ABSTRACT

This work aimed to classify and analyze the errors presented in the students' answers in a sequence of tasks, which aims to compare the surface area of condensed milk containers with different dimensions. The individuals who participated in the research presented difficulties in the mathematics discipline, so, when analyzing their answers, they sought to answer the questions "What are the errors most frequently presented by the students?" And "What possible reasons that lead them to present such Errors? ". The research is qualitative, in which the errors presented by the students were classified based on the Taxionomia proposed by Rafaella Borasi and as support for the analysis of the answers was used the studies about the Registers of semiotic representation proposed by Raymond Duval. At the end of the research it can be observed that the error of rounding of decimal numbers was the error of greater frequency presented by the students, being that the little treatment of the rules of rounding during the elementary school may have contributed to the presented result.

Keywords: geometry, volume, elementary school, error analysis, registers of semiotic representation

Lista de Ilustrações

Figura 1: Área lateral do cilindro. 25
Figura 2: Área lateral da superfície de um prisma. 26
Figura 3: Volume de um cubo. 27
Figura 4: Volume de um paralelepípedo. 28
Figura 5: Atividades sobre o volume do paralelepípedo. 28
Figura 6: Atividade com a proposta de determinar a área da região solicitada 28
Figura 7: Atividade que relaciona o volume com a área retangular. 29
Figura 8: Atividade proposta sobre volume do prisma 30
Figura 9: Sólido utilizado para os itens e a g sobre volume do prisma. 30
Figura 10: Figuras da atividade introdutória do volume do cilindro. 31
Figura 11: Itens presentes na atividade introdutória do volume do cilindro. 31
Figura 12: Atividade sobre o volume do cilindro. 32
Figura 13: Figura da atividade introdutória do volume do cone. 33
Figura 14: Quadro resumo sobre o volume da pirâmide. 33
Figura 15: Introdução ao volume de uma esfera. 34
Figura 16: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item a. 43
Figura 17: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item a. 43
Figura 18: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item a. 44
Figura 19: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item a. 45
Figura 20: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item a. 45
Figura 21: Resposta apresentada pelo aluno A8 para o item a. 46
Figura 22: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item b. 48
Figura 23: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item b. 49
Figura 24: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item b. 49
Figura 25: Resposta apresentada pelo aluno A3 para o item b. 50
Figura 26: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item b. 50
Figura 27: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item b. 51
Figura 28: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item b. 51
Figura 29: Resposta apresentada pelo aluno A8 para o item b. 51
Figura 30: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item c. 54
Figura 31: Resposta apresentada pelo aluno A9 para o item c. 55
Figura 32: Resposta apresentada pelo aluno A1 para o item c. 55
Figura 33: Resposta apresentada pelo aluno A3 para o item c. 56
Figura 34: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item c. 56
Figura 35: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item c. 57

Figura 36: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item c. 57
Figura 37: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item c. 58
Figura 38: Expressão apresentada, no item c, pelo aluno A3. 60
Figura 39: Dados apresentados pelo aluno A3 para o item d. 61
Figura 40: Expressão apresentada, no item c, pelo aluno A2. 62
Figura 41: Dados apresentados pelo aluno A2 para o item d. 62
Figura 42: Exemplo de processo realizado pelo aluno A4 com o erro E15. 63
Figura 43: Exemplo de processo realizado pelo aluno A7 com o erro E16. 63
Figura 44: Exemplo de processo realizado pelo aluno A9 com o erro E16. 63
Figura 45: Reposta apresentada para o item pelo aluno A9. 65

Lista de Tabelas

Quadro 1: Taxionomia de Borasi para os usos dos erros. 18
Quadro 2: Distribuição das respostas dos alunos. 40
Quadro 3: Erros presentes no item a. 40
Quadro 4: Resposta esperada para o item a. 41
Quadro 5: Erros presentes no item b. 47
Quadro 6: Resposta esperada para o item b. 47
Quadro 7: Erros presentes no item c. 52
Quadro 8: Reposta esperada para o item c. 53
Quadro 9: Erros presentes no item d. 59
Quadro 10: Resposta esperada para item d. 59

Sumário

INTRODUÇÃO 11

1. ANÁLISE DE ERROS 13

2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A GEOMETRIA 20

3. ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO DE GEOMETRIA 23

3.1 O Sistema de Ensino SER 24

3.2 Análise do Caderno 5 do 9º ano do Ensino Fundamental............................24

4. METODOLOGIA 35

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS 39

CONSIDERAÇÕES FINAIS 66

Referências Bibliográficas..68

INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentada a motivação para realiza-lo, como também a problemática, o objetivo, a questão de pesquisa, a fundamentação teórica que norteou os estudos, a metodologia e os resultados do trabalho de campo.

A motivação para o este trabalho partiu do relato da experiência pedagógica do professor orientador, desenvolvida no projeto teia do saber, no qual consistia em comparar as áreas de caixas de sabão com diferentes dimensões, entretanto, a utilização da embalagem de leite condensado, veio da observação do orientando a respeito das diferentes dimensões das embalagens em um supermercado próximo a sua casa.

A proposta de se trabalhar a análise da sequência de atividades pela ótica da "Análise de erros", foi sugestão do orientador deste trabalho, no caso o professor Dr. Paulo César Oliveira. O estudo sobre este campo da Educação Matemática, me permitiu ter uma nova visão sobre a minha prática em sala de aula, na qual me tornou mais atento aos erros dos alunos, como também aos conceitos primitivos que os alunos apresentavam sobre determinado conteúdo matemática.

No início do ano de 2015, comecei a lecionar no Colégio Vincere, unidade de ensino particular localizada na zona oeste de Sorocaba, no qual leciono para as turmas do fundamental 2 e ensino médio, entre estes alunos estão os indivíduos alvo desta pesquisa, que em 2015 estavam no 8º ano do ensino fundamental. Em sua maioria, estes alunos, apresentavam rendimento abaixo da média para disciplina de Matemática, o que foi motivador para que estes fossem os indivíduos alvos desta análise, podendo observar suas produções por meio da análise de erros.

Este trabalho tem como objetivo analisar e classificar os erros apresentados pelos alunos, por meio da perspectiva da Análise de Erros. Como forma de complementar a análise das resoluções apresentadas pelos alunos, se utilizará também os Registros de Representações Semiótica, propostos por Raymond Duval (2009).

Neste trabalho se busca responder as questões "**Quais são os erros apresentados com maior frequência pelos alunos?**" e "**Quais os possíveis motivos que os levam a apresentar tais erros?**".

A estrutura da redação deste trabalho é composta de quatro capítulos, conforme descrição a seguir.

O primeiro capítulo apresenta uma perspectiva histórica da construção da teoria da Análise de Erros, no qual se apresenta os trabalhos desenvolvidos que serviram de inspiração ou que apresentam características importantes para o desenvolvimento desta teoria por Rafaella Borasi na década de 80, como também dos trabalhos desenvolvidos por Helena Noronha Cury sobre o tema no Brasil.

O segundo capítulo apresenta um panorama dos estudos acerca dos Registros de representação semiótica propostos pelo educador francês Raymond Duval, principalmente nos aspectos de conversão e tratamento dos registros apresentados pelos alunos durante a análise das tarefas propostas.

O terceiro capítulo apresenta-se a análise do material didático do sistema de ensino Ser, utilizado pelos alunos participantes da pesquisa, esta análise foi realizada sob a perspectiva dos Registros de representação semiótica, principalmente utilizando como referencial o trabalho desenvolvido por Duval (2012a) entorno dos registros matemáticos referentes a geometria.

No quarto capítulo é apresentada a classificação e a análise das tarefas realizadas pelos alunos, utilizando como referências a taxionomia de erros proposta por Rafaella Borasi para a classificação dos erros e os Registros de representação semiótica como suporte para análise das respostas apresentadas pelos alunos.

Por fim, é apresenta as considerações finais sobre o trabalho que fora desenvolvido como as reflexões sobre os resultados obtidos da pesquisa, no qual espera-se que a mesma seja um motivador para outros trabalhos na área da Educação Matemática.

1. ANÁLISE DE ERROS

Este trabalho tem como aporte teórico a Teoria da Análise de erros, no qual se utilizará como principal fonte teórica o livro “Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos”, de 2007, este escrito pela educadora matemática Helena Noronha Cury, entretanto se utilizará com maior destaque do trabalho desta educadora, os apontamentos e discussões sobre o trabalho desenvolvido pela educadora italiana Rafaella Borasi entorno da “Taxionomia dos erros”.

A teoria da análise de erros é um campo de estudos da Educação Matemática que tem influências das teorias do campo da Pedagogia como da Psicologia, e que se modificou e se adaptou através do tempo, se adequando as teorias vigentes de cada período.

Os estudos que deram início e aporte para construção do campo de estudo da Análise de erros, teve como origem as experiências com animais realizados por Thorndike e Pavlov, no final do século XIX e inicio do século XX, como aponta Curry (1995). Thorndike e suas teorias “estreitaram” o campo da Psicologia Educacional; sua “fé” na Psicologia Experimental e suas experiências com animais afastaram a Psicologia da prática escolar.

Pode-se destacar ainda dos estudos de Thorndike a lei do exercício, no qual aponta que o uso fortalece as conexões mentais e o desuso vem enfraquecê-las; a lei do efeito, no qual aponta que atividades que tragam satisfação associadas a sua prática tendem a fortalecer as conexões mentais e atividades que trazem algum tipo de aborrecimento, tendem a enfraquecer essas conexões e, por fim, temos a última lei, intitulada de “princípio do reforço”. Neste caso, Thorndike acreditava que era necessário o reforço dos vínculos e hábitos que permitiam aos alunos a realização de Cálculos, porém, este método sofreu críticas de outros pesquisados. Segundo Beliner (1993) apud Cury (2007, p. 20), Thorndike era “um produto de sua época como nós somos da nossa, e somos obrigados a olhar diferentemente para suas colaborações, assim como ele era obrigado a sustentar as convicções que tinha”.

Outro nome importante para o campo da Análise de erros é o francês Jacques Hadamard, que inspirado nas ideias sobre as relações entre consciente e inconsciente de Henri Poincaré, apresentadas durante a conferência na Sociedade de Psicologia de Paris, a escrever o seu *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, em 1945, que dentre os diversos tópicos abordados, encontram-se algumas considerações sobre os erros e falhas cometidas por matemáticos experientes.

Muitas das ideias de Hadamard desencadearam reflexões sobre o papel da Psicologia no estudo da criação Matemática. Cury (2007, p.25) apontou, em seu livro, alguns pontos enfatizados por Hadamard em sua obra, sobre as dificuldades dos alunos em entender matemática,

> Segundo ele [Hadamard], muitas vezes, ao tentar ensinar, os professores se debruçam demasiadamente sobre cada parte de um argumento, não apresentando a síntese que representaria o resultado. Se um aluno entende por si só essa síntese, “aprende” a Matemática, mas se ele sente que está faltando algo e não compreende o que errado, fica totalmente perdido e não consegue superar a dificuldades. (HADAMARD (1945), apud. CURY (2007, p. 25))

Vadim Andreevich Krutetskii foi um psicólogo russo, que tem como obra mais conhecida *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, traduzida em 1976 para o inglês por Kilpatrick e Wirszup. Os estudos de Krutetskii vieram em contrapartida, aos estudos desenvolvidos no ocidente, no qual estes, mesmo obtendo grandes desenvolvimentos em pesquisas, sempre calcavam a metodologia em testes, entretanto, na União Soviética, em 1936, o Comitê Central do Partido Comunista havia banido os testes mentais, no qual justificavam que tais testes não forneciam informação sobre “o nível potencial de desempenho dos alunos ou os processos que eles utilizavam para responder aos itens do teste” (KILPATRICK; WIRSZUP (1976) apud CURY (2007, p. 26).

Neste período Krutetskii foi responsável pelos estudos sobre habilidades, no departamento de Psicologia Educacional da Academia de Ciências Pedagógicas da antiga União Soviética, na qual dirigiu suas pesquisas para a estrutura e formação das habilidades matemáticas e que, segundo Cury (2007), foi um trabalho pioneiro, pois apresentava metodologias variadas e participação de alunos, pais e professores.

Os trabalhos de Krutetskii abriram um novo caminho para as pesquisas sobre a produção dos alunos, quaisquer que sejam seus objetivos, pois estas pesquisas passaram a enfatizar a importância de se analisar o processo e não apenas o produto, ou seja, deixa de analisar somente o resultado final de um exercício ou a alternativa assinalada em um teste de múltipla escolha.

Um aspecto importante para se destacar dos estudos de Krutetskii, foi a metodologia de suas pesquisas, na qual envolveu, entre outros procedimentos, experiências com grupos de alunos que fossem eles talentosos ou não, por períodos longos ou curtos, com a observação de suas atividades ao resolver problemas e uso, em algumas oportunidades, do “pensar em voz alta”; diálogos com os estudantes, entrevistas com os pais, professores e amigos, como também aplicação de questionários aos professores de Matemática e matemáticos, com o objetivo de compreender o que entediam por “habilidade matemática” (CURY, 2007, p.28).

Do trabalho desenvolvido por Krutetskii, Cury (2007, p.28) considerou que

> [...] para a análise de erros, além dos vários tipos de problemas propostos, vale a ênfase na observação detalhada da resolução, com o cuidado de registrar o pensamento em voz alta os estudantes, de questionar suas respostas, para verificar como pensavam ao solucionar as tarefas. Essa é, em meu entender, a maneira de enfatizar o produto – ou seja, enfocar a atenção a produção escrita ou oral, para, a partir dela, voltar ao aluno e auxiliá-lo a fazer uma análise da sua forma de aprender.

Segundo a autora, no campo do processamento da informação, tem-se Allen Newell e Herbert Simon, que por meio de sua obra *Human problem solving*, publicada em 1972, que se tornaria um clássico deste campo, tentam ver o ser humano como um processador de informação, cujo pensamento pode ser explicado por meio das abordagens cognitivas surgidas das após a Segunda Guerra Mundial, como a cibernética e a teoria da informação.

Estes autores buscaram desenvolver a partir destas investigações um programa de computador para simular o comportamento de um sujeito ao resolver um problema, porém enfatizando que eles não buscavam comparar o comportamento humano ao comportamento de uma máquina, e sim por meio desta realizar uma analogia entre o software e o comportamento de um organismo.

Deste estudo pode-se apresentar dois aspectos importantes para a teoria da análise de erros; o primeiro são os chamados protocolos verbais, que nada mais são que as transcrições das falas dos alunos ao resolver um problema, ou seja, o chamado 'pensar em voz alta'. O segundo ponto a se destacar, dos resultados obtidos nos trabalhos de Newell e Simon, é a constatação que algumas partes do comportamento resolutivo dos alunos foi determinada por erros específicos por eles cometidos e que não estão previstos na teoria elaborada por Newell e Simon (CURY, 2007, p.30).

Uma importante contribuição para análise de erros está no aspecto dos erros constituídos em obstáculos, e mais precisamente na ideia de obstáculo epistemológico. O responsável por introduzir a noção de obstáculo epistemológico é Guy Brousseau, que apresentou originalmente seu texto em 1976, no 28º CIEAEM (*Comission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*), na Bélgica. A partir desde trabalho, outros pesquisadores da área da Didática da Matemática começaram a contribuir para construção da noção de obstáculo epistemológico, entre eles, Michele Artigue e Habiba El Bouazzouni.

A noção de obstáculo epistemológico está relacionada ao conhecimento adquirido por um individuo sobre um determinado conteúdo, e que, em muitos casos, se torna falso, muitas vezes devido há uma generalização incorreta deste conhecimento. Este fato é apontado por Cury (2007) em uma citação de Brousseau (1983), que realizou uma aproximação da noção de obstáculo epistemológico e erro.

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e impresíveis, eles são constituídos em obstáculos. (BROUSSEAU, (1983, p.171) apud CURY, (2007, p.33)

É importante destacar, deste trecho, o fato de que Brousseau não utilizou do adjetivo 'epistemológico', focando-se mais precisamente nos "erros que são gerados a partir de um conhecimento prévio que não foi generalizado de maneira adequada ou transposto para uma nova situação ou problema" (CURY, p. 33, 2007).

Um exemplo deste tipo de erro é apresentado por Cury (2007), no qual o aluno considerou que a soma das raízes quadradas é igual a soma das raízes quadradas das parcelas.

> Parece que há um conhecimento que funcionou em vários exercícios, a saber, que existindo $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$, então $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, e que o estudante falsamente generaliza para $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Se o aluno acertava questões em que era solicitada a raiz quadrada do produto, parece que ele não consegue separar a visualização daquele esquema, daquela estrutura, para outra situação na qual ele não se sente seguro, como é o caso da raiz quadrada da soma. (CURY, 2007, p. 33-34)

Neste caso, o aluno pode não ter desenvolvido suficiente a habilidade de transformar a raiz quadrada em uma potência de expoente meio, que lhe permitiria, talvez, lembrar das propriedades que são validas nas potências e que, neste caso, sua generalização estaria incorreta.

Segundo Curry (2007) ao aproximar a noção de obstáculo à ideia de erro, tem que se considerar que o obstáculo é um conhecimento. Sendo assim, o aluno construirá este conhecimento relacionando-o com outros, em diferentes situações, tentando modificá-los as novas situações que lhe são apresentadas. Este fato acarreta uma resistência em abandonar este obstáculo e, por esse motivo, torna-se tão difícil em superá-lo, “pois para isso o aluno em conjunto com o professor, terá que trabalhar este conhecimento da mesma maneira que o faz quando se constrói um novo conhecimento, tendo aquele falso saber, que funcionava na situação anterior, como plano de fundo desta nova construção” (CURY, 2007, p. 34-35).

Em meados dos anos 80, a pesquisadora italiana Raffaella Borasi apresentou uma abordagem da análise de erros que se diferenciava das apresentadas anteriormente, na qual buscava ampliar as possibilidades da aplicação da análise de erros no processo de ensino-aprendizagem, não se atendo tão somente no sentido de identificar e classificar os erros cometidos pelos alunos e propor estratégias para eliminá-los. Destaca-se dessas possibilidades duas que são apontadas por Cury (1995), sendo a primeira a utilização dos erros como instrumentos para explorar o funcionamento da mente, e a segunda o aproveitamento dos erros como elementos fundamentais para o desenvolvimento de uma disciplina.

Segundo Cury (1995), Borasi considerou que a análise dos erros está ligada a dois objetivos, neste caso, sendo eles a eliminação deste erro ou a exploração das potencialidades dos mesmos, independente do caso se estará focalizando o conteúdo técnico-matemático do erro, a natureza da Matemática ou o processo de aprendizagem da disciplina (CURY, 1995, p. 46).

Este novo enfoque para a análise de erros, apresentado por Borasi, com o passar dos anos foi sendo modificado e aperfeiçoado, e uma importante contribuição dessa autora é o que ela chama de "taxionomia de usos dos erros como trampolins para pesquisa", que consiste em um quadro que resume as possibilidades dos usos de erros por meio da classificação destes. Este quadro é apresentado por Cury (2007), com algumas adaptações e simplificações da última versão apresentada por Borasi.

Quadro 1: Taxionomia de Borasi para os usos dos erros.

Objetivo da aprendizagem	**Nível de discurso Matemático**		
	Realização de uma tarefa matemática específica	**Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático**	**Compreensão sobre a natureza da Matemática**
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir a tarefa com sucesso.	Análise de Erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática o de conteúdos específicos.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultado intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemática.	Erros e resultado intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultado intrigantes motivam questões que podem levar a *insights* e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

Fonte: BORASI (1996) apud CURY, (2007, p.37)

A aplicação destas nove maneiras de se usar os erros pode aparecer separada ou combinada. Um exemplo da ocorrência dessas junções é apresentado por Cury (2007):

> [...] em um determinado momento, um professor pode estar interessado apenas em remediar os erros que detecta nas produções de seus alunos, mas, posteriormente, ou com outra turma, pode encontrar um resultado intrigante que o leva a aprofundar-se no conteúdo matemático ou, mesmo, a propor a seus alunos que se engajem com ele na pesquisa. (CURY, 2007, p.38)

Cury (2007) relatou que de todas as experiências desenvolvidas por Borasi com uso dos erros, destaca-se as discussões registradas pela pesquisadora, que permitiram não só o desenvolvimento de sua própria pesquisa sobre erros, como também a utilização desses erros para o ensino de Matemática (CURY, p. 38, 2007).

Todas as ideias que levaram ao desenvolvimento da teoria da análise de erros, ainda vêm sendo retomadas, aprofundadas, modificadas e iluminadas por novas teorias, influenciadas pelas mudanças na sociedade que trazem novos rumos e objetivos para as pesquisas nesta área da Educação Matemática.

Entretanto, para justificativa das questões elaboradas para aplicação e como forma de suporte para a interpretação dos dados apresentados, ou seja, para análise dos erros apresentados pelos alunos, se utilizará, como apoio a fundamentação teórica, os Registros de representação semiótica que será abordado no próximo capítulo.

2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A GEOMETRIA

Para este trabalho utilizou-se dos registros de representação semiótica, para justificativas das questões elaboradas e como apoio as discussões entorno da análise dos erros apresentados na atividade, se utilizará os registros de representação para a análise do material didático utilizado pelos alunos.

O termo registros de representação semiótica é utilizado para designar os diferentes tipos de representação semiótica, tais como: língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica esses são exemplos de diferentes tipos de registros de representação.

Segundo Duval (2012b) para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose[1]. A primeira atividade cognitiva esta ligada a possibilidade de se confirmar o que está sendo apresentado, sendo assim, dize-se que uma representação é identificável, no caso da matemática, o objeto matemático que a representa, segundo Duval (2012b) os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele.

Ainda segundo Duval (2012b), em relação a possíveis confusões entre os objetos e suas representações temos que,

> De fato, toda a confusão acarreta, em mais ou menos a longo do termo, uma perda da compreensão e os conhecimentos adquiridos tonam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. (DURVAL, 2012b, p. 268)

A segunda é o tratamento de uma representação, que são as modificações da representação de um objeto que pertence ao mesmo registro inicial, assim sendo, o tratamento é uma mudança intrínseca do registro.

---

[1] Duval (2012b, p. 270) apresenta em seu trabalho dois termos de origem grega, no caso semiose que é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e noesis que é a apreensão conceitual de um objetivo, ainda em seu trabalho Duval (2012b, p. 270) afirma que a noesis é inseparável da semiose.

A última atividade cognitiva apresentada por Duval (2012b) é a conversão, que são as transformações externas dos registros, ou seja, as mudanças de um registro para outro conservando totalmente ou parte somente da representação inicial.

Segundo Duval (2009) ao se estudar os fenômenos relativos ao conhecimento se faz necessário recorrer à noção de representação. É a semiótica a natureza dessa representação e, de modo geral, é preciso considerar a tríade: signo que é relacionado a um objeto concreto, no caso particular da matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito).

Ainda segundo Duval (2009) não se pode ter compreensão em matemática, se não distingui se um objeto de sua representação, como dito anteriormente, cabe-se enfatizar para a necessidade de não se confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

Quando um aluno consegue coordenar as conversões e tratamentos de um objeto matemático de formar espontânea, significa que ocorreu de fato uma aprendizagem de determinado conceito.

Para a Geometria Duval (2012a) aponta alguns aspectos que tornam os problemas, relacionados à geometria, interessantes. Desses aspectos pode-se destacar característica intermediaria que a geometria tem em relação a língua usual e a língua formalizada. Outro ponto a se destacar é o fato que a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que se originam de interpretações autônomas.

Assim Duval (2012a) distingue as seguintes interpretações:

- Apreensão perceptiva é aquela que a identificação ou distinção da forma geométrica no plano ou no espaço é feita de forma imediata ou automática.
- Apreensão operatória esta relacionada às modificações possíveis que uma figura inicial pode sofrer e nas reorganizações destas modificações, para a resolução de um problema ou para demonstrar alguma propriedade. Está apreensão está ligada a existência de congruência entre ela e o tratamento matemático possível do problema.

- Apreensão discursiva é solicitada para os casos no qual não há existência de congruência ou explicitamente como justificativa teórica, para a resolução do problema proposto.
- Apreensão sequencial é solicitada em atividades que exigem a construção ou a descrição de figuras geométricas por meio de instrumentos (régua, compasso, software, etc), tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.

Para apreensão operatória Duval (2012b, p. 127) a divide em três tipos de modificações figurais que são: Modificações mereológicas, Modificações óticas e Modificações posicionais.

As modificações mereológicas envolvem a divisão de uma figura inicial em partes formando várias subfiguras, e reorganizando-as, forma-se uma subfigura da figura inicial. As modificações óticas associam o aumento, a diminuição e/ou deformação da figura inicial, ou seja, está ligada a transformação da figura em outra, chamada sua imagem. Tal modificação pode ser feita através do uso de espelhos, no qual pode-se conservar a forma original ou alterá-la. Por fim, há as modificações posicionais que estão relacionadas ao deslocamento e/ou rotação da figura inicial em relação a um referencial do campo onde ela se destaca.

No próximo capítulo será analisado o material didático na perspectiva dos registros de representação semiótica, como ênfase maior para os estudos entorno da geometria propostos por Duval (2012a).

3. ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO DE GEOMETRIA

Primeiramente se apresentará brevemente a perspectiva didática do autor do material didático destinado à matemática do Sistema de Ensino SER. O caderno que trata da disciplina de Matemática foi desenvolvido por Luiz Roberto Dante, tendo em vista a resolução de problemas. Segundo Dante (1999) apud Oliveira e Santana (2012), a resolução de problemas como atividade matemática é caracterizada de maneiras distintas.

O problema-padrão é aquele que não existe há necessidade de se formular uma estratégia, sendo possível resolvê-lo por um ou mais algoritmos, anteriormente desenvolvido em aula. O problema de aplicação ou situação-problema que consiste em problemas que apresentam, em sua formulação, situações do cotidiano. O problema-processo ou heurístico consiste em um problema que o professor estimula o aluno a construir as estratégias a serem aplicadas, a elaborar suas próprias hipóteses e testá-las, interagindo com os demais colegas na busca do porquê e como aquela estratégia funciona para determinado problema, ou seja, utilizando o raciocínio lógico, portanto o professor nesta situação terá o papel de manter os alunos desenvolvendo estratégias e ideias produtivas. Por fim, o problema do tipo quebra-cabeça é aquele envolve grande parte dos alunos, e sua resolução depende de uma percepção intuitiva ou em perceber alguma manipulação matemática (procedimento), como chave da resolução.

De acordo com Oliveira e Santana (2012), os problemas-processo ou heurísticos são os mais adequados para se trabalhar à resolução de problemas, pois estes tipos de problemas irão exigir do aluno criatividade, iniciativa e conhecimento de algumas estratégias que irão possibilitar a resolução do mesmo.

Para o problema-processo ou heurístico, se levará em conta o conceito apresentado por Polya (1995, p. 86), neste trabalho Polya apresenta duas perspectivas sobre este conceito, o primeiro é a Heurística, no qual define como sendo o estudo dos métodos e regras da descoberta da invenção. O segundo é a Heurística Moderna que segundo Polya (1995, p. 87) buscar compreender o processo solucionador de problemas, mas particularmente as operações mentais, típicas deste processo, que tenham utilidade.

3.1 O Sistema de Ensino SER

O Sistema de Ensino SER distribuído pelo Grupo Educacional Somos Educação, foi desenvolvido em 2007, alinhando os conteúdos das Editoras Áticas e Scipione. O sistema conta com recursos digitais associados ao material didático, como por exemplo, os conteúdos virtuais presentes nos websites Twig e Tigtag. Desde o ano de 2015, o material tem passado por uma reformulação em seu material didático, principalmente, no layout das apostilas distribuídas as escolas parceiras do sistema de ensino e na colaboração entre as apostilas e os recursos digitais disponíveis aos alunos.

3.2 Análise do Caderno 5 do 9º ano do Ensino Fundamental

O material a ser analisado será o Caderno 5 do 9º ano do ensino fundamental, mais especificamente as sessões 3 e 4, do capítulo 1 deste caderno. Para esta análise se utilizará a teoria dos Registros de Representação Semiótica, observando as conversões e apreensões necessárias para resolução das atividades propostas.

O capítulo 1 aborda os temas perímetros, áreas e volumes, no qual ele constrói por meio da resolução de problemas a ideia de perímetro, e desenvolve cada uma das expressões para o cálculo da área de diferentes polígonos.

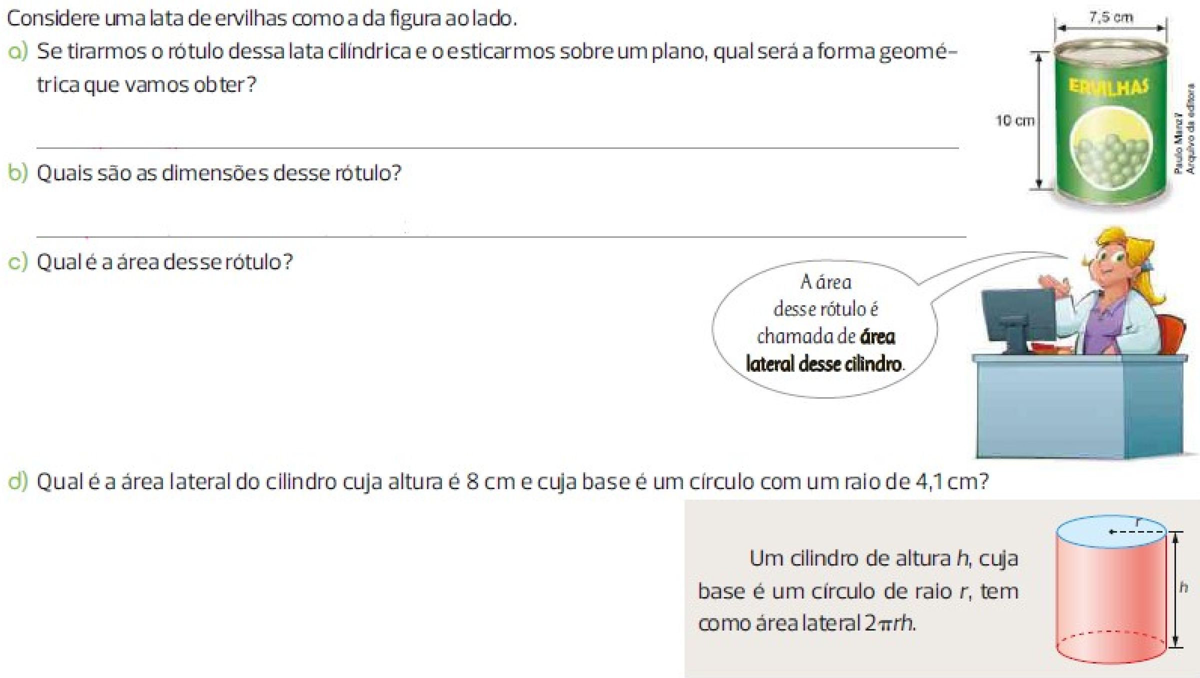
A sessão 3 aborda o aprofundamento do estudo do cálculo da área de um polígono, entretanto neste trabalho se analisará somente o tópico que trata sobre área lateral e área total de um sólido geométrico.

A sessão 4 aborda o aprofundamento do estudo de volume, no qual são propostos diferentes problemas para construir as expressões que determinam o volume de diferentes sólidos geométricos. A seguir são apresentados os objetivos propostos pelo material a serem desenvolvidos durante as aulas.

> - Reconhecer, aprofundar e realizar as operações que envolvem perímetro, área e volume;
> - Aprofundar o cálculo da medida de volumes de diversos sólidos. (DANTE, 2016, p. 4)

O primeiro sólido a ser estudado o cálculo da área lateral é o cilindro, para isso é proposta uma sequência de atividades, o item a (figura) consiste em determinar a forma geométrica da lateral do cilindro ao ser planificado, neste caso observa-se a apreensão operatória como modificação mereológica, pois é necessário desmontar o cilindro para planifica-lo.

Figura 1: Área lateral do cilindro.


Considere uma lata de ervilhas como a da figura ao lado.

a) Se tirarmos o rótulo dessa lata cilíndrica e o esticarmos sobre um plano, qual será a forma geométrica que vamos obter?

b) Quais são as dimensões desse rótulo?

c) Qual é a área desse rótulo?

d) Qual é a área lateral do cilindro cuja altura é 8 cm e cuja base é um círculo com um raio de 4,1 cm?

Um cilindro de altura h, cuja base é um círculo de raio r, tem como área lateral $2\pi rh$.

Fonte: Dante (2016, p. 37).

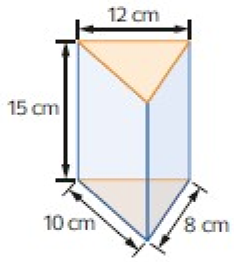
O item b (Figura 1) solicita que o aluno determine as dimensões do rótulo da lata de ervilha, para isso é necessário que se determine a medida da circunferência da base da lata de ervilha. O item c (Figura 1) solicita que se determine a área do rótulo e para resolver o item d (Figura 1) é necessário concluir no item c (Figura 1) a expressão que determina a área lateral de um cilindro

O próximo sólido, no qual é estudada a área lateral, é o prisma, novamente o autor se utiliza de uma sequência de atividades para abordar o assunto, no item a (Figura 2) é solicitado que se determine o número de faces laterais do prisma a ser estudado, e o item b (Figura 2) requer que se determine a forma geométrica de cada face lateral, para ambos os itens (a e b) nota-se a apreensão perceptiva, pois a partir da observação do sólido é possível determinar o número de faces e a sua forma geométrica.

Figura 2: Área lateral da superfície de um prisma.

A figura ao lado é um **prisma de base triangular**.

a) Quantas faces laterais ele tem?



b) Qual é a forma geométrica de cada face lateral?

c) Calcule a área de cada face lateral.

d) Adicione as três áreas obtidas no item anterior para obter a área lateral do prisma.

e) Qual é o perímetro de uma das bases?

f) Agora, use o resultado encontrado no item **e** para determinar a área lateral do prisma.

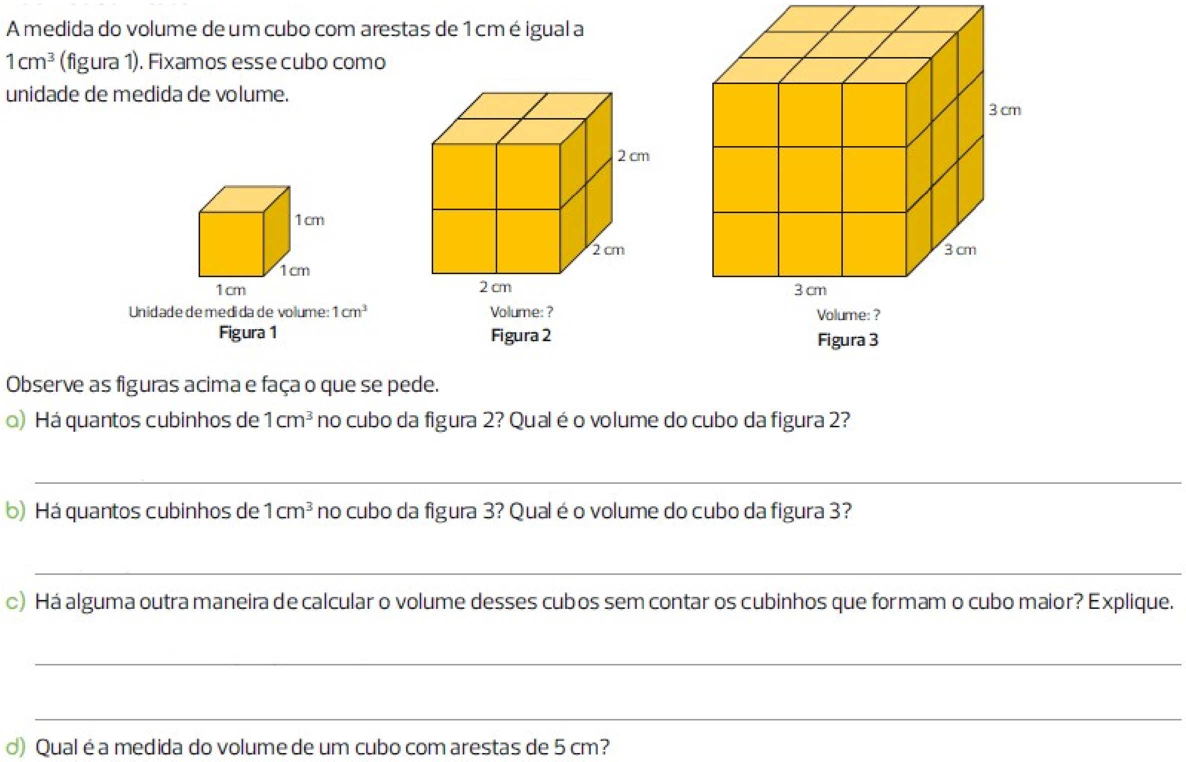
Fonte: Dante (2016, p. 38).

O item c (Figura 2) solicita que se calcule o valor das áreas das faces do prisma proposto, e como complemento o item d (Figura 2) solicita que se relacione os valores das áreas do item c com a área lateral do prisma, neste caso espera-se que os alunos concluam que a área lateral é igual a soma das áreas das faces laterais, entretanto os itens e e f (Figura 2) apresentam outro método para se determinar a área lateral de um prisma, neste caso como sendo o produto da altura pelo perímetro da base do prisma.

O autor Dante (2016) inicia a sessão 4 supondo que os alunos nesta etapa do ensino fundamental já tenham estudado a ideia de volume, sendo assim aborda o volume do cubo sem apresentar uma introdução teórica, partindo diretamente para resolução de “problemas”. Essa ferramenta didática é utilizada por toda a sessão 4, o que condiz com a proposta teórico-pedagógica da qual o autor, do material didático, estuda.

Nota-se que por meio da observação é possível que os alunos respondam os itens a e b (Figura 3) então tem-se a apreensão perceptiva caracterizada para construção da resolução desta atividade, pois realizando a observação das figuras o aluno determina o volume dos dois cubos apresentados. E para os itens c e d (Figura 3), nota-se a apreensão discursiva, pois a partir dos casos apresentados, é solicitado que o aluno encontre uma solução sem necessariamente apresentar uma justificativa teórica, ou seja, o aluno é responsável por determinar a expressão que determina o volume do cubo.

Figura 3: Volume de um cubo.


A medida do volume de um cubo com arestas de 1 cm é igual a 1 cm³ (figura 1). Fixamos esse cubo como unidade de medida de volume.

Observe as figuras acima e faça o que se pede.

a) Há quantos cubinhos de 1 cm³ no cubo da figura 2? Qual é o volume do cubo da figura 2?

b) Há quantos cubinhos de 1 cm³ no cubo da figura 3? Qual é o volume do cubo da figura 3?

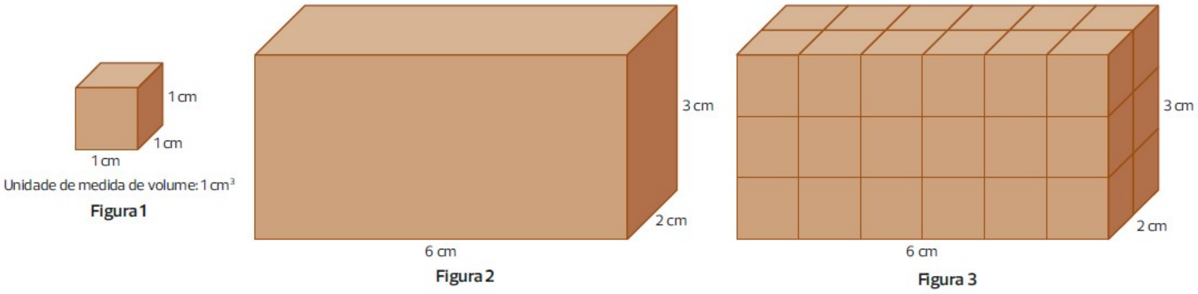
c) Há alguma outra maneira de calcular o volume desses cubos sem contar os cubinhos que formam o cubo maior? Explique.

d) Qual é a medida do volume de um cubo com arestas de 5 cm?

Fonte: Dante (2016, p.42)

Para o problema que abordou o volume do paralelepípedo, são apresentados três figuras, no qual a primeira representa um cubo unitário, a segunda um paralelepípedo e a terceira o mesmo paralelepípedo dividido em cubos unitários (Figura 4), nesta construção, que vem a ser necessária para responder o item a (Figura 5), observa-se a apreensão operatória com modificação mereológica, na qual agrupasse os cubos unitários para formar o paralelepípedo, ou divide-se o paralelepípedo em cubos unitários, sendo assim, possível determinar volume deste sólido. Novamente é proposto ao aluno que encontre outra maneira para determinar o volume do paralelepípedo que não seja por meio do processo de contagem, observa-se a apreensão discursiva, pois novamente os alunos devem buscar a resolução do problema sem que seja apresentada uma justificativa teórica.

Figura 4: Volume de um paralelepípedo.



Fonte: Dante (2016, p. 43)

Figura 5: Atividades sobre o volume do paralelepípedo.

a) Há quantos cubinhos de 1 cm^3 no paralelepípedo da figura 3? Qual é o volume do paralelepípedo da figura 3?

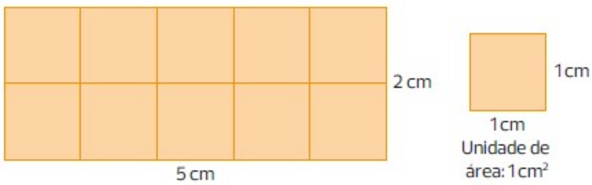
b) Há alguma outra maneira de calcular o volume desse paralelepípedo sem contar os cubinhos que o formam? Explique.

Fonte: Dante (2016, p. 43)

Ao começar a abordar o volume de um prisma, o autor apresenta uma sequência de atividades, sendo que, no item a (Figura 6) é proposto que o aluno determine a área da região plana solicitada, e no item b (Figura 7) é proposto que o aluno determine a quantidade de cubos unitários necessários para formar sólido, em ambos os itens observa-se a apreensão perceptiva, pois para resolução dos dois itens é necessário somente observar as figuras para determinar a área (item a) e o volume (item b).

Figura 6: Atividade com a proposta de determinar a área da região solicitada.

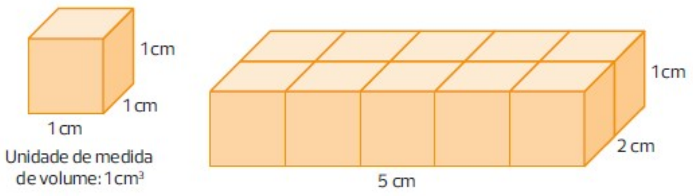
a) Determine a área, em centímetros quadrados, da região retangular abaixo.



Fonte: Dante (2016, p. 44).

Figura 7: Atividade que relaciona o volume com a área retangular.

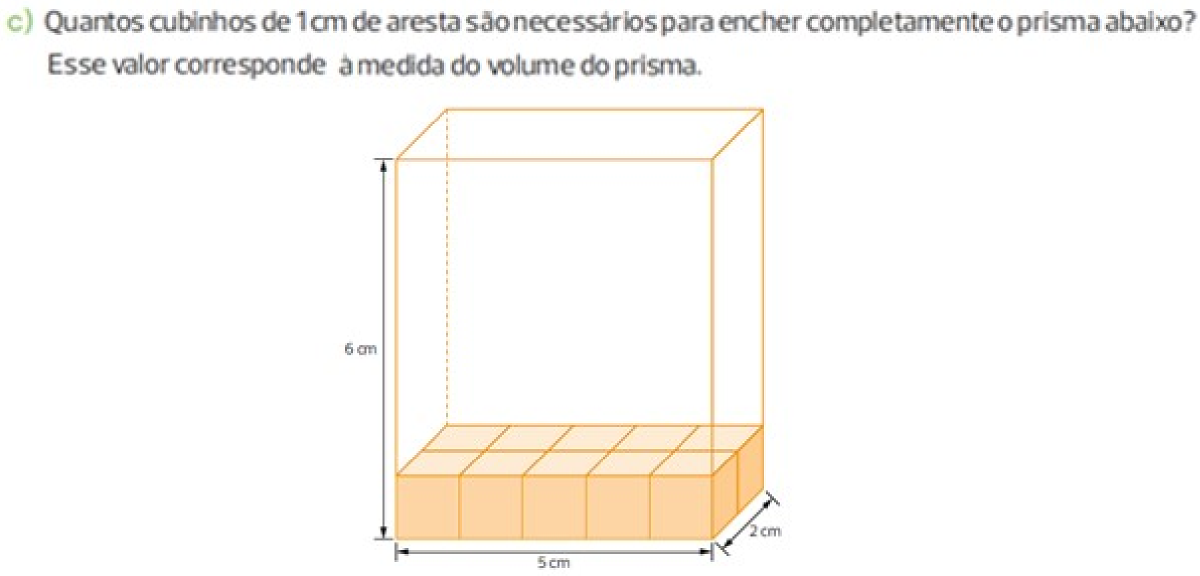
b) Quantos cubinhos de 1 cm de aresta são necessários para cobrir a região retangular acima?



Fonte: Dante (2016, p. 44).

O item c (Figura 8) busca por meio do agrupamento do sólido construído no item b (Figura 7), determinar o volume do prisma, observa-se no primeiro processo para resolver este item a apreensão operatória com modificação ótica, pois é necessário sobrepor o sólido construído no item anterior para preencher o prisma proposto. Realizada esta construção é necessário (ou não, neste caso o aluno pode realizar uma correspondência com o volume do paralelepípedo e determinar o volume por meio da expressão) realizar o processo de contagem do número de sólidos sobrepostos, e determinar o volume deste prisma realizando o produto do número de cubos unitários no sólido pelo número de sólido que foram sobrepostos para preencher o prisma. Neste caso observa-se a apreensão perceptiva, além de se realizar a conversão do registro figural para o registro aritmético ou registro algébrico, dependendo de qual método de resolução o aluno se utiliza.

Figura 8: Atividade proposta sobre volume do prisma.

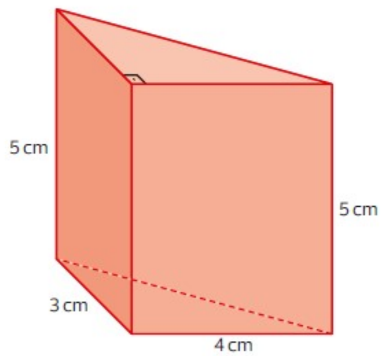


Fonte: Dante (2016, p. 45).

Determinado o volume do prisma o item d solicita que o aluno apresente outra maneira para determinar o volume deste mesmo prisma, porém é necessário relacionar a área da base e a altura do prisma apresentado.

Os itens e a g são aplicações das conclusões apresentadas nos itens a a d, no qual o aluno deve determinar o volume do prisma solicitado, porém a região da base do prisma é triangular (Figura 9) e não retangular como nas demais atividades que foram propostas no caderno.

Figura 9: Sólido utilizado para os itens e a g sobre volume do prisma.



Fonte: Dante (2016, p. 45).

A atividade proposta para introduzir o volume do cilindro, propõe a comparação de duas latas de conserva de forma cilíndrica (Figura 10), que apresentam o mesmo volume, porém com dimensões distintas. O item a (Figura 11) propôs a conversão do volume das latas de mililitros para metros cúbicos, neste é necessário realizar o tratamento do registro aritmético (mililitro para metros cúbicos). Para o item b (Figura 11) é necessária a aplicação da expressão que determina a área de uma circunferência, para determinar a área da base das duas latas.

Figura 10: Figuras da atividade introdutória do volume do cilindro**.**

Fonte: Dante (2016, p. 45).

Figura 11: Itens presentes na atividade introdutória do volume do cilindro.

a) Transforme em centímetros cúbicos as medidas dadas em mililitros, que indicam o conteúdo das latas. Lembre-se: $1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3 = 1\,L$.

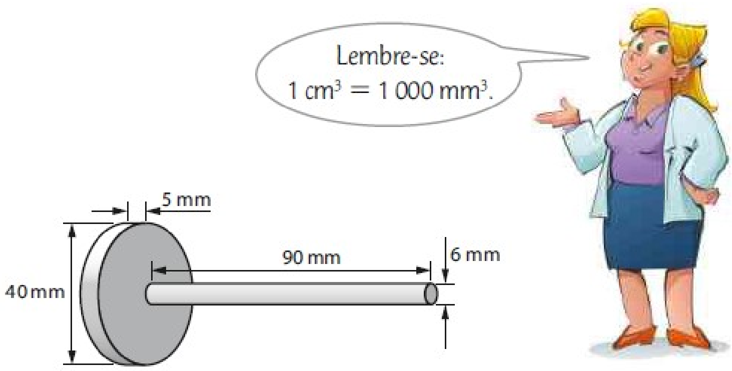
b) Determine a área da base, em centímetros quadrados, na lata **A** e na lata **B**, com aproximação de décimos. Use $\pi = 3{,}1$.

Fonte: Dante (2016, p. 46).

O item c solicita ao aluno que realize a divisão entre a medida do volume pela área da base de cada uma das bases, e compare os resultados obtidos com a altura de cada uma das latas, ou seja, o aluno deverá concluir que a divisão entre o volume pela área da base é igual a altura do cilindro, sendo assim, determinando que o volume pode ser obtido por meio o aluno deve completar corretamente as lacunas presentes no item d.

Figura 12: Atividade sobre o volume do cilindro.

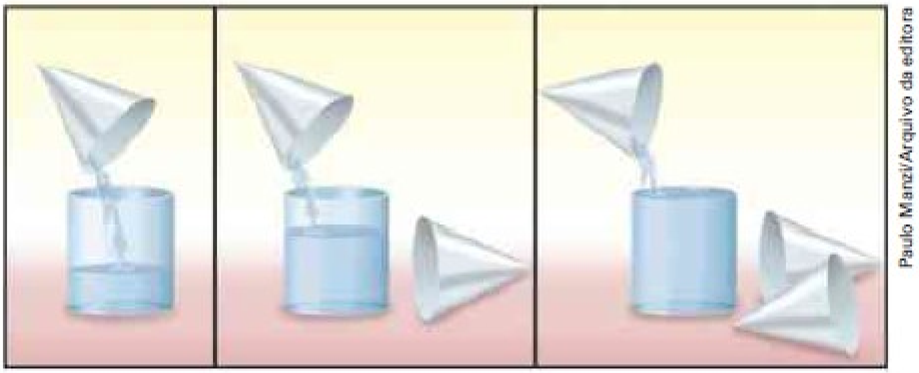
Uma indústria recebeu um pedido para fabricar 2500 peças de ferro maciço, com a forma e as dimensões indicadas na figura abaixo. Quantos centímetros cúbicos de ferro serão usados na fabricação dessas peças? Use calculadora e considere $\pi = 3{,}14$.



Fonte: Dante (2016, p. 47).

O volume do cone é introduzido por meio de uma atividade que apresenta uma tarefa proposta por um professor a um de seus alunos, no qual o aluno deverá relacionar o volume do cone com o volume de um cilindro com as mesmas base e altura (Figura 13). Para isso o aluno realiza um experimento que consiste em preencher o volume do cilindro com o volume do cone, realizado o experimento é proposto ao aluno que responda as perguntas “Quantos cones o aluno usou para preencher o cilindro?” e “O que se pode concluir, então, a respeito do volume de cada cone utilizado em relação ao volume do cilindro?”. Sem realizar demonstrações, porém indicando que é possível demonstrar a relação encontrada, no caso que o volume do cone é igual a um terço do volume do cilindro. Observa-se nesta atividade a apreensão operatória com modificação ótica, pois o cilindro é decomposto em três cones.

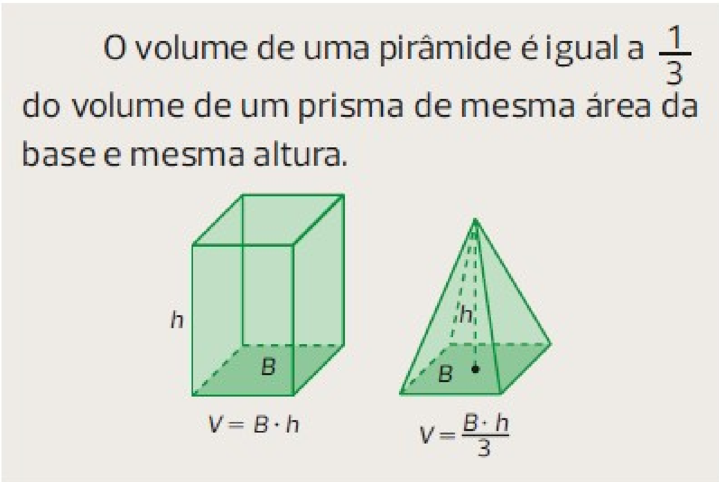
Figura 13: Figura da atividade introdutória do volume do cone.



Fonte: Dante (2016, p. 48).

Para o volume da pirâmide utiliza-se a comparação como na atividade destinada para introduzir o volume do cone, porém ao invés de comparar com um cilindro utiliza-se um prisma que tenha as mesmas base e altura da pirâmide a ser analisada.

Figura 14: Quadro resumo sobre o volume da pirâmide.



Fonte: Dante (2016, p. 49).

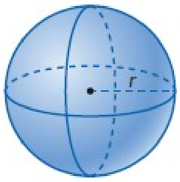
O último sólido a ser estudado o volume é o da esfera, entretanto é o único que não utiliza se da comparação ou de uma sequência de atividades para construir a expressão que determina o seu volume, sendo somente apresentada a expressão do volume de forma direta, sem demonstração ou comparação.

Figura 15: Introdução ao volume de uma esfera.

Estas fórmulas você já estudou:

- $C = 2\pi r$ é a fórmula do comprimento de uma circunferência com raio de medida r.
- $A = \pi r^2$ é a fórmula da área de um círculo com raio de medida r.

Veja agora mais estas duas fórmulas, que serão demonstradas no Ensino Médio:



$$A = 4\pi r^2$$

Área da superfície esférica ("casca" da esfera)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Volume da esfera

Fonte: Dante (2016, p. 49).

No próximo capítulo será apresentada a metodologia e a sequência de atividades que foi desenvolvida para este trabalho, que abordam como conteúdo principal a otimização da área da superfície das latas cilíndricas de leite condensado de diferentes marcas e dimensões.

4. METODOLOGIA

Para a análise desta pesquisa foi empregada a proposta de Borasi (1996) apud Cury, (2007, p.37) para a taxionomia dos usos dos erros, exemplificada no Quadro 1, no qual ela apresenta três objetivos de aprendizagem, sendo eles a remediação, a descoberta e a pesquisa.

Dos objetivos de aprendizagem, propostos por Borasi (1996) apud Cury, (2007, p.37), a remediação foi o principal objetivo a ser abordado. A remediação está ligada a identificação dos erros e na análise dos erros detectados, para compreender e corrigir o que houve de errado. Neste caso optou-se em aplicar uma atividade para analisar e identificar os erros dos alunos entorno dos conteúdos de geometria, mais precisamente aos relacionados ao volume e a área da superfície de sólidos geométricos.

A pesquisa é de caráter qualitativo, pois se analisou os erros apresentados pelos alunos, classificando-os e organizando-os em quadros resumos dos erros presentes em cada tarefa. Como apoio ao objetivo de aprendizagem de enfoque neste trabalho, a pesquisa foi realizada segundo a análise do conteúdo de erros proposto por Brum e Cury (2013), dividida em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na pré-análise para cada aluno foi designado um código, sendo assim preservando sua identidade, nesta pesquisa optou-se em nomenclar os alunos com os códigos A1 a A9. Em seguida, o material com as respostas dos alunos serão fotocopiado, para assim ser organizado em sequência, facilitando a correção e análise.

Ao iniciar a fase de exploração do material se realizou a classificação das respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. As respostas incorretas formaram o corpus para a análise e categorização. Na última fase, tratamento dos resultados, foi descrito os erros encontrados em cada categoria, bem como elaboração de quadro-síntese dos resultados obtidos.

Como instrumento da pesquisa, elaborou-se uma sequência de atividades, composta por cinco itens que tem por objetivo comparar duas latas de leite condensado de dimensões distintas. A investigação foi realizada com 9 alunos do 9º ano do ensino fundamental de um colégio particular no Município de Sorocaba, os alunos desta turma, em sua maioria, não apresentam um bom rendimento na disciplina de matemática. Durante a aplicação da atividade foi permito o uso da calculadora, pois pelo volume de operações a serem realizadas, o uso da calculadora se tornou necessário para agilizar os processos, entretanto foi solicitado aos alunos que apresentassem o desenvolvimento completo das suas respostas.

Esta atividade foi motivada pelo relato de experiência pedagógica do professor orientador, da prática educativa desenvolvida no projeto teia do saber, e a utilização da embalagem de leite condensado, veio da observação do orientando a respeito das diferentes dimensões das embalagens em um supermercado próximo a sua casa. A seguir é apresentada a sequência de atividades proposta para esta pesquisa.

A problematização diz respeito ao fato de duas empresas fabricantes de leite condensado produzirem recipientes com diferentes dimensões, porém mantendo o formato cilíndrico reto. Uma questão pode ser formulada: as diferenças nas dimensões pode produzir, dado um volume fixo, uma economia de material na composição da área superficial do sólido?

Na pesquisa de campo, foi observado em um determinado supermercado duas embalagens do mesmo produto visivelmente bem distintas em sua dimensão altura:

- Moça: 9,9 cm (altura) e 20,8 cm (circunferência)
- Itambé: 8,0 cm (altura) e 23,2 cm (circunferência)

Como proposta pedagógica considere as seguintes informações:

a) Determine os raios das circunferências das embalagens de leite condensado, utilizando $\pi = 3,14$.

b) Dado que os volumes calculados são suficientes pra embalar 395 g de leite condensado, vamos considerar um volume constante. Escreva a expressão da altura do sólido em função do raio da base.

c) Escreva a expressão da área superficial do sólido em função do raio da base.

d) Construa uma planilha da área superficial do sólido em função do raio da base.

e) Analise os dados e faça um relatório tendo por base a questão formulada nesta atividade.

A seguir estão as habilidades que se esperam dos alunos ao realizem cada uma das tarefas propostas na sequência de atividades.

O ***item a*** busca mobilizar os conhecimentos relativos a medidas das dimensões de um cilindro e as relações entre seus elementos, neste caso se observou se o aluno consegue relacionar a medida da circunferência, do diâmetro e do número π (pi), e assim obter a medida o raio da base de cada um das latas, ou seja, se analisará se os alunos conseguem ou não primeiramente realizar a conversão dos dados apresentados, e relaciona-los, e sendo assim, efetuar o tratamento da expressão que relaciona os elementos do cilindro citados anteriormente.

Nos **itens b** e **c** verificou-se se os alunos conseguem realizar os tratamentos necessários para se obter uma expressão que venha a representar a altura do sólido em função do raio da base, e se conseguem relaciona-la com outras expressões para obter uma expressão que venha a representa a área total da superfície de um cilindro.

No **item d**, verificou-se se os alunos conseguem converter a linguagem algébrica para a linguagem tabular, construindo assim uma gama de dados para concluir a sequência de atividades proposta.

Por fim, no **item e** se verificará se os alunos conseguem analisar os dados presentes nas planilhas (linguagem tabular) e os dados referentes as duas latas (linguagem figural), e analisando-os obter uma conclusão que seja satisfatória para a atividades (linguagem materna).

Após a aplicação da atividade individual, foi realizada uma análise parcial dos erros apresentado pelos alunos, para assim, em um segundo momento se formar duplas entre os pares que apresentarem respostas similares, e assim, avaliarem em dupla as construções que realizaram individualmente, neste momento, espera-se que os alunos levantem questionamentos e discutam sobre as respostas apresentadas, e sendo assim, se possível, corrigindo possíveis erros cometidos durante a atividade individual.

A última etapa da aplicação da atividade foi a entrevista individual com os alunos, esta terá como objetivo compreender as respostas apresentadas pelos alunos nas tarefas proposta e questionar os alunos se houve, durante a atividade em dupla, alguma mudança na resposta encontrada pelo aluno individualmente.

Ao classificar os erros dos alunos, foi levado em conta o primeiro erro cometido na resolução, porém sabe-se que por muitas vezes o estudante, ao continuar a sua solução, possa cometer outros tipos de erro. Portanto, ao realizar a contagem final dos erros se levará em conta o fato de que pode haver mais de um tipo de erro em uma mesma questão.

No próximo capítulo se realizará classificação dos erros apresentados pelos alunos na realização das tarefas propostas na sequência de atividades, e paralelamente será realizada a análise destes erros.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Inicialmente foi aplicada a atividade para 9 alunos do 9º ano do ensino fundamental 2 de uma escola particular na cidade de Sorocaba, foi realizada também uma atividade em dupla entre 8 participantes desta pesquisa, pois um dos alunos apresentou solução muito próxima a solução real, e portanto apresentou características muito distintas dos demais colegas.

Os alunos tiveram ao todo três horas-aula para completar a atividade, sendo que, a maioria dos alunos levou duas horas-aula para completar a atividade dos itens **a** a **c**, e mais uma hora-aula para completar a planilha no item **d** e escrever a conclusão do item **e**. Foi disponibilizado mais 1 hora-aula, para que os alunos debatessem em pares as resoluções encontradas por cada aluno, esta distribuição foi realizada a partir da análise das soluções apresentadas pelos alunos, e aqueles que apresentavam soluções similares foram colocados em duplas.

As respostas dos alunos foram fotocópias e as nove sequências de atividades foram cuidadosamente analisadas para assim realizarmos a classificação parcial de cada uma dos erros presentes pelos alunos. A terceira etapa da atividade consistia na entrevista individual dos alunos, no qual a partir de uma análise a priori das atividades por eles realizadas, foi elaborada perguntas com o objetivo de compreender as soluções apresentadas pelos alunos.

A partir das atividades analisadas e das entrevistas pode se então iniciar a análise qualitativa das atividades dos alunos buscando pelas soluções que se apresentavam correta, neste caso quando o aluno apresentava a solução esperada para a tarefa; parcialmente correta, quando o aluno apresentava solução próxima do esperado, entretanto por algum erro cometido sua solução divergia da solução esperada; incorreta, quando o aluno não apresentava uma solução que não apresentava nenhuma relação com a solução esperada; e em branco, quando o aluno deixava de responder a tarefa. O Quadro 2 apresenta os resultados dos protocolos estudados.

Quadro 2: Distribuição das respostas dos alunos.

Tarefa	Correta	Parcialmente Correta	Incorreta	Em branco
Item a	2	3	4	0
Item b	1	2	6	0
Item c	0	2	7	0
Item d	0	1	8	0
Item e	1	0	6	2

Da distribuição das respostas apresentadas pelos alunos no Quadro 2, será material de análise, para classificação dos erros, somente as soluções consideradas parcialmente corretas e incorretas, as soluções corretas e em branco serão descartadas para esta primeira análise.

A codificação dos erros dos alunos será numerada partindo de E1, que vem a ser o primeiro erro observado na análise das respostas dos alunos, a análise das respostas se iniciou do **item a** para o **item e,** e do aluno A1 para o aluno A9, sendo que a análise do próximo item só foi iniciada após esgotar todos os erros apresentados pelos alunos no item anterior.

Para o **item a** somente dois alunos efetuaram os arredondamentos de maneira correta, os três alunos em que o item estava parcialmente correto efetuaram o arredondamento de maneira errônea o que acarretou em um valor próximo do esperado, os alunos que apresentaram a resolução parcialmente correta e incorreta para o item apresentaram os erros presentes no Quadro 3.

Quadro 3: Erros presentes no item a.

Tarefa	Erros apresentados nas respostas da tarefa
Determine os raios das circunferências das embalagens de leite condensado, utilizando π = 3,14.	**E1:** Realiza o arredondamento de maneira incorreta; **E2:** Realiza a divisão errada entre números reais; **E3:** Determina o valor da medida do raio por meio da divisão da medida da circunferência pela medida do diâmetro; **E4:** Apresenta um valor diferente do apresentado no enunciado; **E5:** Inclui termos desnecessários para solução da tarefa; **E6**: Desaparece com termo presente na expressão anterior; **E7:** Confunde o sinal de igualdade com o sinal de adição; **E8:** Aplica de maneira errada o princípio multiplicativo da igualdade.

Quadro 4: Resposta esperada para o item a.

Espera-se que os alunos associem que o número pi (π) é igual a razão entre a medida circunferência (C) e a medida do diâmetro (D), e a partir desta relação obter as medidas dos raios da base das duas latas.

Raio da lata da marca Itambé:

$$\pi = \frac{C}{D} \Leftrightarrow 3{,}14 = \frac{20{,}8}{D} \Leftrightarrow D = \frac{20{,}8}{3{,}14} \Leftrightarrow D = 6{,}6\ cm$$

$$D = 6{,}6 \Leftrightarrow 2r = 6{,}6 \Leftrightarrow r = \frac{6{,}6}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r = 3{,}3\ cm}$$

Raio da lata da marca Moça:

$$\pi = \frac{C}{D} \Leftrightarrow 3{,}14 = \frac{23{,}2}{D} \Leftrightarrow D = \frac{23{,}2}{3{,}14} \Leftrightarrow D = 7{,}4\ cm$$

$$D = 7{,}4 \Leftrightarrow 2r = 7{,}4 \Leftrightarrow r = \frac{7{,}4}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r = 3{,}7\ cm}$$

Para o **item a** foram analisadas as respostas apresentadas por sete dos participantes desta pesquisa, no caso, os alunos A2 ao A8, sendo que os alunos A1 e A9 foram os únicos que apresentaram resposta correta, e portanto, suas respostas foram descartadas para esta análise.

O erro relacionado ao arredondamento realizado de maneira incorreta (**E1**) ocorreu em todas as respostas analisadas, em sua maioria o erro estava relacionado no arredondamento para uma casa decimal, destaca-se que durante a aplicação foi sugerido aos alunos que realizassem o arredondamento dos números decimais para uma casa decimal.

A norma, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), NBR 5891 de 10 de dezembro de 2014, estabelece as seguintes regras de arredondamento de números decimais:

> - Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último a ser conservado for inferior a 5, o último algarismo a ser conservado permanecerá sem modifica-lo [...];
>
> - Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for superior a 5, ou, sendo 5, for seguido de no

> mínimo um algarismo diferente de zero, o último algarismo a ser conservado deverá ser aumentado de uma unidade [...];
>
> - Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for 5 seguido de zeros, deve-se arredondar o algarismo a ser conservado para o algarismo par mais próximo. Consequentemente, o último algarismo a ser retirado, se for ímpar, aumentará uma unidade [...];
>
> - Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for seguido de zeros, se for par o algarismo a ser conservado, ele permanecerá sem modificação. [...] (ABNT, NBR 5891, 2014)

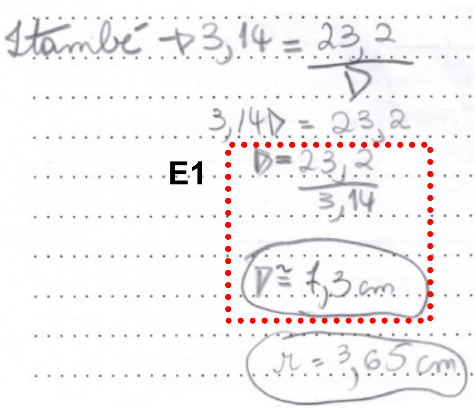
Entretanto, ao buscar nos materiais didáticos utilizados, por estes alunos, nos anos anteriores, encontrou-se as seguintes regras para o arredondamento de números decimais:

> - Arredondamos "para cima" se o algarismo à direita do algarismo da ordem que se vai arredondar é 5, 6, 7, 8 ou 9.
>
> 16,79 → 16,80 ou 16,8
>
> - Mantemos a ordem que se vai arredondar quando o algarismo à direita dessa ordem é 0, 1, 2, 3 ou 4.
>
> 16,74 → 16,70 ou 16,7
>
> (DANTE, 2014, p. 33)

Portanto o material utilizado por estes alunos se mostrado equivocado ao apresentar as regras de arredondamento, sendo assim, para este trabalho será considerado somente como erro as regras de arredondamento que não condizem com as normas da ABNT.

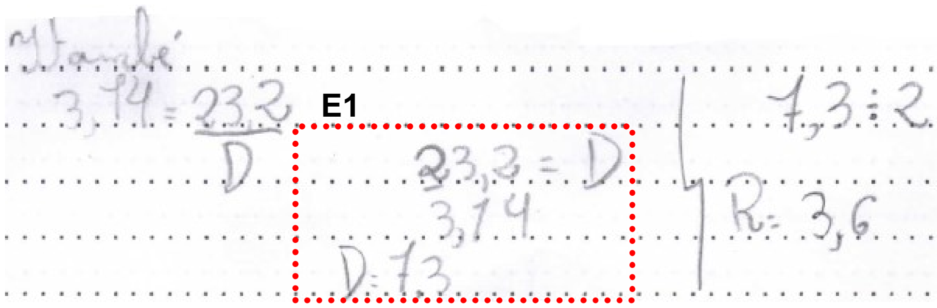
Entre as resposta que apresentaram este erro, destaca-se duas respostas, a primeira é a do aluno A2, que ao efetuar a divisão entre o número 23,2 por 3,14, arredondou o valor obtido para 7,3 (Figura 16 e Figura 17), entretanto ao realizar está divisão o arredondamento correta é 7,4, este erro se repetiu para todos os alunos observados.

Figura 16: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item a.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Figura 17: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item a.

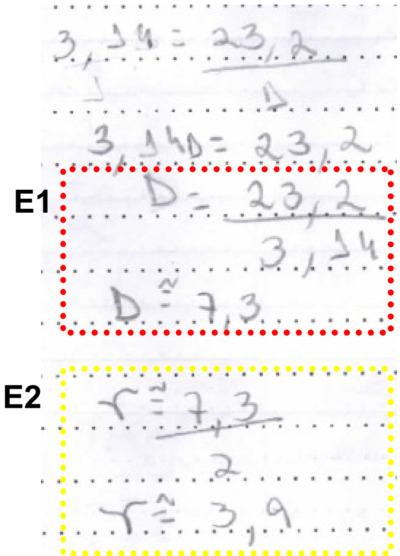


Fonte: Arquivo Pessoal

Nas entrevistas realizadas com os alunos observou-se que a maioria deles não sabe efetuar arredondamento de forma correta, pois este erro vem a se repetir na maioria das tarefas realizadas pelos alunos. Destaca-se que o único aluno que apresentou domínio sobre o processo de arredondamento, e que errou este processo nas tarefas solicitadas, foi o aluno A2, que mesmo apresentando dificuldade em se expressar, mostrou que compreende que quando o algarismo a ser eliminado for maior ou igual a cinco acrescenta-se uma unidade ao primeiro algarismo que está situado a esquerda, e se for menor do que cinco, deve-se manter inalterado o algarismo da esquerda. Os demais alunos responderam que não sabiam efetuar o arredondamento, ou mantinham inalterado o algarismo dos décimos apresentado na divisão.

O erro **E2** relacionado à divisão incorreta entre números reais é cometido somente pelo aluno A4 para este item, pois ao efetuar a divisão entre os números 7,3 por 2, obtém como resultado o número 3,9 (Figura 18), entretanto o resultado esperado para esta divisão é 3,65 ou 3,6 caso o aluno arredondasse para uma casa decimal. Na entrevista o aluno antes mesmo de ser questionado sobre este erro, já afirmou que havia efetuado a divisão de maneira errada, pois quando realizada a atividade em dupla ao discutir com o aluno A3 sobre a divergência de suas soluções observaram que no caso do aluno A4, a divisão estava errada.

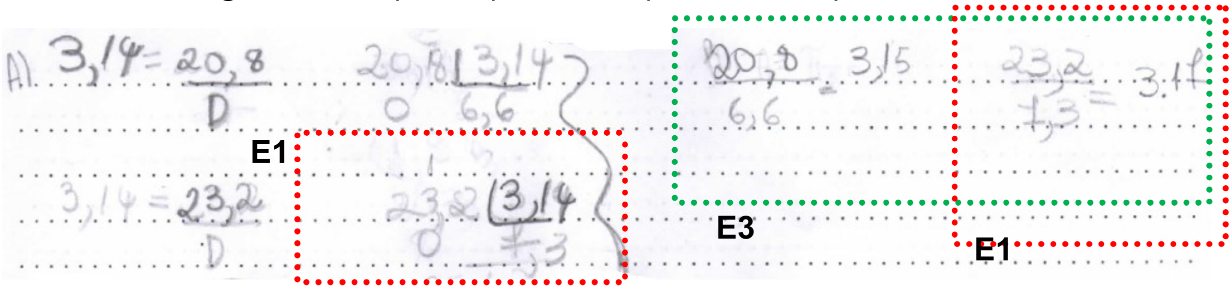
Figura 18: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item a.



Fonte: Arquivo pessoal.

O erro **E3**, no qual o aluno determina o valor da medida do raio por meio da divisão da medida da circunferência pela medida do diâmetro, foi cometido somente pelo aluno A5, este aluno apresenta muita dificuldade em transitar dentro do registro algébrico, sua resposta para esta tarefa se mostra em grande parte confusa e sem linearidade, porém a partir da entrevista realizada pode-se concluir o erro acima descrito, pois como pode se observa na (Figura 19), que o aluno não deixa claro se os números 3,15 e 3,17 são os raios das latas analisadas, entretanto ao realizar a entrevista com o aluno contatou-se que ao efetuar a divisão da medida da circunferência pela medida do diâmetro, o aluno entende que desta divisão se obtém o raio, ou seja, o aluno não compreende que a razão entre a medida da circunferência pela medida do diâmetro fornece o valor aproximado do número pi, e não o raio como ele afirma na entrevista.

Figura 19: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item a.



Fonte: Arquivo Pessoal

Observou-se somente na resposta do aluno A7 o erro **E4**, no qual o aluno apresenta um valor diferente do apresentado no enunciado para a medida da circunferência, no qual no enunciado a medida da circunferência da lata da marca Moça é 20,8 cm, entretanto o aluno utiliza para sua resposta o número 20,3 (Figura 20), ao ser questionado durante a entrevista o aluno relatou que já havia notado o erro por ele cometido quando realizou a atividade em dupla com o aluno A8, ele justificou que ele fez muito rápido o item, e acabou por trocar os valores, percebendo o erro posteriormente.

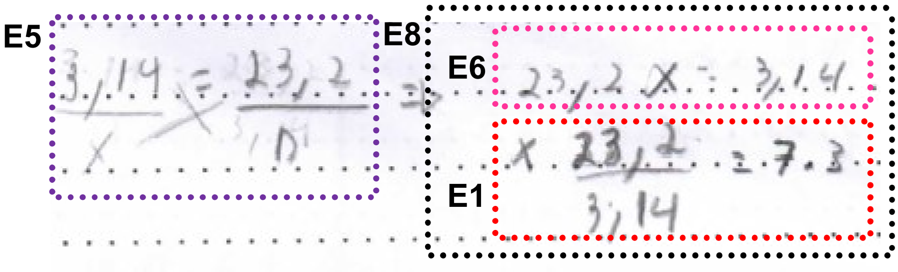
Figura 20: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item a.

Fonte: Arquivo Pessoal.

Observa-se que na resposta apresenta para o cálculo do raio da lata da marca Moça, o aluno A7, apresenta 6 dos 8 erros apresentados no **item a**, este aluno apresenta muito dificuldade em matemática, principalmente quando tem que realizar as atividades de maneira autônoma, ou seja, sem a intervenção do professor.

Para o erro **E5**, no qual o aluno inclui termos desnecessários para solução da tarefa, observou-se este erro para os alunos A7 (Figura 20) e A8 (Figura 21), no qual ambos adicionam o termo x no denominador do número decimal 3,14, e ao efetuarem as operações para proporcionalidade que obtiveram, somem com o termo D, que representa o diâmetro, para calcular o valor do termo x, aos serem questionados durante a entrevista sobre estes erros, ambos os aluno justificaram que colocaram o x ao invés de colocar o 1, e trocaram o termo D pelo x, pois para eles é mais fácil de calcular com o x, ao invés de utilizar outras termos, em ambas os casos nota-se a dificuldade dos alunos em realizar o tratamento do registro algébrico para termos diferentes de x.

Figura 21: Resposta apresentada pelo aluno A8 para o item a.



Fonte: Arquivo Pessoal.

O erro **E6** é cometido pelos alunos A7 (Figura 20) e A8 (Figura 21), no qual ambos os alunos desaparecem com o termo D (diâmetro) e mantém o termo x adicionado por eles no processo anterior. Em seguida o aluno A7 apresenta outro erro ao dar continuidade no desenvolvimento da sua resposta, ao apresentar o processo seguinte o aluno troca o sinal de igualdade pelo sinal de adição (**E7**) (Figura 20), entretanto ao dar continuidade ao seu desenvolvimento retorna com o sinal de igualdade no processo seguinte.

O erro **E8** é cometido pelos alunos A7 e A8, no qual ambos os alunos aplicam o princípio multiplicativo da igualdade de maneira errada, pois ao invés de dividirem o número 3,14 por 23,2, ambos invertem a operação, e dividem 23,2 por 3,14, este erro acaba por acarretar na razão correta para se obter o valor do diâmetro, entretanto o processo aplicado para se chegar a esta razão está errado. Ao entrevistar ambos os alunos notou-se que os alunos estavam perdidos ao realizarem a tarefa proposta, no qual, ambos, relataram que demoraram a compreender o que deveria ser feito na tarefa.

Observa-se que ao se analisar as respostas dos alunos pra o **item a**, boa parte dos erros foi apresentada pelos alunos A7 e A8, no qual o primeiro apresentou 6 dos 8 erros observados, e o segundo apresenta 5 dos 8 erros observados. Ressalta-se que ambos os alunos apresentam dificuldades em realizar o tratamento do registro algébrico, principalmente pela dificuldade em trabalhar com termos diferentes de “x”, outra dificuldade observada, foi a dificuldade de interpretação da tarefa proposta, ou seja, na dificuldade do aluno realizar a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico.

No **item b**, somente um aluno apresentou solução correta, e dois alunos apresentaram solução parcialmente correta, ambos devido novamente a um erro associado ao arredondamento incorreto. Os erros apresentados pelos alunos que apresentaram solução parcialmente correta e incorreta, para o **item b**, estão presentes no Quadro 5.

Quadro 5: Erros presentes no item b.

Tarefa	Erros apresentados nas respostas da tarefa
Dado que os volumes calculados são suficientes pra embalar 395 g de leite condensado, vamos considerar um volume constante. Escreva a expressão da altura do sólido em função do raio da base.	**E1:** Realiza o arredondamento de maneira incorreta; **E6**: Desaparece com termo presente na expressão anterior; **E8:** Aplica de maneira errada o princípio multiplicativo da igualdade.

Quadro 6: Resposta esperada para o item b.

Resposta esperada:

Será utilizada como medida constante para o volume, o valor sugerido pelos alunos, no caso V = 334 cm³.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 334 = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{334}{3{,}14 \cdot r^2} \Rightarrow h = \frac{106{,}4}{r^2}$$

$$(i) \quad \boldsymbol{h = \frac{106,4}{r^2}}$$

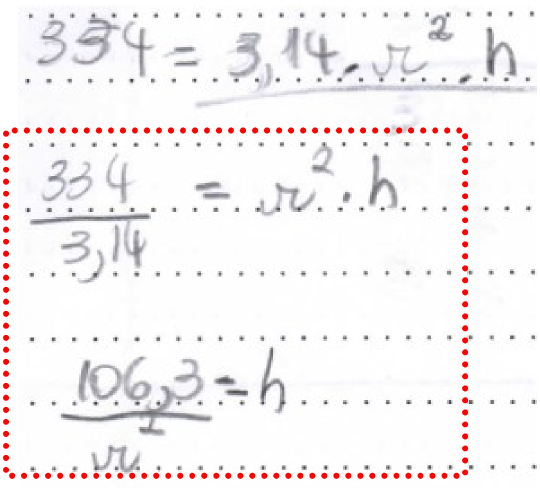
Para o **item b** foram analisadas as respostas apresentadas por sete dos participantes desta pesquisa, no caso, os alunos A2 ao A9, sendo que o aluno A1 e foi o único que apresentou resposta correta, sendo assim, sua resposta foi descartada para esta análise.

Ao estabelecer o valor para a medida do volume, os alunos em conjunto optaram por escolher o valor 334 cm³ como volume constante, entretanto esta não é a melhor medida para o volume solicitado, que se encontra entorno de 342 cm³ para as dimensões utilizadas na atividade, porém para não interferir nas medidas dos raios encontradas pelos alunos, optou-se em manter o valor obtido por eles.

Novamente observa-se o erro associado ao arredondamento incorreto (**E1**), este erro foi apresentado pelos alunos A2, A5, A6 e A7, sendo que, os alunos A2, A5 e A6 apresentaram o mesmo erro de arredondamento. Este três alunos, ao efetuar a divisão do número 334 por 3,14 obtém o valor 106,3 (Figura 22), entretanto o arredondamento do resultado aproximado de 106,369 levaria ao valor de 106,4. O aluno A7 efetua a subtração do número 334 pelo número 3,14 obtendo 330,8 (Figura 23), todavia ao efetuar a subtração obtém-se o número 330,86, que ao ser arredondado para uma casa decimal levaria ao número 330,9.

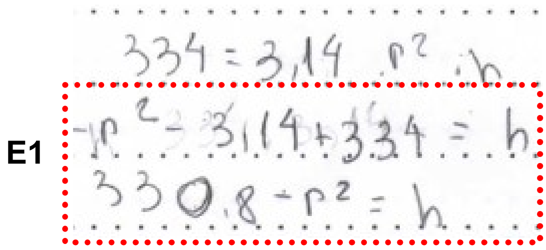
Figura 22: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item b.

E1



Fonte: Arquivo pessoal.

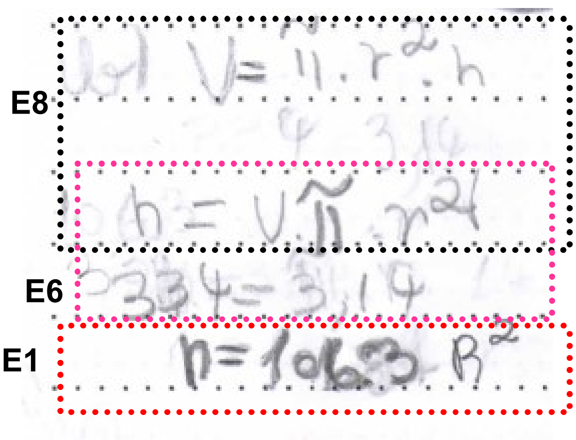
Figura 23: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item b.



Fonte: Arquivo pessoal.

O aluno A5 é o único aluno a apresentar o erro **E6** no **item b**, no qual ao realizar o desenvolvimento da resposta do **item b**, desaparece com os termo “r²” e “h”, obtendo a igualdade 334 = 3,14, para retorna-los somente no processo seguinte com a igualdade de h = 106,3.r² (Figura 24), ao ser questionado na entrevista se igualdade apresentada por ele era verdadeira, aluno assume que esta é falsa, entretanto ao ser questionado novamente de como ele obteve a expressão final para a tarefa, o aluno não soube responder, porém quando perguntado como obteve o valor 106,3 o aluno respondeu que dividiu o número 334 por 3,14, nota-se então que o aluno não apresenta domínio sobre o tratamento do registro algébrico, pois ao realizar o tratamento deste registro apresenta um desenvolvimento confuso, no qual não compreender os procedimentos realizados por ele mesmo.

Figura 24: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item b.



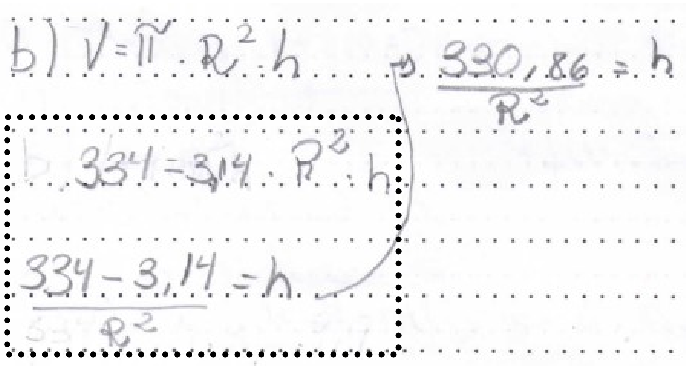
Fonte: Arquivo pessoal.

O erro **E7** está presente nas respostas apresentadas pelos alunos A3 ao A8, no qual os alunos aplicam de maneira errada o principio multiplicativo da igualdade, entretanto são apresentadas quatro variações deste mesmo erro.

A primeira variação deste erro está presente nas repostas dos alunos A3 e A4, no qual ao realizar o tratamento partindo da igualdade 334 = 3,14.r².h, com o objetivo de isolar a variável altura (h), ao invés de aplicar o principio multiplicativo da igualdade e dividir o 334 por “3,14.r²”, o aluno somente divide o 334 por r² e subtrai 3,14 de 334 (Figura 25 e Figura 26).

Figura 25: Resposta apresentada pelo aluno A3 para o item b.

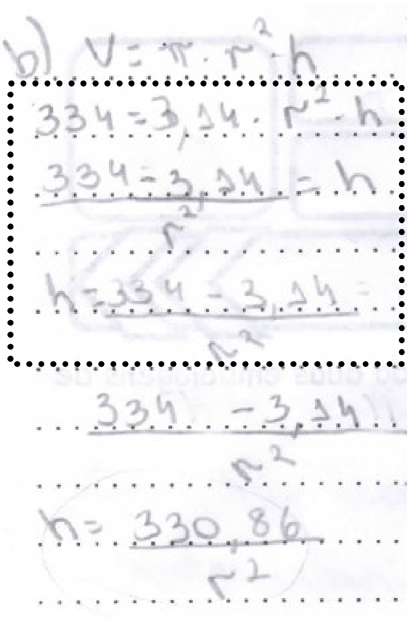
E8



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 26: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item b.

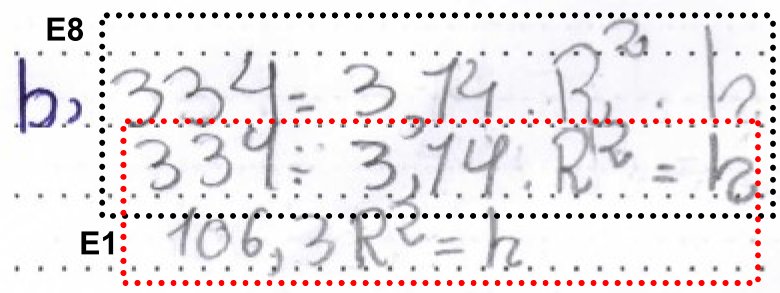
E8



Fonte: Arquivo pessoal.

A segunda variação do erro **E7** está presente nas respostas dos alunos A5 e A6, no qual ao se isolar a variável altura (h) partindo da igualdade 334 = 3,14.r².h, os dois alunos dividem número 334 por 3,14 e o multiplicam pelo termo “r²” obtendo a expressão presente na Figura 27.

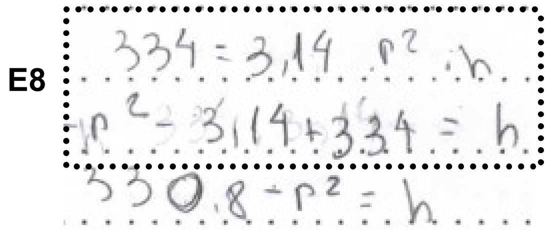
Figura 27: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item b.



Fonte: Arquivo pessoal.

A terceira variação do erro E7 está presente na resposta do aluno A7, no qual ao isolar a variável altura (h) partindo da igualdade 334 = 3,14.r².h, o aluno subtrai o número 3,14 e o termo “r²”, do número 334 obtendo a expressão presente na Figura 28.

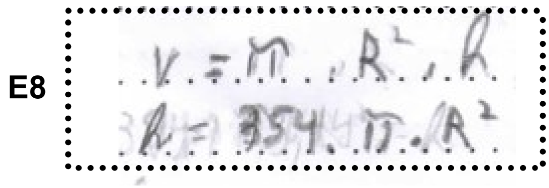
Figura 28: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item b.



Fonte: Arquivo pessoal.

A última variação do erro E7 foi apresentada pelo aluno A8, no qual ao isolar a variável altura (h) partindo da igualdade 334 = 3,14.r².h, o aluno obtém a expressão para a variável altura multiplicando o número 334 pelo monômio 3,14.r², sendo assim, apresentando a expressão para altura presente na .

Figura 29: Resposta apresentada pelo aluno A8 para o item b.



Fonte: Arquivo pessoal.

Observa-se nas respostas apresentadas pelos alunos para o **item b**, que com exceção dos alunos A1, A2 e A9, todos os demais apresentam dificuldades no tratamento do registro algébrico, quando há a necessidade de se realizar o tratamento de mais do que um termo na aplicação do princípio multiplicativo da igualdade, no qual os alunos aplicam o princípio multiplicativo somente para um termo da expressão ou o confundem com o princípio aditivo da igualdade.

O **item c** nenhum aluno apresentou a solução esperada, entretanto dois alunos apresentaram solução próxima a esperada, ou seja, solução parcialmente correta, sendo que, ambos os aluno A2 e A9, apresentaram erro no processo de arredondamento. Os erros apresentados pelos alunos no **item c** estão presentes no Quadro 7.

Quadro 7: Erros presentes no item c.

Tarefa	**Erros apresentados nas respostas da tarefa**
Escreva a expressão da área superficial do sólido em função do raio da base.	**E1:** Realiza o arredondamento de maneira incorreta; **E6**: Desaparece com termo presente na expressão anterior; **E9:** Ao multiplicar um número decimal por uma fração, efetua a multiplicação deste número com o numerador e o denominador da fração; **E10:** Realiza a multiplicação errada entre números reais; **E11:** Realiza multiplicação de monômios de forma incorreta; **E12**: Realização adição de monômios semelhantes de forma incorreta; **E13:** Deixa de realizar a propriedade distributiva.

Quadro 8: Reposta esperada para o item c.

Esperava-se que o aluno associasse a área superficial do cilindro como sendo a soma do valor da área lateral e da área das bases do cilindro:

$$(ii) \quad \boldsymbol{A_s = A_l + 2 \cdot A_b}$$

Em seguida esperava-se que os alunos obtivessem a área da lateral do cilindro em função do raio.

$$(iii) \quad \boldsymbol{A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$$

Para isso teriam que substituir (i) em (iii), obtendo:

$$A_l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot \frac{106{,}4}{r^2} \Rightarrow A_l = \frac{668{,}2}{r}$$

$$(iv) \quad \boldsymbol{A_l = \frac{668{,}2}{r}}$$

Em seguida esperava-se que os alunos obtivessem a área da base do cilindro em função do raio.

$$(v) \quad \boldsymbol{A_b = 3{,}14 \cdot r^2}$$

Com as expressões que representam a área da lateral e a área da base, esperava-se que os alunos substituíssem (iv) e (v) em (ii), obtendo:

$$A_s = \frac{668{,}2}{r} + 2 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow A_s = \frac{668{,}2}{r} + 6{,}28 \cdot r^2$$

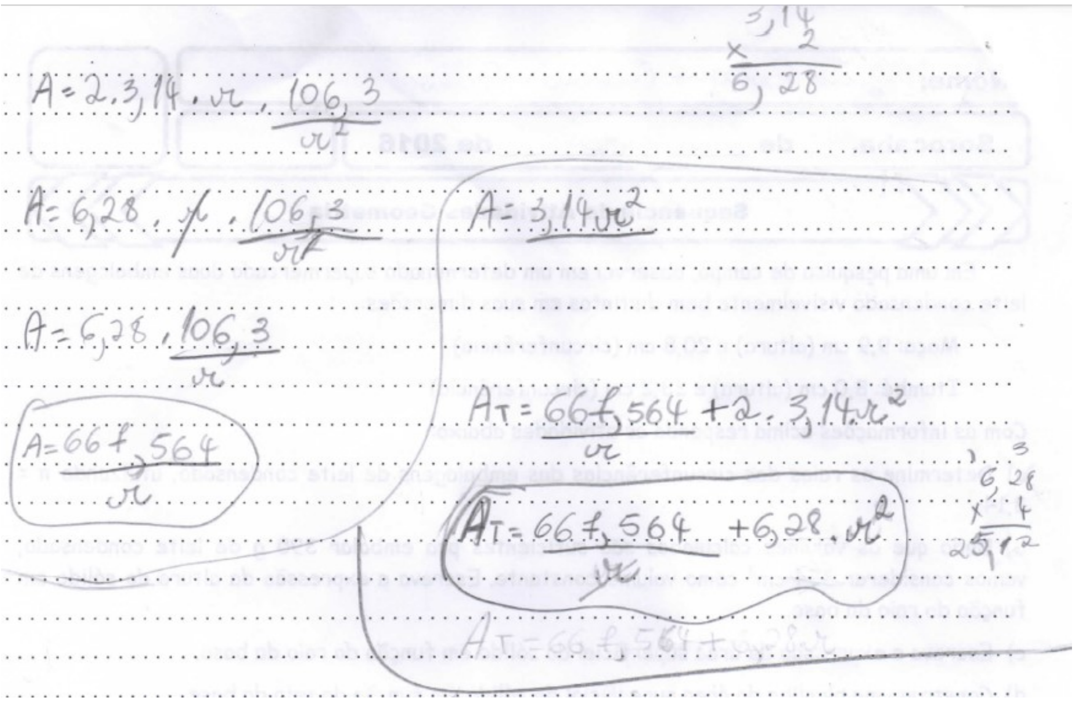
Portanto a resposta esperada para esta tarefa é

$$\boldsymbol{A_s = \frac{668{,}2}{r} + 6{,}28 \cdot r^2}$$

Para o **item c** foram analisadas as respostas apresentadas por oito dos nove participantes desta pesquisa, no caso, os alunos A1 a A7 e A9, sendo que o aluno A8 apresentou solução incorreta, entretanto pelo exposto na tarefa pelo aluno, não há como compreender o que fora realizado por ele, e mesmo por meio da entrevista, o aluno não compreendeu sua própria escrita e nem soube descrever o processo por ele realizado, portanto a atividade referente ao aluno A8 não foi analisada para classificação dos erros presentes no **item c**.

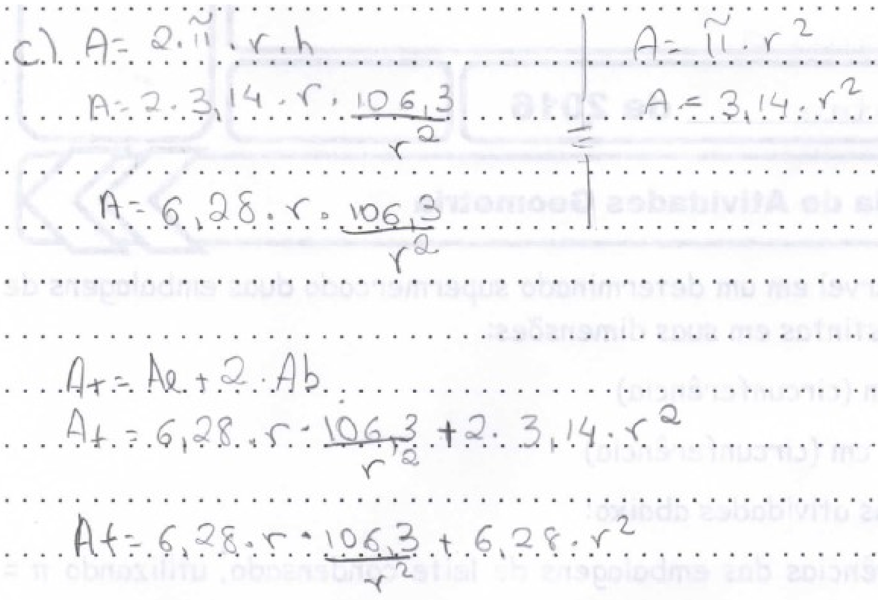
Os alunos A2 e A9 apresentaram em suas respostas somente o erro associado ao arredondamento (**E1**), entretanto este erro é decorrência do valor obtido no **item b** para variável altura, sendo que, para o **item c** apesar de utilizarem um valor com erro de arredondamento, não apresentam, apesar da desorganização, erros no tratamento do registro algébrico, como pode ser observado em suas respostas (Figura 30 e Figura 31). Entretanto outros alunos (A1, A5 e A6) apresentaram em suas respostas, para o **item c**, o erro **E1** associado ao erro de arredondamento, que serão apontados no decorrer da análise deste item.

Figura 30: Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

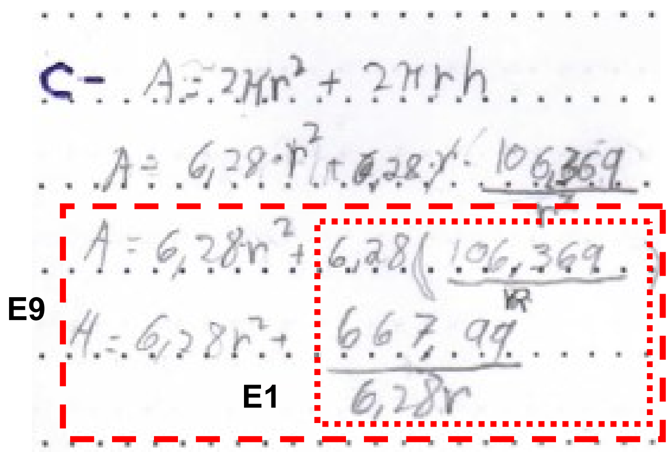
Figura 31: Resposta apresentada pelo aluno A9 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal

O aluno A1 é o único aluno a apresentar o erro **E9**, no qual o aluno ao multiplicar um número decimal por uma fração, efetua a multiplicação deste número com o numerador e o denominador da fração, este erro pode ser observado na Figura 32.

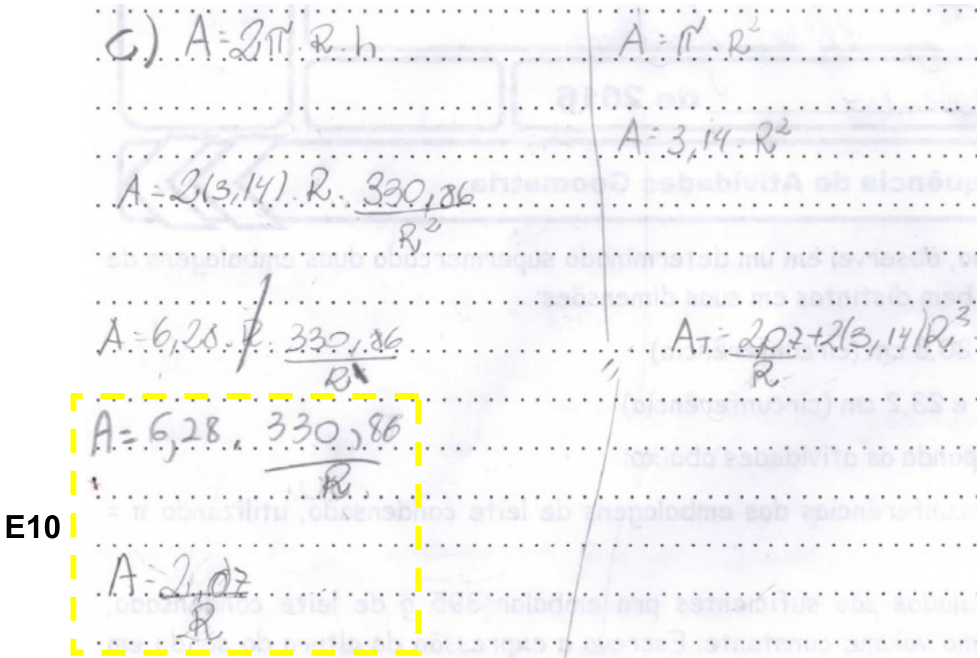
Figura 32: Resposta apresentada pelo aluno A1 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

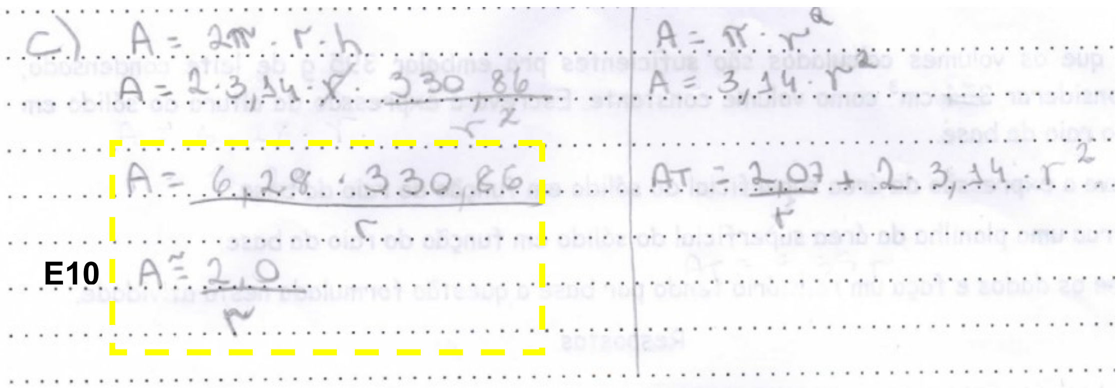
A multiplicação errada entre números reais (**E10**) é apresentada nas respostas produzidas pelos alunos A3 (Figura 33) e A4 (Figura 34), no qual ao multiplicarem os números 6,28 e 330,86 obtém como resultado o número 2,07, entretanto ao realizar esta operação obtém-se o número 2077,8008, ao entrevistar ambos os alunos, contatou-se que ambos confundiram o ponto (que na calculadora deles é vírgula) de divisão de classe de um número com a vírgula (que na calculadora deles é ponto) de um número decimal.

Figura 33: Resposta apresentada pelo aluno A3 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

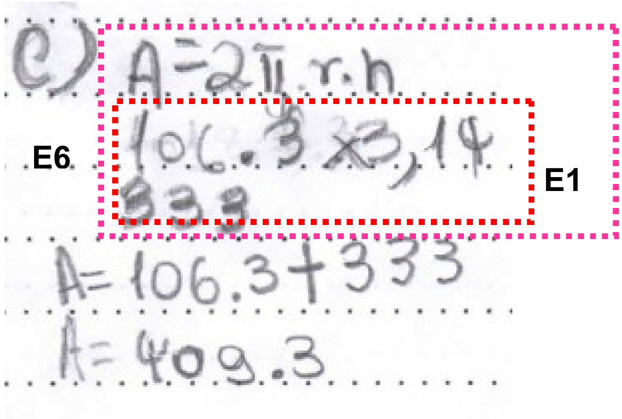
Figura 34: Resposta apresentada pelo aluno A4 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

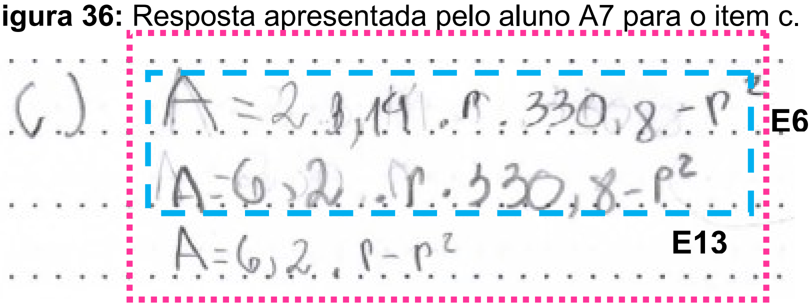
O erro **E6** esta presente na resposta apresentada pelos alunos A5 (Figura 35) e A7 (Figura 36), no qual ambos aos desenvolverem as expressões apresentadas desaparecem com termos presentes no processo seguinte, sendo que, a expressão final do aluno A5 designa um valor para a área total ta superfície, e o aluno A7 simplesmente desaparece com o número decimal 330,8 para após apresentar sua expressão final.

Figura 35: Resposta apresentada pelo aluno A5 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

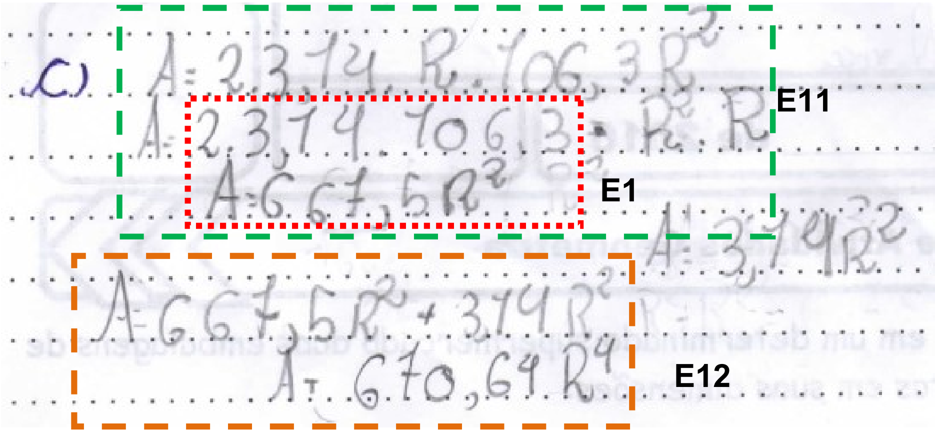
Figura 36: Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

Na resposta apresentada pelo aluno A6 (Figura 37), observa-se que o mesmo realiza a multiplicação de monômios de forma incorreta (**E11**), entretanto para realmente compreender o erro do aluno foi necessário questiona-lo durante a entrevista sobre os procedimentos adotados por ele, sendo assim, pode-se constatar que ao multiplicar dois monômios, o aluno realiza a multiplicação dos expoentes dos termos de mesma base, entretanto, neste caso deve-se somar os expoentes dos termos de mesma base e não multiplica-los. Este erro é apresentado somente pelo aluno A6.

Figura 37: Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item c.



Fonte: Arquivo pessoal.

O único aluno a apresenta o erro **E12** foi o aluno A6 (Figura 37), no qual ao realizar a adição de monômios semelhantes realiza a adição dos expoentes de termos com mesma base, entretanto neste caso deve-se conservar o monômio semelhante e operar somente os coeficientes.

O aluno A7 (Figura 36) é o único a apresentar o erro **E13**, no qual o aluno deixa de aplicar a propriedade distributiva, pois após substituir o termo “h” pela expressão 330,8 – r^2, o aluno multiplica somente o número 330,8 pelos termos “6,2” e “r”.

De todos os itens analisados, o **item c**, foi o qual os alunos mais tiveram dificuldade em realizá-lo, muitos não sabiam nem mesmo por onde começar a realizar este item, sendo que, os alunos constantemente pediam o auxilio do professor, com perguntas do tipo “Esta correto?”, “É assim mesmo que é para fazer?”, “O que eu tenho que fazer agora?”, entre outras.

Observa-se que os alunos A1, A2, A3, A4 e A9 apresentam domínio satisfatório no tratamento do registro algébrico, mesmo que para os alunos A1, A3, A4 tenham apresentado erros em suas construções estes erros estão relacionados a multiplicação de números decimais ou pela interpretação incorreta dos valores apresentados na calculadora. Em contraponto, os alunos A5, A6 e A7, apresentaram muita dificuldade no tratamento do registro algébrico, pois apresentaram respostas incompletas ou a falta de domínio das operações entre monômios.

No **item d**, novamente nenhum dos alunos apresentou a solução esperada, entretanto o único aluno que apresentou solução parcialmente correta efetuou somente o último cálculo referente a área total da superfície errado, na entrevista com o aluno pode-se perceber que o erro esta associado ao manuseio incorreto da calculadora, pois ao efetuar novamente o cálculo, que estava incorreto na atividade, o aluno obteve o valor correto. Os erros apresentados pelos alunos no **item d** estão presentes no Quadro 9.

Quadro 9: Erros presentes no item d.

Tarefa	Erros apresentados nas respostas da tarefa
Construa uma planilha da área superficial do sólido em função do raio da base**.**	**E1:** Realiza o arredondamento de maneira incorreta; **E2:** Realiza a divisão errada entre números reais; **E10:** Realiza a multiplicação errada entre números reais; **E14:** Apresenta dados incompatíveis com a expressão utilizada; **E15:** Realiza as operações entre números reais em ordem incorreta; **E16:** Confunde as operações a serem realizadas;

Quadro 10: Resposta esperada para item d.

Resposta esperada:

Abaixo esta um possível exemplo de resposta esperada para esta tarefa.

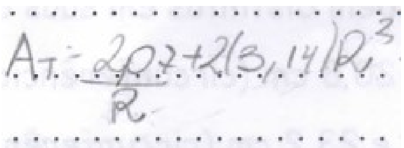
Raio (cm)	Área superficial (cm²)
1	674,48
1,5	459,60
2	359,22
2,5	306,53
3	279,25
3,3	270,87
3,7	266,57
4	267,53
4,5	275,66
5	290,64

Para o **item d** foram analisadas as respostas apresentadas por sete dos nove participantes desta pesquisa, no caso, os alunos A2, A3 a A7 e A9, sendo que, o aluno A1 mesmo utilizando expressão incorreta, os dados apresentados são compatíveis com a expressão utilizada por ele, e o aluno A8 apresentou solução incorreta, entretanto, novamente, pelo exposto na tarefa pelo aluno, não há como compreender o que fora realizado por ele, e mesmo por meio da entrevista, o aluno não compreendeu sua própria escrita e nem soube descrever o processo por ele realizado. Portanto as respostas apresentadas pelos alunos A1 e A8 não foram analisadas para classificação dos erros presentes no **item d**.

Novamente observou-se que os alunos apresentam dificuldades em relação às regras de arredondamento de números decimais, entretanto diferentes dos outros itens analisados, para o item d não será destacado este erro, em razão do grande volume de processos realizados pelos alunos que apresentam este erro.

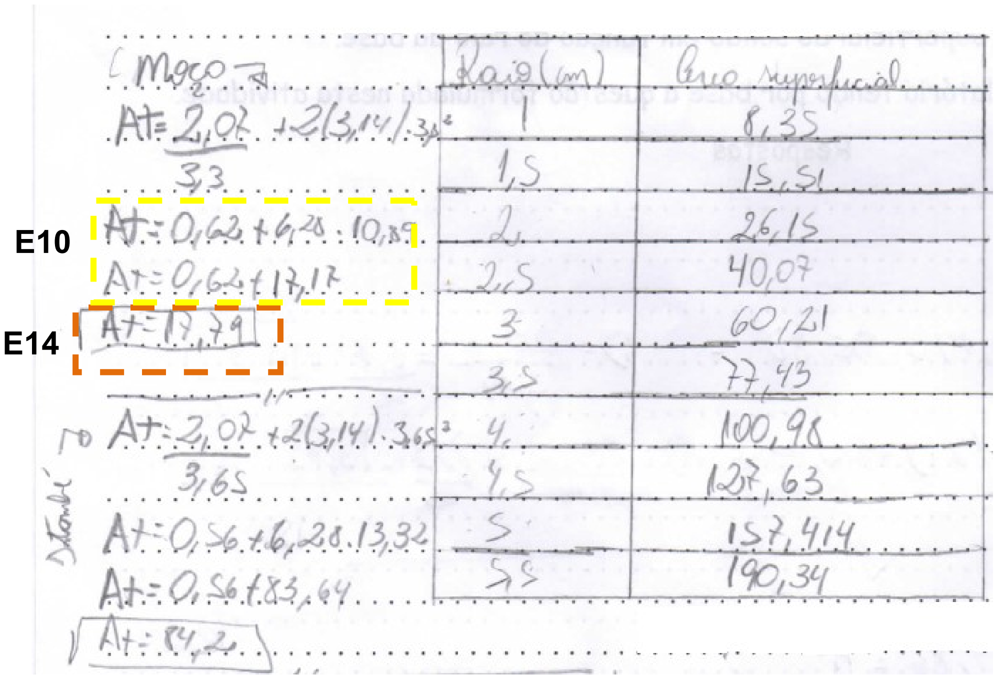
Com exceção do aluno A1, todos os demais alunos apresentaram algum dado incompatível com a expressão por eles realizada (**E14**). Os sete alunos analisados, neste item, apresentaram algum dos dados obtidos por eles incompatível com a expressão utiliza, entretanto os alunos A3 e A9 apresentaram somente um dos dados obtidos por eles incompatível, os demais alunos apresentaram todos os dados obtidos incompatíveis.

Figura 38: Expressão apresentada, no item c, pelo aluno A3.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 39: Dados apresentados pelo aluno A3 para o item d.

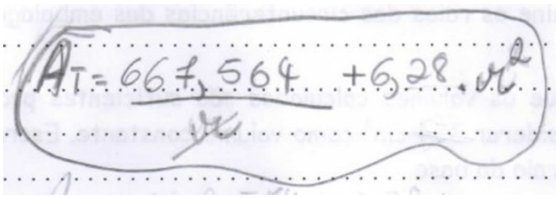


Fonte: Arquivo pessoal.

Como pode ser obsevado na Figura 39, o dado apresentado pelo aluno sofre discrepância com o dado esperado para o valor da área total da superfície para o valor do raio igual a 3,3 cm, pois o valor obtido 17,79 cm² de área não corresponde ao valor esperado para expressão utilizada pelo aluno, no caso aproximadamente 69 cm² de área de superfície, esta discrepância está associada ao valor errado da multiplicação dos números 6,28 e 10,89 (**E10**), que acarreta no valor incorreto para o raio calculado.

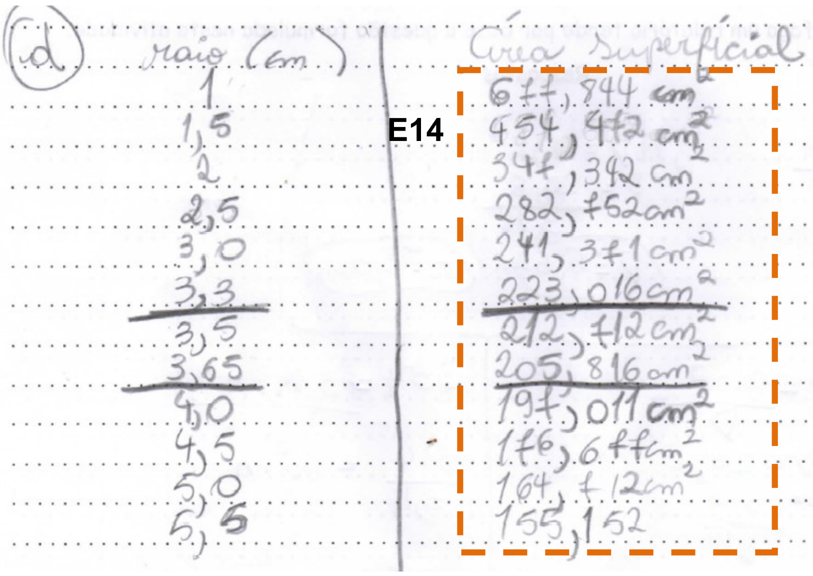
Entre os casos que apresentaram todos os dados incompatíveis com a expressão por eles utilizada, os alunos A1, A5 e A6, não apresentaram o desenvolvimento das operações realizadas por eles, destaca-se neste momento os dados apresentados pelo aluno A1 (Figura 41), que apresentou uma expressão (Figura 40) próxima da esperada para o **item c**, entretanto ao obter os dados do **item d**, apresenta todos os dados incompatíveis com a expressão por ele utilizada, e ao não apresentar o processo para obter os valores apresentado, houvesse a necessidade de questiona-lo durante a entrevista sobre o processo por ele realizado, no qual, constatou-se que o aluno realizou todos os procedimentos somente na calculadora, no qual pelo manuseio incorreto pode ter acarreto o erro apresentado, e que ao transcrever os procedimentos, dos três primeiros valores de raios, na folha de resposta durante a entrevista, obteve os valores esperados para expressão por ele utilizada.

Figura 40: Expressão apresentada, no item c, pelo aluno A2.



Fonte: Arquivo pessoal

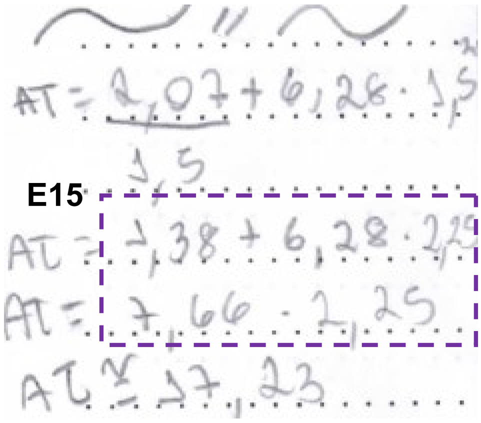
Figura 41: Dados apresentados pelo aluno A2 para o item d.



Fonte: Arquivo pessoal.

O aluno A4 apresenta, no desenvolvimento da resposta do item d o erro E15, no qual realiza as operações matemáticas em sequência incorreta, ao desenvolver a expressão com a substituição do valor do raio (r), realiza primeiramente a operação de adição ao invés de realizar a operação de multiplicação como pode ser observado na Figura 42.

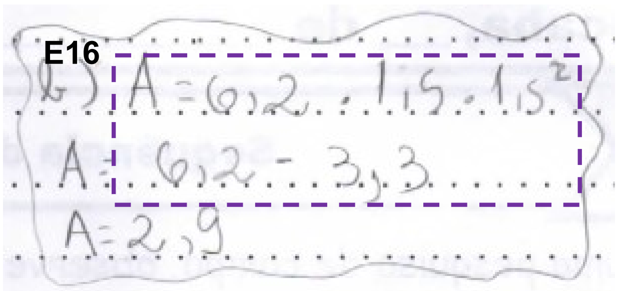
Figura 42: Exemplo de processo realizado pelo aluno A4 com o erro E15.



Fonte: Arquivo pessoal.

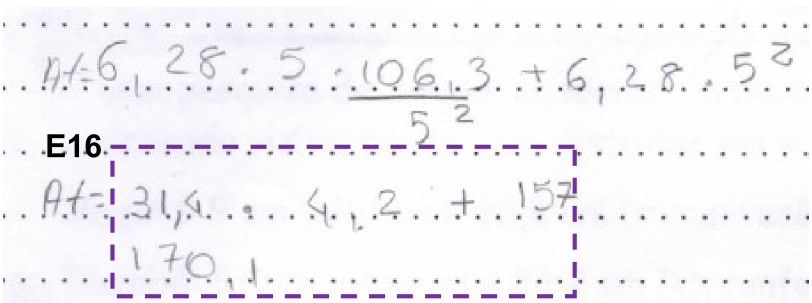
Por fim, os alunos A7 (Figura 43) e A9 (Figura 44) confundem as operações a serem realizadas (**E16**) no desenvolvimento de suas respostas. Destaca-se que o aluno A7 ao realizar a tarefa em questão e depois ao ser entrevistado, destaca-se que o aluno sabia que estava fazendo algum processo de forma errada, pois os valores da área total da superfície que estava obtendo se apresentam negativos, entretanto por estar no final da aula disponível para realizar esta tarefa não houve tempo hábil para que ele mesmo corrigisse os valores obtidos.

Figura 43: Exemplo de processo realizado pelo aluno A7 com o erro E16.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 44: Exemplo de processo realizado pelo aluno A9 com o erro E16.



Fonte: Arquivo pessoal.

Novamente observa-se que os alunos apresentaram no desenvolvimento desta tarefa o erro associado ao arredondamento, no qual os alunos realizaram o arredondamento independente do número de casas decimais, sempre mantendo o número a ser conservado independente do número que estivesse anterior a ele. Outro erro observado é aquele associado ao tratamento do registro algébrico, nos casos dos erros E2, E10, E14, E15 e E16, no qual estão todos relacionados ao tratamento deste registro.

Os erros apresentados pelos alunos no **item e** estão relacionados a análise incorreta dos alunos dos dados colhidos ou da análise dos dados incorretos, pois alguns alunos apresentaram conclusões que condiziam com os dados por eles apresentados, entretanto ao justificar observavam que na realidade a lata que eles julgavam ter menor custo de produção, é na verdade a lata com maior valor no mercado, a esta diferença eles buscavam justificar por meio da qualidade do produto ou pela tradição do produto no mercado.

Esperava-se que os alunos concluissem que há uma maior economia de material ao se produzir a lata da marca Itambé do que ao produzir a lata da marca Moça, principalmente a analise fosse feita em escala industrial, ou seja, em milhões de unidades produzidas. E por meio desta diferença justificar a diferença entre os preço das duas marcas análisadas.

O aluno A4 apresentou a seguinte conclusão e sua respsota para o item e: O produto Itambé tem área total maior do que do produto Moça, mas os dois carregam o mesmo valor de conteúdo (o produto dentro da lata), com isso concluimos que não é só porque a área é maior, que tem mais conteúdo. Para poder ter vantagens, observar o preço ou a tabela nutricional.

Figura 45: Reposta apresentada para o item pelo aluno A9.

Cheguei no resultado que a área total da lata meça é maior do que a Stambé. Porém, o raio da Meça é menor do que a Stambé. Eu entendi que mesmo que as latas tem medidas e tamanhos diferentes, cabem a mesma quantidade de conteúdo.

Se eu estivesse em um mercado, e tivesse uma lata de Stambé e Meça, eu escolheria a Meça, pois parece que tem mais porém o Stambé parece ser mais barato, pois o conteúdo parece ser menor e, geral-mente quando o produto tem conteúdo, a empresa cobra mais barato, mas pode ser que o conteúdo seja igual.

Fonte: Arquivo pessoal.

Ao todo foi possível realizar a classificação e codificação de 16 classes de erros presentes nas tarefas realizadas pelos alunos na sequência de atividades proposta, grandes parte destes erros estão relacionados a dificuldade em se realizar o tratamento do registro algébrico, entretanto o erro que mais se repetiu em todas as tarefas analisadas foi o erro associado ao arredondamento, no qual, pode-se observar que todos os alunos participantes da pesquisa apresentaram este erro em pelo menos uma das tarefas propostas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procurou-se neste trabalho classificar e analisar os erros apresentados por alunos do 9º ano do ensino fundamental, ao classificar e analisar as respostas dos alunos buscou-se responder duas perguntas que viriam a ser as questões norteadoras desta pesquisa, sendo que, a primeira busca determinar quais os erros são apresentados com mais frequência pelos alunos? E a segunda vem a tentar compreender quais os possíveis motivos que levam os alunos a apresentar tais erros?

A análise das tarefas realizadas pelos alunos foi um grande desafio, pois precisou se analisar com cuidado cada material produzido sem que algum erro ficasse sem ser classificado, em muitos momentos foi preciso muita reflexão para classificar um erro, pois sempre havia a necessidade de rever os erros já encontrados, e sendo assim, se necessário, agrupa-los em uma única classe.

Para responder as questões norteadoras deste trabalho, utilizou-se para a classificação dos erros a taxionomia dos erros propostas por Borasi (1996) apud CURY, (2007, p.37), e discutida por Cury (2007) em seu trabalho, e como suporte para a análise utilizou-se os registros de representação semiótica para apontar as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Sendo assim, para a primeira questão deste trabalho, no qual consiste em determinar quais os erros são apresentados com mais frequência pelos alunos? Ao realizar a classificação e análise das respostas dos alunos, concluiu-se que o erro com maior frequência apresentado pelos alunos analisados é aquele associado a falta de domínio dos alunos acerca das regras de arredondamento (E1), sendo que, os demais erros apresentados foram cometidos, muitas vezes, por somente um aluno, entretanto o erro E1 foi apresentado por todos os alunos alvo desta pesquisa.

A segunda questão deste trabalho, na qual buscava se compreender quais os possíveis motivos que os levam a apresentar tais erros? A resposta desta pergunta pode estar associada ao pouco tratamento das regras de arredondamento por parte do material didático, no qual este é tratado somente no 6º ano do ensino fundamental, somado a isso ao pouco tratamento do assunto de forma separada pelo professor responsável pela sala, pois nos dois anos, nos quais acompanha esta turma foram poucas as aulas dedicadas a tais regras.

Os resultados apresentados nesta pesquisa fizeram com que o autor desta pesquisa refletisse sobre o trabalho que desenvolve com meus alunos, pois ao iniciar a elaboração desta pesquisa buscava-se que erros associados a conversão entre os registros figurais e algébrico fossem os que os alunos apresentassem com maior frequência, entretanto foi o erro na aplicação das regras de arredondamento, um dispositivo básico ao se trabalhar com números decimais, o erro com maior frequência entre os alunos.

A primeira medida a ser tomada para conter este erro (E1) será a elaboração de uma aula e uma sequência de atividades com a turma alvo desta pesquisa, com o objetivo de discutir e aplicar as regras de arredondamento. Uma segunda medida a ser tomada é analisar o material didático dos anos anteriores quanto à abordagem das regras de arredondamento de números decimais, e por fim, elaborar aulas para as demais turmas do ensino fundamental e ensino médio sobre as regras de arredondamento.

Como pesquisador este trabalho abriu uma nova visão sobre como avaliar as produções dos alunos, pois ao classificar e analisar os erros, apresentados pelos alunos, pode-se confirmar algumas percepções e observar dificuldades que durante a rotina comum de sala de aula passam despercebidas.

Referências Bibliográficas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5891**: Regras de arredondamento na numeração decimal, Rio de Janeiro, 2ª ed, 2014.

BRUM, Lauren Darold; CURY, Helena Noronha. Análise de erros em soluções de questões de álgebra: uma pesquisa com alunos do ensino fundamental. **REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.4, n.1, p.45-62, 2013.

CURY, Helena Noronha. **Análise de Erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. **Zetetiké,** Campinas, ano 3, n.4, p. 39-50, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Sistema de ensino Ser:** ensino fundamental II, 6º ano, caderno 4, matemática. 2ª edição. São Paulo: Bercrom Gráfica e Editora, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Sistema de ensino SER**: ensino fundamental II, 9º ano, caderno 5, matemática. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2016.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis ET Pensée Humaine: Registres Sémiotiques ET Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lénio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo. Editora Livraria da Física, dascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012b.

OLIVEIRA, Paulo César; SANTANA, Jucimara Rosa da Silva. Resolução de problemas: Que prática pedagógica podemos revelar?. **Revista Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 2, p. 373-387, jul./dez. 2012

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araujo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.