

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
Campus de Sorocaba/SP

Édrei Henrique Lourenço

**CONGRUÊNCIA, SEMÂNTICA E EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL EM
EQUAÇÃO DO 1º GRAU**

GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Sorocaba

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
Campus de Sorocaba/SP

Édrei Henrique Lourenço

**CONGRUÊNCIA, SEMÂNTICA E EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL EM
EQUAÇÃO DO 1º GRAU**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado junto à Banca Examinadora da Universidade Federal de São Carlos – campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de **LICENCIADO EM MATEMÁTICA**, sob a orientação do Professor Dr. Paulo César Oliveira.

Sorocaba

2017



Folha de aprovação

Édrei Henrique Lourenço

**"CONGRUÊNCIA, SEMÂNTICA E EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL
EM EQUAÇÃO DO 1º GRAU"**

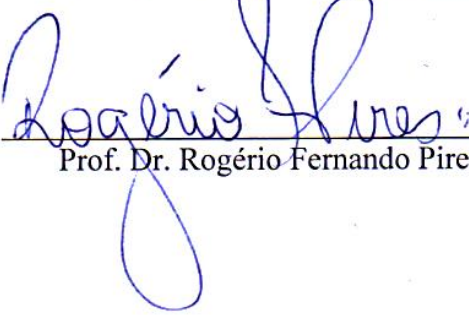
Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 21/08/2017.

Orientador 
Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Membro 2 
Prof.^a Dr.^a Magda da Silva Peixoto

Membro 3 
Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

[...]

*Somos muitos Severinos
iguais em tudo e na sina:
a de abrandar estas pedras
suando-se muito em cima,
a de tentar despertar
terra sempre mais extinta,
a de querer arrancar
algum roçado da cinza.*

[...]

(João Cabral de Melo Neto)

*À Deus, por seu infinito amor, à
minha mãe, pela dedicação e à minha
noiva Michele pelo apoio
incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que segundo o beneplácito de sua vontade me conduziu até esse momento, guiando em todo instante os meus passos.

Agradeço a minha mãe, Claudinéia Moura de Melo Lourenço, pessoa na qual me inspiro e pela qual transpiro, procurando sempre honrar. Agradeço também a meu pai, Ademildon Lourenço, pelo carinho e incentivo.

Ao prof. Dr. Paulo César Oliveira pela orientação segura e precisa, pelo tempo dedicado desde a pesquisa de Iniciação Científica, pela paciência, pela amizade, por acreditar no meu trabalho, por semear e regar essa semente da Educação Matemática em minha vida acadêmica e estar acompanhando seu crescimento em mim até o presente.

Agradeço a prof^a. Dr^a. Magda da Silva Peixoto por aceitar participar desse trabalho como membro da banca examinadora. Pela dedicação e imensa contribuição ao curso de Licenciatura em Matemática dessa universidade e, ainda, por ter me aconselhado a buscar orientação do prof. Paulo, quando aspirava desenvolver uma pesquisa de Iniciação Científica. O presente trabalho também é fruto desse conselho.

Agradeço ao prof. Dr. Rogério Fernando Pires por aceitar fazer parte da banca examinadora desse trabalho e, em especial, por tantos bons conselhos dados como professor e como amigo, pelos ensinamentos, pela parceria enriquecedora durante as aulas do PIC-OBMEP. Sem dúvida, em tudo isso contribuiu significativamente para minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas do Departamento de Física, Química e Matemática da UFSCar pela companhia ao longo de toda a graduação, pelo incentivo, pelos momentos tão felizes de descontração e pelas inúmeras experiências de aprendizagem compartilhada.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Física, Química e Matemática por terem contribuído significativamente para meu crescimento intelectual, fazendo parte da minha vida, da minha história.

Agradeço aos meus queridos irmãos Caroline Lourenço e Gabriel Lourenço pelo amor, amizade e companheirismo.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à Michele, que esteve sempre presente apoiando e doando amor de modo que, a multidão dessa dedicação, não fora estuda nem mesmo por G. Cantor, o homem do infinito.

A todos, muito obrigado!

RESUMO

Problemas que envolvem a passagem de um enunciado descrito em língua natural para uma expressão algébrica costumam gerar grandes dificuldades nos estudantes e são alvos de relatos de muitos professores. O relato tradicional é que tais dificuldades residem na interpretação do enunciado. De acordo com as discussões realizadas no Grupo de Estudo e Planejamento de Aulas de Matemática, a referida dificuldade é decorrente do fenômeno da não congruência semântica (DUVAL, 2009). Assim, o presente trabalho teve por objetivo analisar quais critérios de congruência são conservados em quinze problemas de primeiro grau apresentados no material didático utilizado em uma escola da rede particular da cidade de Sorocaba, bem como tecer reflexões sobre a influência dos critérios não conservados nas possíveis dificuldades dos alunos. Três questões guiaram esta investigação, a citar: Quais dos três critérios de congruência elencados por Duval (2009) são conservados em cada um dos problemas? Qual a incidência da não conservação para cada um dos critérios nos problemas selecionados? Qual é a relação entre o eventual fenômeno da não congruência verificado e as possíveis dificuldades dos alunos em equacionar os problemas selecionados? A escolha por analisar o material didático em questão foi motivada pelas considerações de Lajolo (1996). Assim, o desenvolvimento dessa pesquisa bibliográfica e documental apontou o baixo índice de conservação da correspondência semântica das unidades de significado e o alto índice de conservação da univocidade semântica terminal. Além disso, mostrou-nos que as pesquisas realizadas sobre o tema, embora contribuam para a compreensão de tais dificuldades, são bastante limitadas no sentido que restringem suas discussões a um tipo específico de problema de primeiro grau. Então, os dados levantados apontaram para a necessidade de se ampliar as análises realizadas nesses trabalhos, considerando a variedade de tipos de problemas de 1º grau.

Palavras-chave: Registros de Representação; Congruência Semântica; Critérios de não Congruência; Conversão de Registos; Língua Natural e Linguagem Algébrica.

ABSTRACT

Problems involving of passage from a natural language statement to an algebraic expression often cause great difficulty for students and are the subject of many teacher talks. The traditional speech is that such difficulties lie in the interpretation of the statement. We believe, motivated by discussions carried out in the Study Group and Planning of Mathematics Classes, that this difficulty is due to the phenomenon of non-congruence (DUVAL, 2009). Thus, the present study objetive analyze the congruence criteria what are conserved in fifteen first degree problems, at the didactic material used in a school in the private network of the city of Sorocaba, as well as writing reflections on the influence of non-conserved criteria on the students' possible difficulties. Three questions guided this research, being: Which of the three criteria of congruence listed by Duval (2009) are conserved in each of the problems? What is the incidence of non-conservation for each of our selected criteria? What is the relation between the possible phenomenon of the non-congruence verified whif difficulties of students in to equat the selected problems? The choice to analyze the didactic material in question was motivate by considerations of Lajolo (1996). Thus, the development of this bibliographic and documentary research pointed to the low conservation index of the semantic correspondence of the units of meaning and the high conservation index of the terminal semantic univocity. Moreover, it has shown that the selected researches have contributed to an understanding of such difficulties, but they are rather limited in the sense that they restrict their discussions to a specific type of first-degree problem. Thus, the data collected pointed to the need to expand the analyzes performed in these studies, considering a variety of types of first degree problems.

Keywords: Representation Registers; Semantic Congruence; Criteria of non-congruence; Conversion of Records; Natural Language and Algebraic Language.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Ilustração das transformações de registros do tipo tratamento e do tipo conversão em um problema de primeiro grau.....	12
FIGURA 2: Exemplos relativos à conservação (ou não) da correspondência semântica das unidades de significado	13
FIGURA 3: Exemplo relativos à não conservação da ordem das unidades de significado	14
FIGURA 4: Exemplos relativos à conservação (ou não) da univocidade semântica terminal	15
FIGURA 5: Ícones e seções constantes na apostila de matemática do material selecionado	20
FIGURA 6: Situação-problema proposta na apresentação do quarto capítulo	22
FIGURA 7: Questionamentos feitos aos alunos sobre a situação proposta.....	22
FIGURA 8: Situação-problema apresentada para exemplificar a utilização de equações do primeiro grau com uma incógnita na resolução de problemas.....	23
FIGURA 9: Exemplos resolvidos apresentados assinalados com ícone "Exercícios resolvidos"	24
FIGURA 10: Ilustração da não conservação do critério C no problema P1	29
FIGURA 11: Análise dos critérios de congruência do problema P2.....	31
FIGURA 12: Interpretação da conservação do critério C no problema P4.....	34
FIGURA 13: Representação auxiliar que pode ser utilizada no problema P6.....	37
FIGURA 14: Ilustração da análise de congruência feita no problema P13	48
FIGURA 15: Análise de congruência feita no problema P15	52

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Problema número 1 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	27
QUADRO 2: Problema número 2 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	30
QUADRO 3: Problema número 3 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	32
QUADRO 4: Problema número 4 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	33
QUADRO 5: Problema número 5 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	34
QUADRO 6: Problema número 6 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	36
QUADRO 7: Problema número 7 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	38
QUADRO 8: Problema número 8 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	39
QUADRO 9: Problema número 9 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	42
QUADRO 10: Problema número 10 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	43
QUADRO 11: Problema número 11 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	45
QUADRO 12: Problema número 12 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	46
QUADRO 13: Problema número 13 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	47
QUADRO 14: Problema número 14 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	49
QUADRO 15: Problema número 15 com análise da conservação dos critérios de congruência.....	51

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: Equações obtidas nas análises para o problema P1	28
TABELA 2: Equações obtidas nas análises para o problema P8	41
TABELA 3: Equações obtidas nas análises para o problema P9	43
TABELA 4: Síntese da análise de congruência realizada nos problemas.....	53

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO I	10
Referencial Teórico	10
1.1. Registros de Representação Semiótica	10
CAPÍTULO II	17
Referencial Metodológico	17
2.1. Proposta pedagógica para o ensino de Matemática.....	18
2.2. Organização da apostila selecionada.....	19
CAPÍTULO III	26
Análise dos Problemas	26
3.1. Análise dos problemas selecionados	26
3.2. Discussão acerca da análise feita nos problemas selecionados.....	52
CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
REFERÊNCIAS.....	65

INTRODUÇÃO

Historicamente, ao se iniciar o estudo da Álgebra, os problemas que envolvem a passagem de um enunciado descrito em língua natural para uma expressão algébrica (traduzida simbolicamente com variáveis e símbolos para as relações e operações), constitui, para muitos alunos, um abismo quase que intransponível. O tema tem despertado grande interesse de pesquisadores da Educação Matemática que procuram compreender tais dificuldades, bem como sugerir alternativas a fim de minimizar o hiato notado.

Gil (2008a) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de compreender as dificuldades que os alunos possuem na aprendizagem da Álgebra, tendo em vista as inquietações que tais dificuldades lhe causavam desde seus primeiros anos de docência. Após realizar revisão da literatura, aplicar testes, entrevistar alunos e professores da 7ª série (atual 8º ano) do Ensino Fundamental, destacou que na resolução de um problema envolvendo equações de 1º grau, o aluno necessitou fazer a “tradução” da linguagem corrente para a linguagem algébrica e, segundo a autora, as dificuldades nessa tradução residiram na interpretação da questão.

Acreditamos, de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, que a referida dificuldade é decorrente, em grande parte, do efeito do fenômeno da não congruência semântica e, por isso, o mesmo deve ser seriamente levado em conta no ensino e nas reflexões sobre o ensino de Matemática.

O fenômeno da não congruência pode ser caracterizado de forma sumária como sendo o entrave no reconhecimento de um objeto matemático em representações diferentes. Esse bloqueio está muito associado a não conservação de ao menos um de três critérios elencados por Duval (2009) na teoria dos Registros de Representação Semiótica. No capítulo destinado ao referencial teórico dessa pesquisa detalhamos mais sobre a não congruência.

No que tange à utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica, destacamos o trabalho de Ferreira, Santos e Curi (2013) que mapeou e analisou 80 pesquisas, dentre dissertações e teses, na área de Educação Matemática realizadas no Brasil no período de 2002 a 2012, que foram norteadas

pela utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica. O objetivo das autoras foi apresentar um panorama do uso dessa teoria, bem como identificar mudanças ocorridas nas abordagens das pesquisas, considerando os apontamentos de outro trabalho de mesma natureza, publicado por Colombo, Flores e Moretti (2008).

Por um lado, Ferreira, Santos e Curi (2013) destacaram o expressivo número de trabalhos realizados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), totalizando 34 dos 80 trabalhos, representando 42,5% do total. Esse fato já havia sido destacado em Colombo, Flores e Moretti (2008), permitindo caracterizar os pesquisadores de tal instituição como grandes estudiosos dessa abordagem teórica.

Por outro lado, as análises das pesquisas realizadas por Ferreira, Santos e Curi (2013, p.13) apontaram que há “uma carência no cenário da Educação Matemática de utilizar a teoria de Duval (1993¹, 2009) não apenas para evidenciar um “jogo” de registros, mas sim, para efetivamente auxiliar os alunos a terem autonomia na aprendizagem matemática”. Segundo as autoras, esse trabalho confirmou a necessidade de reflexões que abarquem orientações para professores sobre a utilização de tal teoria.

Outro ponto de suma importância destacado por Ferreira, Santos e Curi (2013, p.12) foi que a utilização de diferentes registros de representação nos processos de ensino e aprendizagem podem contribuir para a aprendizagem matemática. Essa é a tese principal defendida por Raymond Duval em sua teoria e mais ainda, segundo a teoria, não só contribui, mas é essencial. Porém, as autoras destacaram que “a mobilização desses registros em termos de congruência é um desafio para a maioria dos alunos em Matemática” e que “práticas que levem em conta esse fato precisam ser mais bem discutidas e desenvolvidas”.

Dessa forma, considerando os apontamentos da pesquisa de Ferreira, Santos e Curi (2013), o presente estudo se propõe a analisar problemas envolvendo equações de 1º grau considerando a teoria dos Registros de Representação Semiótica como aporte teórico. A análise e reflexão centralizaram-se na relação entre o fenômeno da não congruência semântica e as possíveis dificuldades dos

¹ DUVAL, Raymond. Registres de representation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, IREM-ULP, França, v.5, 1993, p.37-64.

alunos. Acreditamos que tal análise originou orientações para professores sobre a utilização da referida teoria para promoção da autonomia do aluno, trazendo à baila um dos pontos iniciais do trabalho pedagógico, que é a escolha dos problemas a serem resolvidos.

É fato que, ao selecionar problemas envolvendo equações do 1º grau para serem discutidos em aula ou sugeridos para estudo em casa, seja para introdução ou aprofundamento do assunto, os professores consultam, em sua maioria, livros didáticos.

O livro didático é a principal e, em alguns casos, a única fonte de consulta que os professores recorrem para preparar suas aulas. Esses professores geralmente seguem a estrutura e a abordagem dada pelo livro didático, fazendo pequenas alterações para adequar ao contexto escolar no qual estão inseridos. A respeito do uso do livro didático, Lajolo (1996, p.4) destaca que:

O livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. (LAJOLO, 1996, p.4)

Nesse sentido, entender o que os livros didáticos trazem relacionado ao estudo de problemas envolvendo equações de 1º grau pode direcionar tomadas de posições didáticas positivas no ensino de tal conteúdo, pois é possível verificar o que é necessário acrescentar, retirar ou mesmo remodelar a fim de proporcionar uma aprendizagem mais sólida para o educando.

Além do livro didático, no contexto escolar da rede particular, é comum a utilização de materiais didáticos apostilados de determinados 'sistemas de ensino', que sugerem atividades e planos de aula que podem ser utilizados/seguídos pelo professor em sua prática. Atualmente, na maioria das escolas da referida rede, estes materiais são extensos e, geralmente, estão associados a uma prática pedagógica tradicional.

Assim, como lecionamos atualmente na rede particular de ensino e vivenciamos a realidade dela, julgamos adequado analisar o material de ensino utilizado na instituição na qual atuamos.

Portanto, nosso objetivo de pesquisa é analisar quais critérios de congruência são conservados em quinze problemas de primeiro grau apresentados no material didático selecionado, quando consideradas as representações em língua natural e algébrica por meio de equações do 1º grau, bem como tecer reflexões sobre a influência dos critérios não conservados nas possíveis dificuldades dos alunos.

Para tanto, procuramos responder as seguintes questões de investigação: Quais dos três critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) são conservados em cada um dos problemas? Qual a incidência da não conservação para cada um dos critérios nos problemas selecionados?

Costa (2010) dissertou sobre a pesquisa que realizou com o objetivo de investigar “em que medida acontece a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau” (COSTA, 2010, p. 13). Esse objetivo foi motivado pelas dificuldades constatadas em diversas pesquisas sobre a temática no que tange a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, bem como pela constatação, pelo autor, de tais dificuldades encontradas pelos alunos de uma turma de 8º ano. Segundo o autor, os alunos faziam as transformações de forma mecânica e sem compreensão dos procedimentos empregados.

Assim, Costa (2010) elaborou oito problemas de primeiro grau do tipo partilha, fixando alguns elementos e variando apenas os fatores de congruência que foram conservados, tendo em vista associar a influência desses na conversão dos registros. A fixação do tipo de problema se deu para que o autor pudesse minimizar a influência do contexto nas conversões necessárias.

Assim, após aplicar as questões elaboradas a 217 alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, Costa (2010) caracterizou as respostas apresentadas pelos alunos em seis grupos, dado que ele não impôs aos alunos o tipo de escrita que os mesmos deveriam priorizar, de modo que o que foi considerado nessa pesquisa não foi a resolução do problema em si, mas sim a primeira etapa do processo, a conversão.

Costa (2010) apresentou, dentre outros resultados, que para o problema em que os três critérios não eram conservados a taxa de conversão total para o registro

algébrico foi a menor de todas, indo ao encontro com o que pressupõe Duval (2009). Além disso, Costa (2010) destacou que grau da não congruência foi acentuado também para um desses critérios em particular, o da conservação da univocidade semântica terminal (que será detalhado posteriormente), inferindo que “nos problemas de partilha a influência dos três fatores interfere tanto quanto a univocidade semântica” (COSTA, 2010, p. 87).

Silva (2011) baseou-se no trabalho de Costa (2010) para tecer suas discussões, utilizando inclusive os mesmos problemas elaborados e os protocolos obtidos por esse autor. Seu objetivo, porém, foi “analisar em que medida a estrutura de problemas baseados em fatores de congruência podem conduzir os alunos a determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica” (SILVA, 2011, p.16).

Silva (2011) fez uma reorganização dos protocolos utilizados em Costa (2010) e posteriormente tratou os dados com o auxílio de um *software*, chamado Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC), tencionando fazer o cruzamento das respostas categorizadas e os sujeitos participantes da pesquisa.

Com os resultados encontrados Silva (2011) pode inferir, com a utilização do *software* CHIC que em média, 59% dos alunos não lançaram mão dos registros algébricos para tentar resolver os problemas envolvendo equações do primeiro grau propostos. Segundo Silva (2011, p.60), isso pode ser um indicativo de que os alunos possuem dificuldades ao utilizar tal registro, conforme pressuposto de pesquisas anteriores.

Silva (2011) destacou, dentre outros pontos, que quando o problema de partilha conserva a univocidade semântica terminal e as relações são multiplicativas há uma chance maior de os alunos utilizarem o registro em linguagem algébrica. Além disso, apontou que:

“[...] o único fator que parece interferir no emprego do registro algébrico na conversão dos problemas propostos é a correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro de representação na língua natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem natural”. (SILVA, 2010, p.66)

É importante destacar que tal consideração feita por Silva (2011) é específica dos oito problemas de partilha aplicados, buscando generalizar tal situação para esses tipos de problema, sendo que os problemas de partida escolhidos foram com o desencadeamento do tipo fonte. Esse fato precisa ser estudado para outros tipos de problemas, que não sejam os problemas de partilha.

Os trabalhos de Costa (2010) e Silva (2011) diferenciam-se a medida que o primeiro deles objetivou verificar o sucesso da conversão em função da conservação ou não de cada um dos critérios de congruência, enquanto que o segundo buscou verificar a mobilização de determinados registros (inclusive algébrico) dada a variação da conservação dos critérios de congruência.

A presente investigação insere-se nesse contexto como sendo uma aplicação dos resultados das pesquisas acadêmicas, em especial as de Costa (2010) e Silva (2011), abarcados pela teoria dos Registros de Representação Semiótica, tendo em vista estreitar a distância entre universidade e escola básica.

Dessa forma, utilizamos diversos pressupostos obtidos por esses autores para complementar a análise que realizamos nos problemas de primeiro grau de um material apostilado utilizado por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em um colégio da rede particular da cidade de Sorocaba. Vale ressaltar que tal material é também utilizado em diversas outras escolas espalhadas pelo Brasil. Nossa análise buscou inferir, *a priori*, quais os caminhos que alunos podem seguir e quais dificuldades podem encontrar, tendo em vista a conservação dos critérios de congruência, de modo que isso permite elaborar estratégias melhores para minimizar as dificuldades.

Assim sendo, nosso relato de pesquisa inicia-se com essa introdução, na qual discorreremos sobre a problemática que motivou nosso trabalho, sobre alguns trabalhos do tipo estado da arte que mapearam a utilização da teoria dos Registros de Representação Semiótica nos trabalhos acadêmicos brasileiros nas últimas décadas, sobre a utilização do livro didático e materiais apostilados. É na introdução que apresentamos, ainda, nossos objetivos de pesquisa e as questões que nortearam esta investigação, bem como apresentamos alguns trabalhos relacionados ao nosso tema de pesquisa, caracterizando a revisão bibliográfica.

No capítulo I, intitulado Referencial Teórico, discorremos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica apresentando suas principais ideias, tais como a necessidade da mobilização de ao menos dois registros de representação, as transformações de registros do tipo tratamento e conversão, o fenômeno da congruência e da não congruência semântica entre duas representações, bem como a importância dessa pesquisa para o trabalho que tencionamos desenvolver.

No capítulo II, cujo título é Referencial Metodológico, apresentamos o nosso tipo de pesquisa que é bibliográfico e documental, fundamentados no trabalho de Gil (2008b). Além disso, apresentamos o material que analisamos nesse trabalho, enfatizando o pressuposto pedagógico relacionado ao ensino de Matemática considerado pelo material, bem como sua organização e os elementos que determinaram a escolha dos problemas que foram analisados.

No capítulo III o título escolhido foi “Análise dos Problemas” justamente por sua característica central que é apresentar a análise da conservação dos critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69), além de possíveis caminhos que os alunos podem escolher para encontrar uma equação que seja referencialmente equivalente ao enunciado. Nesse capítulo procuramos responder cada uma das três questões de investigação que elencamos apresentando as considerações necessárias para tanto. Nas discussões também nos preocupamos em tecer uma discussão sucinta, mas necessária, sobre a importância do uso dessa teoria cognitiva para a prática cotidiana do professor, sobretudo no que se refere à escolha análise de problemas.

Em “Considerações Finais” retomamos o problema que motivou nossa pesquisa, os objetivos e as questões de investigação. Com base nos elementos apresentados no texto resumimos os principais resultados encontrados, bem como discorremos sobre o impacto desse trabalho e da teoria dos Registros de Representação Semiótica na formação inicial do autor, enquanto licenciando em Matemática. Por fim, apresentamos as referências bibliográficas consultadas ao longo do percurso e que deram suporte a essa investigação.

CAPÍTULO I

Referencial Teórico

Nesse capítulo discorreremos sobre os principais pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, sua importância para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como sua relação com nosso objetivo de pesquisa.

1.1. Registros de Representação Semiótica

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, criada e difundida por Raymond Duval, considera não ser possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação, haja vista que ela vem sendo considerada central nas variadas reflexões relacionadas ao conhecimento desde Descartes e Kant (DUVAL, 2003, 2009). Dessa forma, Duval coloca a noção de representação no centro de sua teoria.

No que diz respeito aos modos de produção, esta noção achou-se introduzida em três retomadas distintas. Primeiramente como representação mental, com estudos de Jean Piaget sobre a representação do mundo da criança. Tais representações são internas e conscientes.

A segunda vez aparece como representação interna ou computacional, que são representações também internas, como o próprio nome sugere, porém não conscientes. Nessa perspectiva o sujeito faz tratamentos automáticos e quase instantâneos sem pensar em cada passo na realização de uma tarefa. Um bom exemplo é a pronúncia de uma palavra, onde o sujeito não identifica cada letra antes de pronunciá-la.

A representação semiótica aparece em um terceiro momento em trabalhos acadêmicos que envolvem aquisição do conhecimento matemático, bem como os problemas relativos à sua aprendizagem. De acordo com os estudos de Duval (2009, p.32) as representações semióticas se destacam das anteriores, já que sua especificidade “consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a

linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações 'equivalentes' em um outro sistema semiótico”.

No contexto geral da semiótica, o signo é relacionado a um objeto concreto, como o desenho de uma cadeira para representar o objeto que utilizamos para sentar, porém na especificidade da Matemática o símbolo (signo) representa um objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). De fato, o objeto matemático não é perceptível, ou seja, é abstrato; assim, seu acesso se dá via representações semióticas.

A Matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas, de modo que Duval (2003, 2009) utiliza o termo “registros” de representação para designar diferentes tipos de representação semiótica como a linguagem natural, figuras geométricas, sistemas de escrita, gráficos cartesianos, entre outros.

Devido a essa multiplicidade de registros de representação em Matemática, o autor enfatiza a necessidade de não confundir o objeto matemático com sua representação colocando à baila a questão da dualidade entre o objeto e sua representação e isso fica evidente quando este expõe: “não se pode ter compreensão em Matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p.14). Isso se justifica no fato de que diferentes representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Assim, o autor destaca que “toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 2009, p.91).

Para exemplificar esta ideia podemos considerar um problema de primeiro grau, no qual ele pode ser representado por meio da língua natural (que é mais frequente), pode ser representado por meio de diagramas ou linguagem algébrica. Então, o objeto matemático não é uma representação em especial, mas sim o conjunto de todas as suas representações.

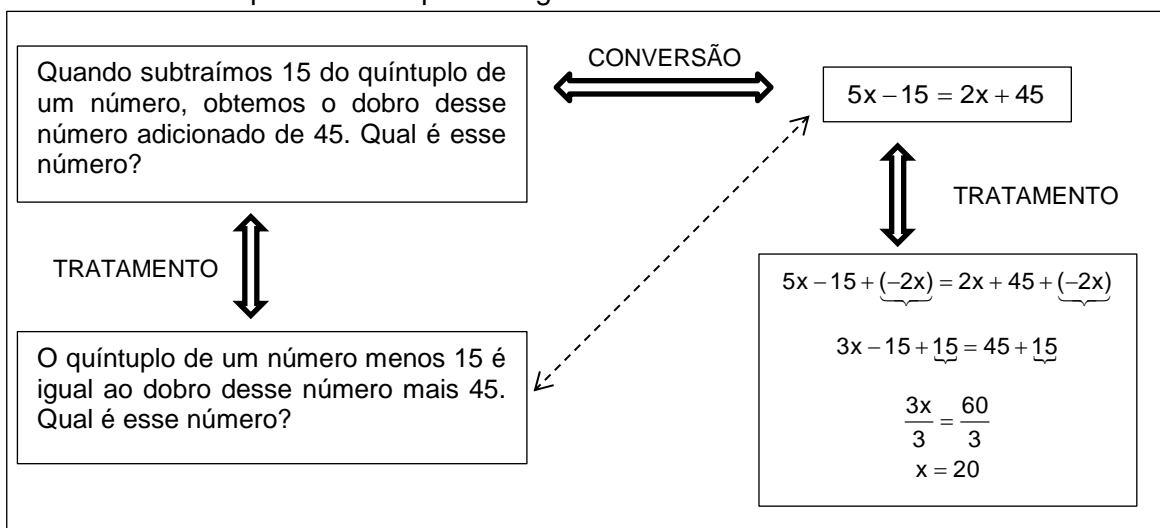
Duval (2009, p.90) afirma que “para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las”. Portanto, no processo de aquisição do conhecimento matemático

deve se levar em conta os diversos registros de representação semiótica, assim como as transformações específicas que estes permitem.

Segundo a teoria tais transformações são corriqueiramente reduzidas a um traço comum, não fazendo distinção entre as atividades de tratamento e conversão. Desse modo, o autor destaca a importância dessas duas transformações de registros de representação, enfatizando a necessidade de distingui-las claramente.

O tratamento é uma transformação de representação dentro de um mesmo registro. A resolução de uma equação do 1º grau em sua representação algébrica serve de exemplo para este tipo de transformação. Já a conversão é uma transformação de representação que consiste em mudar o registro, conservando o mesmo objeto denotado. Por exemplo, dado um problema de primeiro grau em língua natural podemos convertê-lo para uma equação que seja referencialmente equivalente a ele e vice-versa. A Figura 1 abaixo ilustra a diferença entre estes dois tipos de transformações.

Figura 1: Ilustração das transformações de registros do tipo tratamento e do tipo conversão em um problema de primeiro grau.



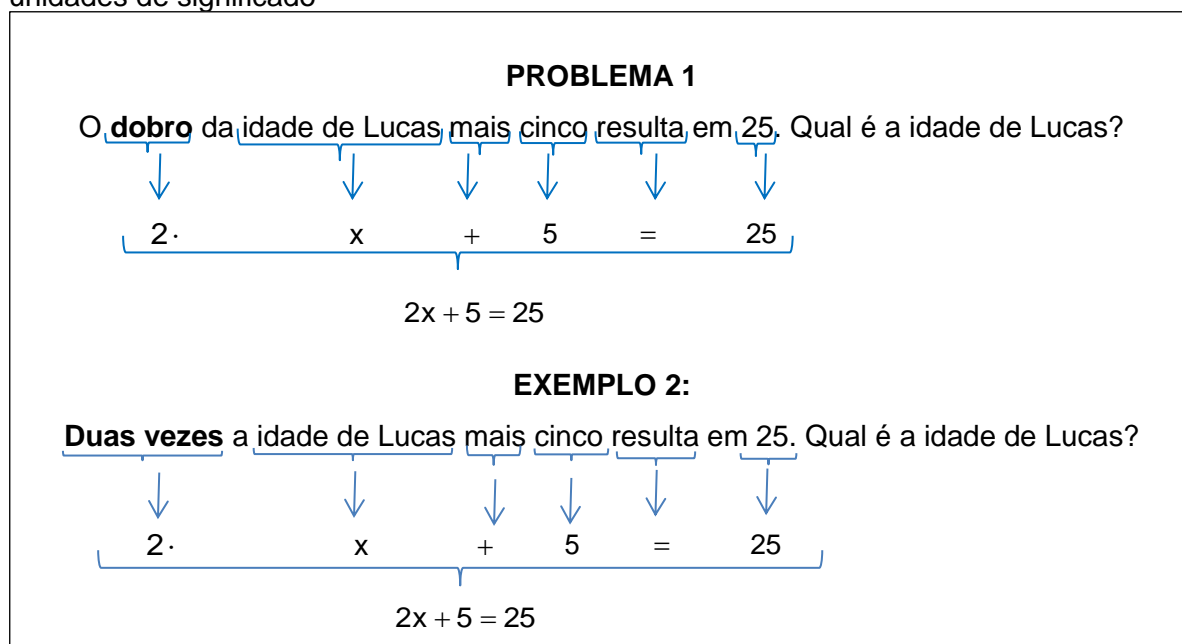
Os registros de representação possuem conteúdos distintos que são estabelecidos pelo sistema semiótico que é produzido. Para Duval (2003, 2009) não basta que o sujeito conheça o conteúdo de um registro, ou mesmo de vários isoladamente, mas sim que transite entre as mais diversas representações que possui o objeto matemático em questão. Portanto, a conversão de registro assume papel importantíssimo. O autor destaca que:

“É preciso que um sujeito seja capaz de atingir o estado da coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra”. (DUVAL, 2009, p.82)

O custo cognitivo deste trânsito depende em muito do que o autor chama de congruência semântica. Sendo que, a esse respeito, destacamos que uma conversão será semanticamente congruente quando a representação final transparecer na representação de partida, o que torna uma atividade relativamente trivial. Enquanto que uma conversão semanticamente não congruente será aquela em que a representação final não transparece na representação de partida. De acordo com tal teoria, que o custo cognitivo, quando a conversão é congruente, é menor do que quando a conversão é não-congruente.

Duval (2009, p. 68-69) elenca três critérios para determinar a congruência semântica envolvida em uma transformação do tipo conversão: (A) a possibilidade de uma correspondência “semântica” dos elementos significantes; (B) a univocidade “semântica” terminal; (C) ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações. Para ilustrar melhor cada um desses critérios que foram amplamente utilizados nesse trabalho, consideremos os exemplos apresentados na FIGURA 2 a seguir.

Figura 2: Exemplos relativos à conservação (ou não) da correspondência semântica das unidades de significado



No exemplo 1 apresentado podemos verificar que a palavra “dobro” no registro em língua natural (partida) possui apenas um signo, enquanto que na representação algébrica (chegada) encontramos o número “2” e a operação de “multiplicação” em correspondência a palavra “dobro”, isto é, dois signos são considerados. Assim, de acordo com a essa teoria, nesse exemplo não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado (critério A).

Já no exemplo 2 anterior, podemos observar que o mesmo problema, com uma pequena alteração (tratamento) na escrita permite verificar a correspondência semântica das unidades de significado. Observe que agora a expressão “duas vezes” que possui dois signos está em correspondência com “2.” que também possui dois signos considerados.

Esses dois exemplos apresentados na Figura 2 nos permite também iniciar a análise do critério C, referente à conservação da ordem das unidades de significado. Em ambos os exemplos verificamos que a ordem das unidades significantes nas duas representações, tanto em língua natural quanto na representação algébrica é mesma. Para confrontar com essa ideia, considere a Figura 3 abaixo.

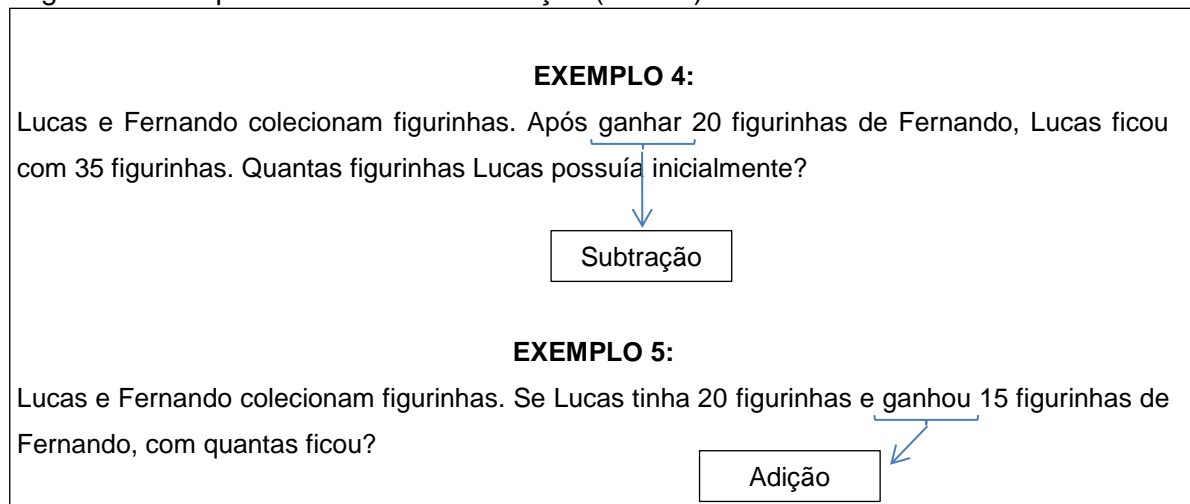
Figura 3: Exemplo relativos à não conservação da ordem das unidades de significado

EXEMPLO 3
<p>Se <u>adicionarmos</u> um número ao <u>dobro</u> da <u>idade de Lucas</u>, <u>obteremos</u> <u>25</u>. Qual é a idade Lucas sabendo que o número adicionado foi o <u>cinco</u>?</p>

Nesse terceiro exemplo verificamos que as unidades de significado destacadas não estão na mesma ordem que as unidades de significado consideradas na representação algébrica por meio da equação $2x + 5 = 25$. Segundo Duval (2009, p.69), “esse critério é, sobretudo, importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais”. Ocorre que muitos alunos parecem acreditar que para fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico é suficiente fazer a tradução das palavras presentes no enunciado na mesma ordem em que elas aparecem. Nesse exemplo, os alunos podem incorrer no erro de equacionar o problema com $2x = 25 + 5$, cujas unidades de significado estão na mesma ordem que o enunciado. Mas para a Matemática, o que importa é a equivalência referencial.

A Figura 4 a seguir contém dois exemplos que permitem ilustrarmos a conservação, ou não, da univocidade semântica terminal.

Figura 4: Exemplos relativos à conservação (ou não) da univocidade semântica terminal



No quarto exemplo apresentado temos uma situação em que não há conservação da univocidade semântica terminal, uma vez que o verbo “ganhar” apresenta sentido contrário ao que aparecerá na expressão característica. A palavra “ganhar” está muito associada à operação de adição, mas nessa situação ela justifica a operação de subtração a ser realizada. Já no quinto exemplo a palavra “ganhou” está de fato adicionada à operação de adição. Embora esses dois últimos exemplos não caracterizem problemas de primeiro grau, consideramos bastante claros para ilustrar tal critério. Porém, a título de situarmos esse critério nos problemas de primeiro grau, transcrevemos dois problemas elaborados no trabalho de Costa (2010, p. 38).

(PROBLEMA 1) Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

(PROBLEMA 3) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

No problema 1 transcrito acima verificamos um exemplo em que há conservação da univocidade semântica terminal, enquanto que no problema 3 não

se verifica tal conservação (COSTA, 2010). Vale considerar que que Costa (2010) considerou problemas com a estrutura multiplicativa conservada.

Moretti (2002, p.344) ao abordar sobre a teoria de Duval relativa às noções de registros de representação semiótica e de congruência semântica coloca a questão: “para um determinado conceito em Matemática, existe uma boa representação que leve de forma suficiente à sua compreensão?” Segundo Moretti (2002) a resposta é não. Ele discute esse “não” com base na teoria de Duval. Mais precisamente, esta questão poderia ser respondida em termos das respostas elencadas por Duval (1993, p.49) *apud* Moretti (2002, p.346) para sua própria indagação: “a que corresponde a existência de vários registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano?”.

Foram três as respostas apresentadas e discutidas por Moretti (2002). Primeiro a economia de tratamento, pois há possibilidade de mudança entre os registros de representação, mudanças tais que poderão ser econômicas e potencializadas; a segunda está ligada à complementaridade dos registros, pois do ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que se representa, ou seja, os registros se completam conforme destacamos anteriormente; por fim, a conceitualização implica em uma coordenação de diferentes registros de representação.

Portanto, a teoria dos Registros de Representação Semiótica nos permite compreender como se dá o processo de aprendizagem em Matemática do ponto de vista cognitivo do aluno, de modo que no processo de planejamento do ensino dos conteúdos a serem ensinados em matemática, em especial nesse caso os problemas de primeiro grau, é necessário lavá-la em consideração.

Ainda, tal teoria contribuiu para ampliarmos nosso entendimento sobre os processos de aprendizagem, sendo que, nesse trabalho analisaremos problemas de primeiro grau utilizando os pressupostos dessa teoria, tendo em vista conhecer, *a priori*, as barreiras que os alunos podem enfrentar podendo, então, apresentar caminhos alternativos para transpor as dificuldades.

CAPÍTULO II

Referencial Metodológico

A presente pesquisa é de cunho bibliográfico e documental. Segundo Gil (2008b, p.50) “a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. Assim, como nosso interesse foi relacionar o fenômeno da não congruência semântica com as dificuldades encontradas pelos alunos em fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico em problemas do primeiro grau, recorreremos a resultados de pesquisas já elaboradas sobre o tema, a fim de podermos compreender melhor tal relação. Nossas categorias de análise estão pautadas na própria teoria de Duval (2003, 2009, 2012a, 2012b). Além disso, outros trabalhos como os de Costa (2010) e Silva (2011) contribuíram para nossas análises.

Gil (2008b, p.50) ainda destaca que “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”. Então, realizamos a leitura analítica² do referencial teórico tendo como foco estabelecer relações entre as informações obtidas e o problema de pesquisa proposto (GIL, 2008b, p.74).

Além disso, como supracitado, essa pesquisa é documental. Gil (2008b, p.51) destaca que embora haja semelhança entre as pesquisas de cunho bibliográfico e as documentais, elas se diferenciam principalmente pelo tipo de material analisado. “A pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa” (GIL, 2008b, p.51).

Assim, nessa pesquisa analisamos problemas de primeiro grau apresentados no material didático apostilado utilizado em um colégio da rede particular de ensino da cidade de Sorocaba, referente ao 7º ano do Ensino Fundamental. A análise dos problemas foi direcionada pelas três questões de investigação desse trabalho, de

² A finalidade da leitura analítica é a de ordenar e resumir as informações contidas nas fontes, de forma que estas possibilitem a obtenção de respostas ao problema de pesquisa. (GIL, 2008b, p. 75)

modo que a referida teoria de Duval (2009) e as pesquisas nos deram aporte teórico para as análises feitas.

Dessa forma, passamos a apresentação do material teórico que analisamos nesse trabalho, enfatizando o pressuposto pedagógico relacionado ao ensino de Matemática considerado pelo material, bem como sua organização e os elementos que determinaram a escolha dos problemas que foram analisados.

2.1. Proposta pedagógica para o ensino de Matemática

Ao analisarmos os documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), verificamos que há grande ênfase no fato de que estudar Matemática está intimamente relacionado a necessidade de resolução de problemas. No que tange ao ensino da Álgebra especificamente, destacamos que, segundo Brasil (1998, p.84) tal ensino “precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas”. Assim, é importante destacar que tal documento caracteriza uma situação-problema como sendo

“uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe”. (BRASIL, 1998, p.41)

Munido dessas considerações, a estrutura do material como um todo, busca inserir a resolução problemas como central no trabalho pedagógico. De modo que tal apostila guarda traços da metodologia de resolução de problemas guiadas pelo trabalho de George Polya (1975)³, de modo que inclusive esse autor figura nas referências bibliográficas das considerações feitas na seção de orientações pedagógicas ao professor. Além disso, destacamos o trabalho de Chevallard (2001)⁴ que também fora utilizado como referencial teórico dos autores.

³ POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência Ltda., 1975.

⁴ CHEVALLARD, Yves. **Estudar matemáticas**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Deste modo, na seção seguinte apresentamos o material que foi utilizado como fonte dos problemas analisados, de forma que discorreremos em linhas gerais sua organização, bem como apresentamos as situações didáticas que foram propostas antes da sugestão dos problemas.

2.2. Organização da apostila selecionada

A fonte dos problemas que analisamos nesse trabalho foi a apostila de Matemática (versão do professor) do 7º ano do Ensino Fundamental da editora Saraiva. Trata-se da coleção “Fundamento” do sistema de ensino Ético. Os autores do material de Matemática são Alberto Rodrigues Paiva, Daliela Netto Scatolin Costa e Fernando Trotta.

O material anual é organizado em quatro unidades, sendo duas direcionadas ao primeiro semestre letivo e duas ao segundo. Cada uma das unidades é dividida em quatro capítulos, de forma que ao todo a apostila apresenta 16 capítulos anuais.

Na primeira unidade os objetos de estudo são os números inteiros, abarcando tanto os conceitos quanto as operações em tal conjunto (capítulos 1,2 e 3), além de um estudo sobre ângulos (capítulo 4), no qual o foco se dá nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, considerando os múltiplos e submúltiplos do grau. Já na segunda unidade há dois grandes grupos a serem estudados: o conjunto dos números racionais e suas operações (capítulos 1 e 2) e a introdução à Álgebra que é feita por meio do estudo de equações de primeiro grau, problemas de primeiro grau e inequações (capítulos 3 e 4).

Na terceira unidade do material o foco se volta para a Geometria, abordando ângulos entre retas no plano. Ainda nessa unidade, também são reservados dois capítulos (3 e 4) para o estudo de sistemas e problemas do 1º grau com duas incógnitas. Por fim, na quarta unidade, três capítulos são destinados ao estudo de razão, escala, proporção, regra de três e porcentagem, sendo que o capítulo 4 é destinado ao estudo dos triângulos e quadriláteros.

Os dois parágrafos anteriores apresentam uma visão geral de como estão distribuídos os conteúdos ao longo do material, ficando evidente a perspectiva espiralada para o desenvolvimento do conteúdo apresentado no material. Porém,

para nossa pesquisa nos interessa a segunda unidade desse material, por conter os problemas de primeiro grau apresentados para os alunos que estão em uma perspectiva de introdução à linguagem algébrica, mais especificamente o capítulo 4.

Embora o capítulo 3 trate de igualdade e equações, não apresentaremos detalhes sobre ele uma vez que o nosso interesse se concentrou nos problemas de grau. Mas, em linhas gerais, o capítulo 3 introduz a questão algébrica definindo o que são expressões e sentenças, discutindo sobre os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade até conceituar equação e, em especial, as equações do 1º grau com uma incógnita. Embora sabemos que é de fundamental importância analisar como se pressupõe a introdução à Álgebra nos materiais a serem utilizados para o ensino de Matemática, nosso foco se limitou ao problemas com equações de 1º grau.

De modo geral, a apostila como um todo apresenta diversos ícones e seções específicas ao longo do texto, de modo que a Figura 5 a seguir apresenta as que são de interesse da disciplina de Matemática.

Figura 5: Ícones e seções constantes na apostila de matemática do material selecionado

Ação 	Divirta-se! 
E você, o que acha? 	Mais! 
Quebra-cabeça 	Importante 
Quer saber mais? 	Sessão extra 

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor

O ícone “Ação” apresenta atividades que sistematizam o conteúdo, devendo ser desenvolvidas preferencialmente em sala de aula e podem incluir pesquisas e trabalhos em equipe. O ícone “E você, o que acha?” apresenta atividades escritas ou orais de caráter operacional ou argumentativo, podendo também resgatar saberes prévios dos alunos. O ícone “Quebra-cabeça” apresenta atividades mais complexas, com caráter desafiador. O ícone “Quer saber mais?” geralmente apresenta textos

ou outros instrumentos que aprofundam o assunto, podendo não estar associados a uma atividade. Geralmente é nesse ícone que aparecem os textos relacionados à história da Matemática. O ícone “Divirta-se” apresenta atividades lúdicas, conforme o nome sugere. O ícone “Mais!” apresenta um conjunto de atividades para consolidação e sistematização do aprendizado que fecham o capítulo. O ícone “Importante” apresenta alguns destaques para aspectos relevantes do conteúdo, que geralmente são fundamentais para a compreensão do aluno. Já o ícone “Sessão extra” apresenta um conjunto de tarefas para resolução em casa.

É importante destacar que há ainda outros ícones tais como “Exercício resolvido”, “Quanto é”, “Calculadora” que constam no material. Inclusive analisaremos dois problemas apresentados pelo material com a marcação “Exercício resolvido”.

Os problemas que analisaremos estão assinalados com o ícone “Ação”, de modo que são problemas propostos para resolução em sala de aula. Analisamos nessa pesquisa os quinze primeiros problemas propostos no capítulo em questão. Nos limitamos a esses problemas devido ao fato que os problemas seguintes tratavam nas inequações e resolução de problemas envolvendo tal tópico, bem como uma sugestão de resolução de problemas utilizando diagramas. Consideramos que os quinze problemas selecionados, foram suficientes para que pudéssemos discorrer sobre o fenômeno da não congruência e a equivalência referencial em matemática.

Dessa forma, a seguir apresentamos sucintamente o caminho que o material percorre antes de propor os problemas para que os alunos apliquem o que foi estudado. Isso se faz importante para que seja possível conhecer como se deu a apresentação e discussão de problemas de primeiro grau que levaram à sugestão dos quinze problemas propostos.

Uma discussão inicial acerca de situações-problema que podem ser resolvidas é motivada a partir da situação presente na Figura 6, a seguir.

Figura 6: Situação-problema proposta na apresentação do quarto capítulo



Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

De acordo com o que os autores do material apresentaram nas orientações pedagógicas destinadas ao professor, acerca das dificuldades apresentadas pelos alunos ao traduzirem a linguagem natural para a linguagem algébrica, “o trabalho com expressões algébricas e equações contextualizadas pode ajudar nessa questão e levar os alunos a compreender os procedimentos envolvidos, atribuindo significado às variáveis e às incógnitas” (ÉTICO, 2015).

Assim, a proposta é que seja feita uma leitura e discussão conjunta dessa situação em sala de aula, tendo em vista verificar como os alunos encaram essa situação. Logo em seguida os autores apresentaram um ícone “E você, o que acha?” conforme Figura 7.

Figura 7: Questionamentos feitos aos alunos sobre a situação proposta

? E você, o que acha?

Complete as expressões a seguir, com os sinais de < ou >.

a) Os três amigos puderam usar a canoa, separadamente, porque:

$$100 < 140; 60 < 140; 75 < 140$$

b) Carlos e João não puderam atravessar juntos, porque:

$$100 + 60 > 140 \Rightarrow 160 > 140$$

c) A canoa era capaz de suportar ao mesmo tempo João e André, porque:


$$140 > 60 + 75 \Rightarrow 140 > 135$$

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor

É conveniente observar que essa introdução, bem como os questionamentos feitos, permite verificar quais estratégias e argumentos os alunos utilizam para resolver e explicar a solução dessa situação, por escrito ou oralmente. Então, após

tal introdução os autores esclarecem que situações-problemas como essas podem ser resolvidas substituindo o valor desconhecido por uma incógnita e desenvolver a equação encontrada. De forma que apresenta a situação da Figura 8.

Figura 8: Situação-problema apresentada para exemplificar a utilização de equações do primeiro grau com uma incógnita na resolução de problemas



Lê pensou em um número que Carol desconhecia. Por isso, Carol "representou" esse número por uma letra, por exemplo, x .

Carol foi seguindo todas as operações indicadas: multiplicou o número por 2 e obteve $2x$; adicionou 5 a esse número e obteve $2x + 5$; por fim, dividiu-o por 3 e encontrou a expressão $\frac{2x + 5}{3}$.

Como a amiga disse que o resultado era 7, para encontrar o número pensado, Carol precisou resolver a seguinte equação: $\frac{2x + 5}{3} = 7$

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

Nessa situação, o problema apresentado conserva a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a ordem das unidades de significado. Portanto, considerando a representação algébrica como registro de chegada, trata-se de um problema congruente. Porém, acreditamos que caso os alunos não se atentem ao que foi exposto na resolução, podem apresentar a equação $2x + 5 \div 3 = 7$ ao invés de $(2x + 5) \div 3 = 7$. Embora o problema seja congruente, isso pode ser um obstáculo para muitos. Destacamos ainda que os autores apresentaram a resolução de tal equação fazendo os tratamentos necessários obtendo o número 8 como resposta, porém não apresentaremos aqui.

Após tal situação-problema, dois exemplos resolvidos são apresentados. Considere a Figura 9 a seguir.

Figura 9: Exemplos resolvidos apresentados assinalados com ícone "Exercícios resolvidos"

<p>1 A soma de um número inteiro com a sua metade é 9. Que número é esse?</p> <p><i>Resolução</i></p> <p>Vamos representar o número procurado por x. Então, a sua metade será $\frac{x}{2}$ e a soma dos números será 9, isto é:</p> $x + \frac{x}{2} = 9$ <p>Reduzindo ao mesmo denominador, vem:</p> $\frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{18}{2}$ <p>Multiplicando ambos os membros por 2, temos:</p> $\frac{3x}{2} \cdot 2 = \frac{18}{2} \cdot 2 \Rightarrow 3x = 18$ <p>Dividindo ambos os membros por 3, vem:</p> $\frac{3x}{3} = \frac{18}{3} \Rightarrow x = 6$ <p>Logo, o número procurado é 6.</p>	<p>2 Hoje meu irmão mais velho tem 19 anos e minha mãe tem 40 anos. Há quantos anos a soma das idades dos dois era 49 anos?</p> <p><i>Resolução</i></p> <p>Há x anos, as idades eram $19 - x$ e $40 - x$. Se a soma das idades era 49 anos, temos:</p> $19 - x + 40 - x = 49 \Rightarrow$ $\Rightarrow -x - x + 19 + 40 = 49$ $-2x + 59 = 49 \Rightarrow -2x = 49 - 59 \Rightarrow$ $\Rightarrow -2x = -10$ <p>Atenção! Podemos tornar positivo o primeiro membro da equação aplicando as regras de sinais da multiplicação. Sabemos que $-2 \cdot (-1) = 2$; assim, vamos multiplicar os dois membros da equação por (-1):</p> $-2x \cdot (-1) = -10 \cdot (-1) \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2}$ $x = 5$ <p>Há cinco anos a soma das idades era 49 anos.</p>
--	--

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor

Analisando o primeiro problema podemos verificar que este não conserva a correspondência semântica das unidades de significado ao passo que a palavra “metade” possui apenas um signo e está associada a dividir por dois ($\div 2$) que possui dois signos. A univocidade semântica terminal é conservada nesse problema e a ordem das unidades de significado não é conservada, ao passo que a palavra “soma” apareceu primeiro na língua natural e na representação algébrica é a segunda unidade de significante presente.

Já o segundo problema apresentado não conserva a ordem das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e nem a correspondência semântica entre as unidades de significado, de modo que ele é não congruente a representação algébrica. Esse tipo de problema é bastante comum aparecer e os alunos costumam apresentar grandes dificuldades em equacionar corretamente tal situação, porém muitos conseguem resolvê-lo utilizando outras estratégias.

Assim, é diante de tais situações apresentadas anteriormente que são propostos na seção “Ação” os quinze problemas que analisaremos nesse trabalho.

Portanto, no capítulo seguinte apresentamos cada um dos problemas bem como as análises que conduziram às respostas das questões de investigação desse trabalho.

CAPÍTULO III

Análise dos Problemas

Nesse capítulo apresentamos as análises feitas sobre os problemas selecionados, de modo que tanto procuramos caminhos que os alunos podem seguir, como analisamos a conservação dos critérios elencados no capítulo sobre o referencial teórico.

Para os problemas com baixo índice de congruência, isto é, problemas cujos enunciados não são congruentes às representações algébricas apresentadas, discutimos de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica a influência desse fenômeno nas possíveis dificuldades dos alunos.

Nesse sentido, acreditamos que a compreensão do fenômeno da não-congruência semântica existente em alguns dos problemas selecionados em relação à equação que é referencialmente equivalente ao enunciado descrito em língua natural, possibilita a tomada de decisões pedagógicas adequadas para amenizar as dificuldades dos alunos, conforme destacamos anteriormente.

Portanto, dividimos esse capítulo em duas partes sendo que a primeira delas consiste na análise individual de cada um dos problemas, caracterizando-se como a produção de informações, enquanto que na segunda parte nos concentramos na análise conjunta das informações levantadas considerando os pressupostos teóricos que embasam esta pesquisa, buscando responder às questões de investigação.

3.1. Análise dos problemas selecionados

Na análise dos problemas selecionados, primeiramente, centramos nossos esforços na identificação de um ou mais caminhos que inicialmente os alunos podem seguir para realizar a conversão de registros, tendo como ponto de chegada a representação algébrica, de modo que a equação obtida seja referencialmente equivalente ao enunciado. Após a identificação desses possíveis caminhos, tecemos uma análise do fenômeno de congruência e da não-congruência, no que tange às

representações em língua natural e em linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau com uma incógnita.

Vale lembrar que, conforme destacado no capítulo II, no qual discorreremos sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica, Duval (2009, p.68-69) apresenta três critérios para que duas representações, em sistemas semióticos distintos, sejam congruentes. Segundo o autor (DUVAL, 2009), se ao menos um desses critérios não for conservado, haverá o fenômeno da não-congruência e o custo cognitivo da conversão de uma representação para a outra será maior. Os três critérios são:

- **A:** Conservação da correspondência semântica das unidades de significado;
- **B:** Conservação da univocidade semântica terminal;
- **C:** Conservação da ordem das unidades de significado.

Assim, tendo em vista facilitar a apreciação do leitor, destacamos cada um dos problemas em quadros, identificando seu número (P1, P2, etc.), bem como se ele conserva ou não o critério de congruência considerado (A, B ou C), de modo que quando o critério é conservado utilizamos o símbolo ✓, enquanto que quando não há conservação do critério usamos o símbolo ✗.

Feitas tais considerações, passamos a supracitada análise dos problemas selecionados.

Quadro 1: Problema número 1 com análise da conservação dos critérios de congruência

P1	<p>1 A soma de dois números inteiros e consecutivos é 131. Determine esses dois números.</p> <p>Sendo x e $x + 1$ os números procurados, temos:</p> <hr/> $x + x + 1 = 131 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = 65$ <hr/> <p>Os números são 65 e 66.</p>	Critério	
		A	✗
		B	✓
		C	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

O primeiro problema apresentado na seção “Ação” do material que ora analisamos, trata de um velho conhecido dos alunos, uma vez que ele rotineiramente é apresentado em situações que antecedem à introdução dos problemas de 1º grau. Dessa forma, inicialmente, é comum que eles o resolvam utilizando estimativas, cálculos mentais, operações elementares, dentre outros

possíveis caminhos. Conseqüentemente a essa postura, ao propor tal problema, é desejável que o professor esclareça aos alunos que o trabalho com equações não invalida a forma de pensar que eles já construíram em sua trajetória escolar para muitos problemas, mas complementa e organiza algebricamente o raciocínio realizado, e mais ainda, tal ferramenta quando bem compreendida possibilitará resolver problemas que aparentemente são trabalhosos.

Nesse problema, a palavra “soma” sinaliza a operação de adição a ser realizada, sendo que as parcelas são caracterizadas pela frase “dois números inteiros e consecutivos”. Aqui, é necessário que o aluno tenha bem construído o conceito de números inteiros e números consecutivos. Se o conceito estiver bem claro, o aluno conseguirá observar que um deles será o maior e o outro menor (com diferença de exatamente 1 unidade). Nesse momento, os autores do material sugerem que o professor lembre o conceito de antecessor, sucessor e consecutivo. Dando continuidade à análise, atribuindo a incógnita x ao menor dos números, o outro será representado por $(x+1)$. O termo “é”, apresentado no enunciado, indica a relação de igualdade, sendo que por meio dele se determina a separação entre os membros da equação. O número 131 é imediatamente considerado na representação algébrica, com mesmo formato, a fim de que a equação característica desse raciocínio seja obtida: $x + (x + 1) = 131$.

Outra equação, também referencialmente equivalente ao problema, poderá ser obtida se atribuirmos a incógnita x ao maior dos números e tecermos raciocínio análogo. Essas duas possibilidades iniciais são sintetizadas na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Equações obtidas nas análises para o problema P1

SUJEITOS	Menor número	Maior número	EQUAÇÃO (fato comum: a soma dos números é 131)
FATOS	“é número inteiro”	“é número inteiro”	
REPRESENTAÇÕES	x	$(x+1)$	$x + (x+1) = 131$
	$(x-1)$	x	$(x-1) + x = 131$

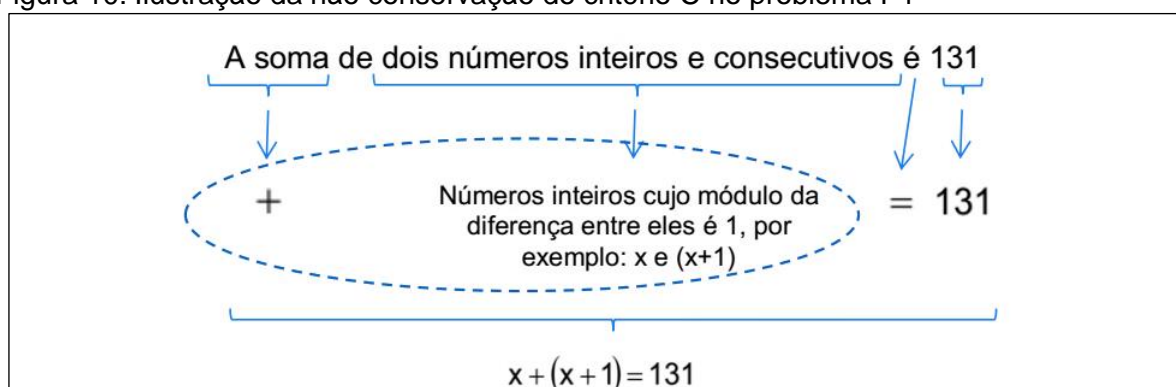
Fonte: Elaborado pelo autor

Em se tratando da análise da congruência, podemos observar que a correspondência semântica entre as unidades de significado (critério A) não é conservada, uma vez que a palavra “consecutivos” possui apenas um signo, enquanto que sua interpretação, nesse caso, está associada a dois signos: +1 (o mesmo ocorre quando considerada a possibilidade do -1).

A univocidade semântica terminal (critério B) é conservada, já que a palavra “soma” está associada à operação de adição, tanto no enunciado em língua natural quanto na equação que é referencialmente equivalente ao problema.

A ordem das unidades de significado (critério C) não é conservada nesse problema, posto que a palavra “soma” aparece primeiro na descrição em língua natural do problema, enquanto que em sua representação algébrica o símbolo de adição (+), relacionado a essa unidade de significado, é o segundo a aparecer. Esse fato é melhor destacado na Figura 10 a seguir.

Figura 10: Ilustração da não conservação do critério C no problema P1



Fonte: Elaborado pelo autor

Para confrontar com a análise feita sobre o critério C e esclarecer o leitor sobre o que fora dito, consideremos o mesmo problema descrito da seguinte maneira: “Um número inteiro adicionado ao seu consecutivo é 131. Quais são esses números envolvidos?”. Observamos que, após esse tratamento realizado, o enunciado passa a conservar a ordem das unidades de significado, ou seja, cada unidade significativa que figura no enunciado em língua natural aparece na mesma ordem na equação referencialmente equivalente considerada.

Assim sendo, por não conservar a correspondência semântica e nem a ordem entre as unidades de significado, esse primeiro problema apresentado é não

congruente ao enunciado descrito em língua natural. É possível observar, ainda, que quando consideramos qualquer uma das duas possibilidades apresentadas na Tabela 1, o fenômeno da não-congruência fica caracterizado, podendo haver uma dificuldade maior ou menor, dependendo do grau de compreensão que o aluno possuir do conceito de consecutivo.

Quadro 2: Problema número 2 com análise da conservação dos critérios de congruência

P2	2 Quantas figurinhas possui se $\frac{21}{100}$ dessa quantidade equivalem a 63?	Critério	
	Seja x o número de figurinhas. $\frac{21}{100} \cdot x = 63 \Rightarrow 21x = 6.300 \Rightarrow x = 300$ Possui 300 figurinhas.	A	✓
		B	✓
		C	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

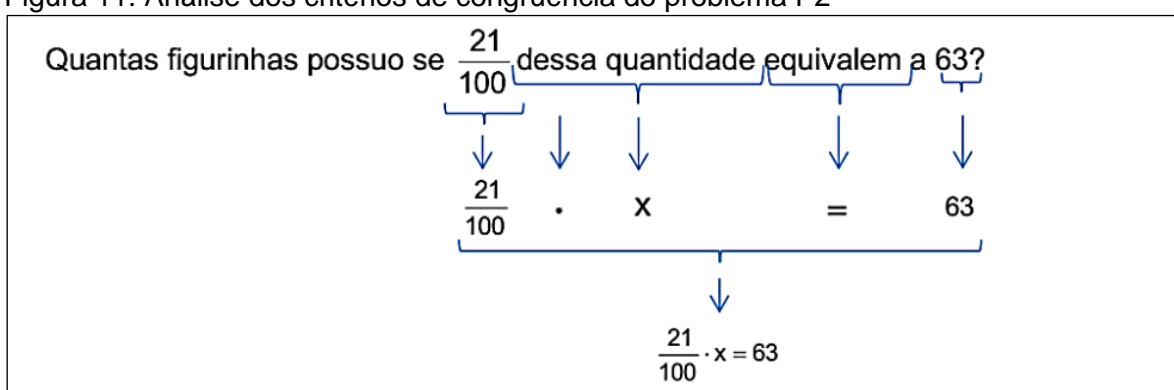
O segundo problema também pode ser resolvido por meio de conhecimento já adquiridos em etapas anteriores da escolarização dos alunos, sendo comum eles utilizarem o conceito de fração para resolver tal problema, realizando algumas operações como, por exemplo, $63 \div 21 = 3$ seguida de $3 \cdot 100 = 300$, obtendo a resposta do problema.

Novamente, como nosso foco é a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, estruturaremos um raciocínio para realizar tal transformação.

Assim, designando por x a quantidade de figurinhas em questão, a conversão do registro discursivo para o algébrico pode ser realizada de forma fragmentada. Observa-se nesse enunciado que o pronome demonstrativo “dessa”, oriundo da junção da preposição ‘de’ ao pronome ‘essa’, permite associar à operação de multiplicação pelo elemento x (essa quantidade). Assim, inicialmente, obtém-se a expressão $\frac{21}{100} \cdot x$. A palavra “equivalem” pode ser associada à relação de igualdade e, por fim, o segundo membro da equação é obtido por transposição direta do registro numérico 63. Portanto, uma equação que é referencialmente equivalente a este problema é $\frac{21}{100} \cdot x = 63$, sendo x a quantidade total de figurinhas.

No que tange à congruência, esse é um problema em que há conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. Observe na Figura 11 que o trecho “ $\frac{21}{100}$ dessas figurinhas equivalem a 63” possui 5 signos a serem considerados, que é exatamente o mesmo que $\frac{21}{100} \cdot x = 63$ possui.

Figura 11: Análise dos critérios de congruência do problema P2



Fonte: Elaborado pelo autor

A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração $\frac{21}{100}$ e o natural 63, obviamente conservam tal critério, já a palavra “equivalem” é convertida para o símbolo de igualdade (=), de modo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “dessa quantidade” que possui dois signos está relacionada à representação “ $\cdot x$ ” que também possui dois signos.

O critério C, referente à ordem das unidades de significado, é conservado nesse problema (ver figura 11).

Quadro 3: Problema número 3 com análise da conservação dos critérios de congruência

P3	<p>E Na festa de casamento de minha tia Nena havia 250 pessoas, e $\frac{3}{5}$ delas eram mulheres. Quantos homens havia na festa?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>$\frac{3}{5} \cdot 250 = 3 \cdot 50 = 150$ mulheres O número de homens era $250 - 150 = 100$.</p> </div>	Critério	
		A	✘
		B	✔
		C	✔

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

Esse é um problema clássico envolvendo operações com frações, de forma que pelo contato que os alunos idealmente tiveram com esse assunto em anos anteriores, eles terão uma redução das dificuldades inerentes a situação, já que eventualmente tais dificuldades tenham sido superadas em etapa anterior da escolaridade. Isso, porém, não é sempre verdade.

Assim, para resolver esse problema basta que o aluno calcule a diferença “ $250 - \frac{3}{5} \cdot 250$ ” que é igual a 100. Ainda, o aluno que tem bem construído o conceito de fração, poderá interpretar o problema de forma análoga a consideração feita no problema número 2: dividindo o 250 em 5 partes e considerando três dessas partes para as mulheres e duas dessas partes para os homens.

Nesse problema não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, posto que a palavra “delas” possui apenas um signo e está associada à “ $\times 250$ ”, que possui dois signos.

Porém, nesse problema verificamos tanto a conservação da univocidade semântica terminal quanto à conservação da ordem das unidades de significado, pois entendemos que nesse problema para encontrar a quantidade x de homens, seria necessário proceder uma subtração, 250 menos três quintos de 250, cujas unidades significantes foram apresentadas nessa ordem no enunciado do problema. É importante destacar aqui que a consideração de apenas dois sexos, homem e mulher, justifica a operação de subtração.

Quadro 4: Problema número 4 com análise da conservação dos critérios de congruência

P4	<p>4 Para responder qual era sua idade, Raquel disse a sua amiga: “Se eu multiplicar a minha idade por 4 e subtrair 20, o resultado será igual ao dobro da minha idade mais 12”. Qual é a idade de Raquel?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Considerando a idade de Raquel como x, temos:</p> $4x - 20 = 2x + 12 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4x - 2x = 12 + 20 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{32}{2} \Rightarrow x = 16$ <p>Raquel tem 16 anos.</p> </div>	Critério	
		A	<input checked="" type="checkbox"/>
		B	<input checked="" type="checkbox"/>
		C	<input checked="" type="checkbox"/>

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

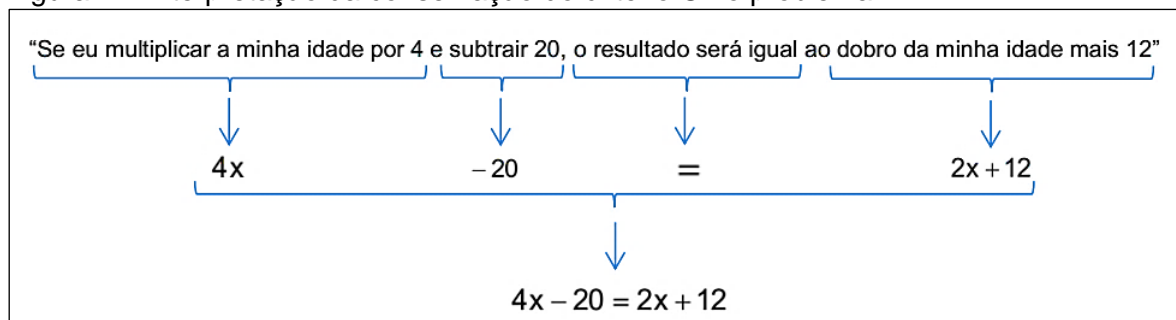
Nesse problema, quadro 4, designando por x a idade de Raquel podemos iniciar a conversão do registro discursivo para o registro algébrico por partes. A expressão “Se eu multiplicar a minha idade por 4” é referencialmente equivalente a $4x$ e quando consideramos o conectivo “e” seguido de “subtrair 20”, obtemos a expressão $4x - 20$. Seguindo a análise, “o resultado será igual” é representado algebricamente pelo símbolo de igualdade, de modo que aqui temos, então, determinada a separação entre o primeiro e o segundo membro da equação. Seguindo o raciocínio, a expressão “dobro da minha idade” pode ser representado algebricamente por $2x$, enquanto que a palavra “mais” refere-se a operação de adição (+). Dessa forma, a expressão que pode representar o segundo membro da igualdade é equivalente a $2x + 12$. Essa estratégia nos permite obter a equação que é referencialmente equivalente ao enunciado dado em linguagem natural: $4x - 20 = 2x + 12$.

Centrando a análise sobre o fenômeno de congruência (ou não-congruência), observamos que não há conservação da correspondência semântica dos elementos significantes. Observe que a palavra “dobro” possui apenas um signo na representação em língua natural, enquanto que seu correspondente, $2x$, possui dois.

Há conservação da univocidade semântica terminal nesse problema, pois não há unidades a serem consideradas não possuem significado antônimo ao que está descrito em língua natural no enunciado. Observe que em “multiplicar [...] por 4” está de fato associada a $\times 4$, ou seja, não há interpretação contrária. O mesmo ocorre para as unidades significantes “subtrair 20”, “dobro da minha idade” e “mais 12” presentes no problema.

Além disso, podemos constatar que há conservação da ordem das unidades de significado nesse problema. Para melhor ilustrar tal conservação, consideremos a Figura 12.

Figura 12: Interpretação da conservação do critério C no problema P4



Em consonância com essa organização, vale considerar Duval (2012b, p.111) ao destacar que “toda fórmula que se organiza simetricamente por um lado e de outro lado por um símbolo de relação (ou de operação) central é melhor compreendida pelos alunos”. Assim, em consonância com esse autor, acreditamos que os alunos terão menos dificuldades ao fazer a conversão desse problema, de forma organizada e sistematizada, por meio de equação do 1º grau com uma incógnita, necessária para a resolução.

Quadro 5: Problema número 5 com análise da conservação dos critérios de congruência

P5	<p>5 Num estacionamento há 100 veículos, entre carros e motos. Sabe-se que o número de carros é o triplo do número de motos. Quantos carros há nesse estacionamento?</p> <p>Considerando as motos como x, os carros são o triplo de x, ou seja, $3x$. Assim: $x + 3x = 100 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{100}{4} \Rightarrow x = 25$ Como são $3x$ carros, temos: $3 \cdot 25 = 75$ Há, nesse estacionamento, 75 carros.</p>	Critério	
		A	<input checked="" type="checkbox"/>
		B	<input checked="" type="checkbox"/>
		C	<input checked="" type="checkbox"/>

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

No quinto problema, sugerido no material analisado, é apresentado um problema clássico que, rotineiramente, é explorado tanto utilizando equações do 1º grau com uma incógnita, quanto utilizando equações do 1º grau com duas incógnitas, por meio de sistema de equações. Mas, como o interesse aqui é a conversão de enunciados descritos em língua natural para equações do 1º grau com uma incógnita, a análise foi centrada apenas nesse objeto matemático.

Assim, se x representar a quantidade de motos, a frase “o número de carros é o triplo do número de motos” permite representar o número de carros por $3x$. De forma mais detalhada, verifica-se a possibilidade de associação da palavra “triplo” com a multiplicação por três, conduzindo a inferência anterior. Retornando ao início do enunciado, a frase “há 100 veículos, entre carros e motos” pode conduzir a uma equação referencialmente equivalente ao enunciado, feitas as considerações anteriores, expressas por $3x + x = 100$.

Todavia, caso x represente a quantidade de carros descrita no enunciado, a quantidade de motos deverá ser representada por $\frac{x}{3}$, para que seja estabelecida a equivalência referencial. Analogamente ao raciocínio anterior, aqui a frase “há 100 veículos, entre carros e motos” pode ser representada algebricamente por meio da equação $x + \frac{x}{3} = 100$. Vale destacar, novamente, que nessa segunda possibilidade a incógnita x representará o número de carros.

Uma terceira possibilidade ainda pode ser destacada. Como nesse estacionamento “há 100 veículos, dentre carros e motos”, podemos associar as expressões x e $(100 - x)$ para o número de carros e motos, respectivamente. Por esse caminho, a frase “o número de carros é o triplo do número de motos” deverá ser representada por $x = 3 \cdot (100 - x)$.

Há ainda outras possibilidades, porém com essas que foram apresentadas pode-se destacar a importância do olhar minucioso do professor sobre os diversos caminhos que o aluno pode seguir ao resolver uma questão de tal natureza. De acordo com Duval (2009) que o custo cognitivo da conversão pode ser distinto para cada uma dessas escolhas. A análise de congruência e da não-congruência semântica permite avaliar o custo cognitivo de cada um dos caminhos (não mensurando-os numericamente, mas comparando-os entre si) permitindo, *a priori*, avaliar a dificuldade dos alunos.

Continuando nosso itinerário de análise, verificamos que a unidade de significado “triplo” possui apenas um signo, enquanto que na representação

algébrica, $3x$ possui dois signos, de forma que fica então caracterizada a não conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado.

Aqui constatamos que há conservação da univocidade semântica terminal, à medida que não há palavras portadoras de informação referentes às operações necessárias com significados antônimos, como na utilização da palavra ganhar com significado de subtração. No problema, a expressão “entre carros e motos” é comum ser utilizada para indicar a junção, ou seja, para designar a operação de adição de dois objetos, nesse caso carros e motos. Ainda, é importante destacar aqui que, para tal caracterização, levamos em conta a contexto de tal expressão, isto é, se fosse utilizada na frase “*aquela menina estava correndo entre carros e motos*” teria um significado totalmente distinto de como é apresentado no problema.

Por fim, destacamos que nesse problema não se conserva a ordem das unidades de significado. Tal fato fica evidentemente constatado quando consideramos a atribuição da incógnita x para o número de motos, a equação que é referencialmente equivalente ao problema é $3x + x = 100$.

Quadro 6: Problema número 6 com análise da conservação dos critérios de congruência

P6	<p>6 Luísa comprou um terreno retangular cujo perímetro é igual a 54 metros. Se esse terreno tem 15 metros de comprimento, quantos metros ele tem de largura?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Vamos chamar a largura de x. Como sabemos que o perímetro é 54 m, então:</p> $15 + 15 + x + x = 54 \Rightarrow$ $\Rightarrow 30 + 2x = 54 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{24}{2} \Rightarrow x = 12$ <p>O terreno tem 12 metros de largura.</p> </div>	Critério	
		A	✓
		B	✓
	C	✗	

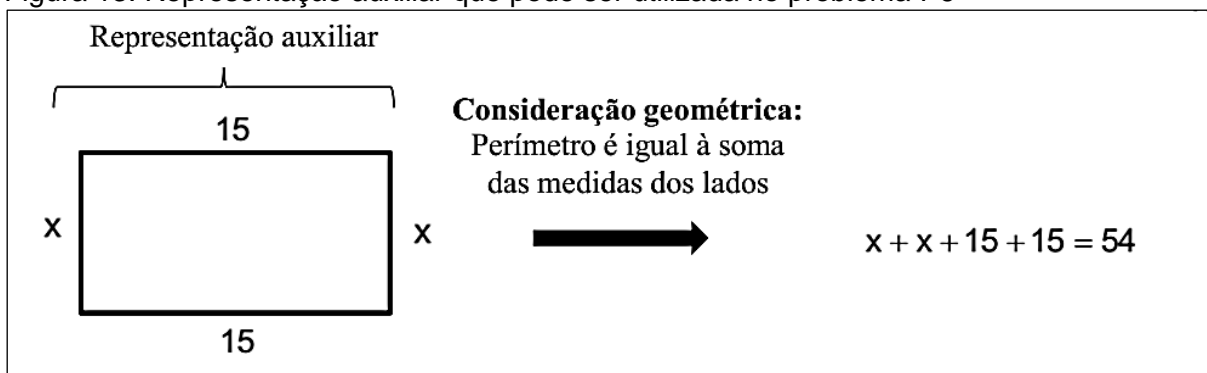
Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

No sexto problema apresentado há uma conexão com a geometria, mais especificamente com o perímetro de retângulo. Dessa forma, espera-se que o aluno disponha desse conhecimento prévio para a resolução dela e, caso o aluno não se recorde, eis uma ótima oportunidade de o professor revisar tal conteúdo numa perspectiva espiralada do ensino da matemática.

No processo de conversão da representação em língua natural para a representação algébrica, pode-se levar em conta uma representação auxiliar

caracterizando o terreno retangular de Luísa, conforme apresentado na Figura 13 abaixo.

Figura 13: Representação auxiliar que pode ser utilizada no problema P6



Uma vez considerada essa representação auxiliar, as características que definem um retângulo, bem como o fato de que o perímetro de um retângulo é dado pela soma das medidas dos lados, a equação do 1º grau com uma incógnita pode ser obtida, acreditamos, sem grande esforço cognitivo. É possível verificar que a expressão algébrica obtida é referencialmente congruente à figura e, conseqüentemente, também é referencialmente equivalente ao problema inicialmente proposto em língua natural.

No caso de polígonos, a palavra “perímetro” está associada à soma da medida dos lados, que também será representada por um único símbolo (+). Assim, constatamos que a correspondência semântica das unidades de significado é conservada nesse problema. Além disso, também verificamos aqui a conservação da univocidade semântica terminal.

O mesmo não pode ser dito da ordem das unidades de significado nesse problema, que não é conservada. É suficiente observar que somente após ter dito que o perímetro era igual a 54 metros, é que o problema apresentou o comprimento desse terreno.

Quadro 7: Problema número 7 com análise da conservação dos critérios de congruência

P7	<p>7 Bruna foi a uma loja de eletrodomésticos e comprou uma cafeteira e um liquidificador. A compra ficou em R\$ 383,00. Como a cafeteira era para café expresso, acabou custando mais caro que o liquidificador: a diferença foi de R\$ 213,00! Quanto Bruna pagou por cada um dos produtos?</p>	Critério	
		A	✓
		B	✗
		C	✗

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

O sétimo problema sugerido para os alunos na seção “Ação” do material que analisamos apresenta uma situação comercial na qual, dado o valor total de uma compra e a diferença de preço entre as duas mercadorias compradas, pede-se para encontrar o preço de cada produto.

Assim, para realizar tal questão o aluno poderá lançar mão de diversos conhecimentos adquiridos, de forma que acreditamos que há uma grande tendência de os alunos utilizarem os conhecimentos aritméticos em detrimento dos algébricos, mesmo para alunos não iniciantes. No entanto, consideramos para as nossas análises a representação algébrica que é referencialmente equivalente ao problema.

Um caminho possível seria atribuir a incógnita x ao liquidificador e estabelecer uma relação de dependência entre o preço do liquidificador e o da cafeteira. Segundo o enunciado da questão, a diferença de preço era de R\$ 213,00, de forma que duas possibilidades se constroem: a cafeteira custa $(x + 213,00)$ ou custa $(x - 213,00)$. Outro dado do problema permite tomar a decisão entre uma dessas duas possibilidades: a cafeteira custou mais caro, dada sua característica. Portanto, a equação do 1º grau com uma incógnita que é referencialmente ao problema é $x + (x + 213) = 383$, uma vez que a compra ficou em R\$ 383,00.

Além disso, caso seja o preço da cafeteira seja designado por x a análise ocorreria de modo análogo, porém a equação que seria referencialmente equivalente ao problema é $x + (x - 213) = 383$. Embora muito parecidas, a resolução


dessas duas equações levam a resultados diferentes, com interpretações distintas: preço do liquidificador ou da cafeteira.

Há, sem dúvidas, outros caminhos que poderiam ser desenvolvidos como, por exemplo, usando sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas. Todavia, esses dois caminhos apresentados já são suficientes para as discussões que aqui estamos propondo. Passamos então para a análise da congruência entre as representações consideradas.

Nesse problema há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, porém, observamos que não há conservação da univocidade semântica terminal em relação à primeira equação acima apresentada, ao passo que a palavra “diferença” seria utilizada no sentido de adição (preço do liquidificador mais R\$ 213,00). É importante observar que quando consideramos a segunda equação elencada acima, $x + (x - 213) = 383$, a palavra diferença assumiria o sentido de subtração, de forma que tal critério seria conservado. Para nossa análise, estamos considerando a equação apresentada na sugestão de resposta do material didático.

Ainda, quando ao terceiro critério considerado, verificamos que não há conservação da ordem das unidades de significado porque tais unidades consideradas no enunciado não estão dispostas na mesma ordem em que as unidades de significado apresentadas nas equações, principalmente pelo fato de “a diferença foi de R\$ 213,00!” ser apresentada no final do problema.

Quadro 8: Problema número 8 com análise da conservação dos critérios de congruência

P8	<p>B Lucas, Marcos e Samir colecionam selos. Juntos, eles têm 206 selos. Lucas tem o triplo da quantidade de selos que Marcos possui, e Samir possui 10 selos a mais que Lucas. Quantos selos tem cada um dos meninos?</p> 	Critério	
		A	✘
		B	✓
		C	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

Assim como foi destacado na análise da quinta questão, esse problema permite uma gama de possibilidades de ponto de partida para se converter do registro em língua natural para o registro algébrico.

Se, a princípio, a incógnita x for associada à quantidade de selos de Marcos, tem-se que a frase “Lucas tem o triplo da quantidade de selos de Marcos” pode ser representada algebricamente por $3x$ e, conseqüentemente, a quantidade de selos de Samir fica representada por $3x + 10$, em consonância com a frase “Samir possui 10 selos a mais que Lucas”. Feitas tais associações iniciais, como segundo o enunciado os sujeitos possuem juntos 206 selos, a equação que representa tal situação é $x + 3x + (3x + 10) = 206$.

Por outro lado, se a incógnita x for associada à quantidade de selos de Lucas, tem-se que Marcos terá a quantidade de selos que possui representada algebricamente por $\frac{x}{3}$, enquanto que a quantidade de Samir será representada por $x + 10$. Por esse caminho, a equação obtida será $x + \frac{x}{3} + (x + 10) = 206$.

Outro caminho que se destaca é quando a incógnita x é designada à representação do número de selos de Samir. Nesse caso, a quantidade de selos de Lucas será representada por $(x - 10)$, posto que Samir possui 10 selos a mais que Lucas. Segundo o enunciado o Lucas possui o triplo da quantidade de selos de Marcos, de forma que expressão algébrica que representa a quantidade de selos de Marcos é $\frac{(x - 10)}{3}$. Esse caminho nos leva a equação $(x - 10) + \frac{(x - 10)}{3} + x = 206$.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, a Tabela 2 a seguir resume organizadamente as três situações analisadas para essa questão, permitindo tecer uma comparação entre as equações obtidas, inclusive em termos de congruência semântica, conforme será feito posteriormente.

Tabela 2: Equações obtidas nas análises para o problema P8



SUJEITOS	Lucas	Marcos	Samir	EQUAÇÃO (fato comum: soma 206 selos)
FATOS	“tem o triplo da quantidade de selos de Marcos”	-	“possui 10 selos a mais que Lucas”	
REPRESENTAÇÕES	$3x$	x	$(3x + 10)$	$x + 3x + (3x + 10) = 206$
	x	$\frac{x}{3}$	$(x + 10)$	$x + \frac{x}{3} + (x + 10) = 206$
	$(x - 10)$	$\frac{(x - 10)}{3}$	x	$(x - 10) + \frac{(x - 10)}{3} + x = 206$

A análise realizada considerando os critérios de congruência nos permitiu inferir que, quando consideramos a escolha relativa à primeira linha da TABELA 2, o problema não conserva a correspondência semântica das unidades de significado, pois em “*Lucas tem o triplo da quantidade de selos que Marcos possui*”, a palavra “triplo” (1 signo) está associada a três vezes ($3 \times$) que possui dois signos. É importante esclarecer que estamos descartando aqui a possibilidade de o aluno omitir o símbolo para multiplicação ou, dito de outra maneira, mesmo que tal omissão ocorra, ainda consideraremos como dois signos.

Quanto à univocidade semântica terminal, destacamos que ela é conservada nesse problema, já que as expressões “triplo” e “a mais” estão associadas à multiplicação por três e a operação de adição, respectivamente.

Já no que tange ao critério C, inferimos que não é conservada a ordem das unidades de significado. Haja vista que nesse problema podemos observar duas relações: “Lucas tem o triplo da quantidade de selos de Marcos” e “Samir possui 10 selos a mais que Lucas”, sendo que para determinar a quantidade de selos de Lucas, que apareceu primeiro na relação, necessitamos saber antes a quantidade de selos de Marcos, segundo a aparecer na relação e fonte para descoberta dos demais.

Quadro 9: Problema número 9 com análise da conservação dos critérios de congruência

P9	<p>9 Sara, Mila e Denise são amigas há muitos anos. A idade delas é representada por números consecutivos, sendo a soma dessas três idades igual a 108. Quantos anos tem cada uma das amigas, sabendo que Mila é a mais nova e Sara é a mais velha?</p> 	Critério	
	<p>Se as idades são consecutivas, Mila é a mais nova e Sara é a mais velha, temos que:</p> <p>Mila: x; Denise: $x + 1$; Sara: $x + 2$</p> $x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x = 108 - 1 - 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x = 105 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{105}{3} \Rightarrow x = 35$ <p>Retornando ao início do problema, a idade de cada uma é:</p> <p>Mila: $x = 35$ anos</p> <p>Denise: $x + 1 = 35 + 1 = 36$</p> <p>Sara: $x + 2 = 35 + 2 = 37$</p>	A	<input checked="" type="checkbox"/>
	<p> Professor(a), mostre aos alunos outras possibilidades para a representação das idades de Mila, Denise e Sara, respectivamente, por exemplo: $(x - 1)$; x; $(x + 1)$ ou $(x - 2)$; $(x - 1)$; x.</p>	B	<input checked="" type="checkbox"/>
		C	<input checked="" type="checkbox"/>

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

No problema apresentado na Quadro 9, o material apresenta uma situação tradicional envolvendo idades e números consecutivos. A resolução e compreensão do problema número 1 poderá auxiliar o aluno nessa questão.

Analogamente ao raciocínio empregado na questão 8, se atribuirmos a incógnita x à idade de Mila, que segundo o enunciado é a mais nova, teremos por consequência que a idade de Denise é representada por $(x + 1)$, pois a frase “Mila é a mais nova e Sara é a mais velha”, permite a inferir que Denise é a “do meio”. Portanto, por se tratarem de números consecutivos, a idade de Sara é representada por $(x + 2)$, de modo que a equação que modela essa situação é $(x + 2) + x + (x + 1) = 108$.

É importante destacar que, outras duas possibilidades quase que imediatas emergem dessa forma de pensar quando atribuimos a incógnita x a cada uma das outras duas amigas e estabelecemos as relações adequadas. Por questões de objetividade, sintetizamos essas possibilidades na Tabela 3 a seguir, tendo em vista analisar elas em termos de congruência, acreditando que isso permitirá dizer, *a priori*, o caminho que o aluno tenderá a ter mais dificuldades.


Tabela 3: Equações obtidas nas análises para o problema P9

SUJEITOS	Sara	Mila	Denise	EQUAÇÃO (fato comum: suas idades são números consecutivos e somam 108 anos)
FATOS	“É a mais velha”	“é a mais nova”	-	
REPRESENTAÇÕES	$(x+2)$	x	$(x+1)$	$(x+2)+x+(x+1)=108$
	x	$(x-2)$	$(x-1)$	$x+(x-2)+(x-1)=108$
	$(x+1)$	$(x-1)$	x	$(x+1)+(x-1)+x=108$

Observamos que nesse problema não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, pois assim como analisamos no primeiro problema, a palavra “consecutivos”, que possui apenas um signo está associada a mais de um signo em sua representação algébrica, podendo variar de acordo com a escolha para atribuição da incógnita x , conforme observamos na Tabela 3.

Já no que tange à univocidade semântica terminal e à ordem das unidades de significado, verificamos que ambas são conservadas. A língua natural permite uma variedade gigantesca de dizer algo, de forma que o simples fato de dizer que as idades são números consecutivos antes de anunciar que a soma é igual a 108 anos, faz com que haja conservação da ordem das unidades de significado. Isso não ocorreu no primeiro problema.

Quadro 10: Problema número 10 com análise da conservação dos critérios de congruência

P10	<p>10 Joel fez uma poupança e agora vai usar esse dinheiro em algumas melhorias na sua casa. Com 60% do que foi guardado, ele vai pintar a parte interna da casa; com 25% desse valor, vai comprar um sofá novo e, com os R\$ 525,00 restantes, vai comprar uma TV de LED para colocar no seu quarto. Qual é o valor que Joel economizou na poupança?</p> 	Critério	
		A	✗
		B	✓
		C	✓

Vamos escrever as porcentagens na forma de número decimal, ou seja, $60\% = 0,60$ e $25\% = 0,25$.
 Seja x o total da economia de Joel.
 $x = 0,60x + 0,25x + 525 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - 0,60x - 0,25x = 525 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0,15x = 525 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{525}{0,15} \Rightarrow x = 3.500$
 Joel economizou na poupança R\$ 3.500,00.

O décimo problema apresentado resgata o conceito de porcentagem que idealmente foi estudado anteriormente pelos alunos, tanto no 6º ano após o estudo das frações como no 7º ano com o estudo dos números racionais.

Então, para resolvê-lo o aluno poderá atribuir a incógnita “x” para o valor total economizado na poupança feita por Joel. Uma vez tomada essa decisão, os trechos “60% do que foi guardado” e “25% desse valor” poderão ser transformados em $0,6x$ e $0,25x$, respectivamente. A interpretação da palavra “restante” como sendo uma das ideias associadas à operação de subtração permitirá que o aluno obtenha a equação $x - 0,6x - 0,25x = 525$, que é referencialmente equivalente ao enunciado.

Outra equação que é referencialmente equivalente ao enunciado que o aluno poderá obter é aquela apresentada na resolução proposta pelo material, $x = 0,6x + 0,25x + 525$, pois se considerarmos a adição dos valores gastos com a pintura da parte interna da casa, com a compra do sofá novo e com a compra da TV de LED enunciadas no problema, obteremos o valor total aplicado na poupança.


Nesse problema a correspondência semântica das unidades de significado não é conservada. Ao transformarmos o registro numérico simbólico 60%, que possui dois signos, para sua representação decimal 0,6, que possui um signo, temos caracterizada essa não conservação desse critério. O mesmo vale para 25%. Além disso, a expressão “do que foi guardado” possui quatro signos enquanto que “ $\cdot x$ ” possui apenas dois signos. É interessante destacar aqui um exemplo nesse enunciado que ilustra uma característica bastante forte da língua natural que influencia diretamente na conservação ou não desse primeiro critério: em “25% desse valor” temos apenas duas palavras associadas à “ $\cdot x$ ”, diferenciando-se das quatro – “do que foi guardado” – utilizadas para referenciar o valor total economizado.

Já no que tange a univocidade semântica terminal, verificamos que a mesma é conservada. A palavra “restantes” presente no enunciado desse problema pode causar alguma dificuldade de verificação, pois a mesma está muito associada à operação de subtração ou, dependendo da situação, ao resto de uma divisão. E

nesse problema esta palavra justifica a operação de subtração realizada, quando considerada a equação $x - 0,6x - 0,25x = 525$.

A conservação da ordem das unidades de significado é verificada nesse problema, pois as unidades significantes presentes no registro de partida em língua natural estão na mesma ordem das unidades significantes no registro de chegada em linguagem algébrica.

Quadro 11: Problema número 11 com análise da conservação dos critérios de congruência

P11	<p>11 Marinete comprou uma máquina de lavar roupas no valor de R\$ 832,80. Pagou R\$ 277,60 de entrada e o restante em oito prestações fixas. Qual é o valor de cada uma dessas prestações?</p> <p>Valor de cada prestação: x $277,60 + 8x = 832,80 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8x = 832,80 - 277,60 \Rightarrow$ $\Rightarrow 8x = 555,20 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{555,20}{8} \Rightarrow x = 69,40$ O valor de cada prestação é de R\$ 69,40.</p>		Critério	
			A	✓
			B	✓
			C	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)


Para resolver o problema 11, se atribuirmos a incógnita “ x ” ao valor de cada prestação que está sendo procurado e procedermos a conversão no mesmo sentido dos dados que foram apresentados no problema conseguiremos obter uma equação que é referencialmente equivalente ao problema. Por um lado, como o valor total da máquina de lavar roupas comprada por Marinete é de R\$ 832,80 e ela pagou R\$ 277,60 de entrada, verificamos que o valor restante será obtido pela subtração “ $832,80 - 277,60$ ” que caracteriza o primeiro membro dessa equação. Por outro lado, esse valor restante foi dividido em oito prestações fixas (e sem juros), ou seja, se multiplicarmos o valor de cada prestação, x , por oito obteremos o valor que resta ela pagar. Assim, temos caracterizada a equação $832,80 - 277,60 = 8x$.

Outra equação também referencialmente equivalente ao enunciado pode ser obtida caso levemos em consideração que a soma das oito prestações com o valor de entrada resulta no valor total pago por Marinete. Procedendo assim, é possível obter a equação $8x + 277,60 = 832,80$.

Esse problema conserva a correspondência semântica entre as unidades de significado uma vez que a cada unidade significativa elementar do registro de partida está associada uma única unidade significativa no registro de chegada em linguagem algébrica.

Além disso, o problema em questão também conserva a univocidade semântica terminal, bem como a ordem das unidades de significado. É possível observarmos que as unidades “pagou”, “restante” e “oito prestações fixas” estão associadas, na perspectiva de Marinete, à adição (+), igualdade (=) – considerando a palavra restante relacionada ao resto ou diferença de uma subtração, ou seja, o “resultado” da operação – e multiplicação por oito ($8x$), respectivamente. Ainda, constatamos que as unidades de significado apresentadas no enunciado estão na mesma ordem, da esquerda para a direita, que a equação $832,80 - 277,60 = 8x$.

Quadro 12: Problema número 12 com análise da conservação dos critérios de congruência

P12	<p>12 Antônio Carlos e Aldo foram à padaria comprar pães. No caminho de volta, Antônio Carlos comeu um quarto dos pães e Aldo comeu dois pães. Quando chegaram em casa, havia apenas sete pães na sacola. Quantos pães eles compraram?</p> 	Critério
	<p>Sejam x o total de pães comprados e $\frac{x}{4}$ a quantidade que Antônio Carlos comeu.</p> $x - \frac{x}{4} - 2 = 7 \Rightarrow \frac{4x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{8}{4} = \frac{28}{4} \Rightarrow \frac{3x - 8}{4} = \frac{28}{4} \Rightarrow 3x - 8 = 28 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{36}{3} \Rightarrow x = 12$ <p>Logo, eles compraram 12 pães.</p>	A <input checked="" type="checkbox"/>
		B <input checked="" type="checkbox"/>
		C <input checked="" type="checkbox"/>

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

Para resolver o décimo segundo problema apresentado, podemos atribuir a incógnita “ x ” para o total de pães comprados por Antônio Carlos e Aldo. Assim, seguindo a ordem das informações apresentadas no enunciado, podemos inferir que se Antônio Carlos comeu um quarto dos pães comprados, então ele comeu $\frac{1}{4} \cdot x$. Seguidamente o enunciado disse que Aldo comeu dois pães restando sete pães do total comprado. Assim, a palavra havia nos dá a ideia de igualdade, considerada após a subtração dos pães comidos. Portanto uma equação que é referencialmente equivalente a esse problema e oriunda desse raciocínio é $x - \frac{1}{4} \cdot x - 2 = 7$.

O aluno também pode resolver esse problema utilizando-se do raciocínio por meio de operações inversas, sem utilizar necessariamente uma equação para tanto. Se Aldo não tivesse comido dois pães, ao final restariam 9 pães. Esses nove pães representam três quartos do total e, portanto, um quarto do total é 3 pães. Logo o total de pães comprados foi 12. Embora essa seja uma solução válida e correta, estamos enfatizando a primeira, por utilizar a representação algébrica.

Este problema não conserva a correspondência semântica entre as unidades de significado uma vez que a unidade significante “um quarto” possui dois signos enquanto que na representação algébrica a fração $\frac{1}{4}$ possui apenas um signo, caracterizando a não conservação.

A univocidade semântica terminal é conservada, pois as expressões “comeu” e “havia” estão relacionadas à subtração e a relação de igualdade tanto na representação em língua natural, quanto na representação algébrica, por meio da equação $x - \frac{1}{4} \cdot x - 2 = 7$.

No que tange a ordem das unidades de significado, também conseguimos verificar que ela é conservada nesse problema, pois “[...] comeu um quarto dos pães [...] comeu dois pães. [...] havia apenas sete pães” presente no enunciado do problema, a ordem das unidades de significado é a mesma que na equação $x - \frac{1}{4} \cdot x - 2 = 7$, referencialmente equivalente ao problema.

Quadro 13: Problema número 13 com análise da conservação dos critérios de congruência

P13	<p>13 Na minha classe há duas pessoas chamadas João, o que equivale a $\frac{1}{20}$ dos alunos. Quantos alunos há na minha classe?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>Minha classe tem x alunos e $\frac{1}{20} \cdot x = 2$.</p> <p>$x = 2 \cdot 20 \Rightarrow x = 40$</p> <p>Na minha classe há 40 alunos.</p> </div>	Critério	
		A	✓
		B	✓
		C	✓

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

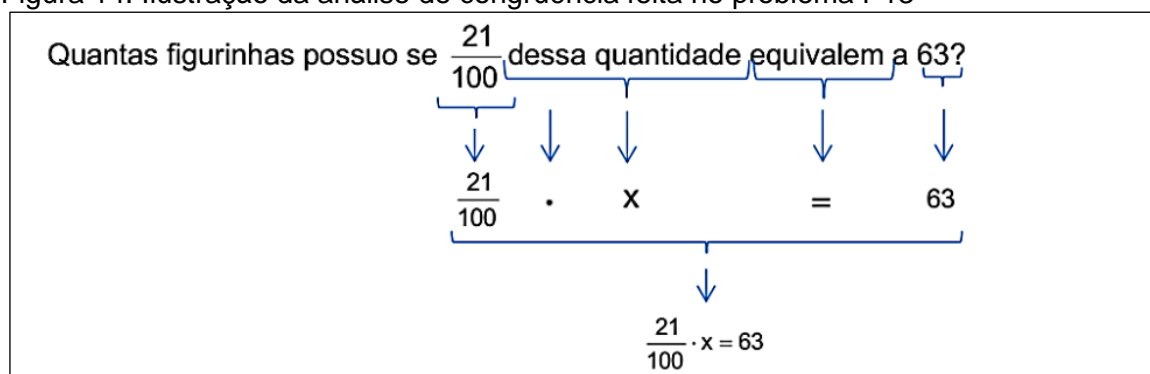
O décimo terceiro problema analisado se assemelha ao problema dois, de modo que as considerações acerca do tipo de solução que estamos considerando são as mesmas, isto é, ainda que os alunos possam resolvê-lo por meio de

conhecimentos já adquiridos em etapas anteriores da escolarização dos alunos, sendo comum utilizarem o conceito de fração, estruturaremos um raciocínio algébrico para realizar tal transformação.

Designando por x a quantidade total de pessoas que fazem parte do grupo de alunos em questão, a conversão do registro em língua natural para o algébrico pode ser realizada observando no enunciado que os “ $\frac{1}{20}$ dos alunos”, permite associar à operação de multiplicação pelo elemento x (dos alunos). Assim, inicialmente, obtém-se a expressão $\frac{1}{20} \cdot x$. A palavra “equivale” está associada à relação de igualdade e, por fim, o outro membro da equação é obtido pelo registro “duas”, utilizado para expressar a quantidade de alunos chamados João. Portanto, uma equação que é referencialmente equivalente a este problema é $2 = \frac{1}{20} \cdot x$, sendo x a quantidade total de figurinhas.

No que tange à congruência, esse é um problema em que há conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. Observe na Figura 14 uma relação entre enunciado e equação.

Figura 14: Ilustração da análise de congruência feita no problema P13



A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração $\frac{1}{20}$ e a palavra “duas”, obviamente conservam tal critério, enquanto que a

palavra “equivale” é convertida para o símbolo de igualdade (=), sendo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “dos alunos” que possui dois signos está relacionada à representação “·x” que também possui dois signos.

Acreditamos que a Figura 14, permite verificar claramente a conservação do critério referente à ordem das unidades de significado. É importante destacar aqui, ainda, que estamos considerando a propriedade simétrica da igualdade, ou seja, a implicação lógica $\frac{1}{20} \cdot x = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{20} \cdot x$ é verdadeira.

Quadro 14: Problema número 14 com análise da conservação dos critérios de congruência

P14	<p>14 Artur possuía uma caixa de bolinhas de gude. Deu $\frac{1}{5}$ das bolinhas a seu amigo André e $\frac{1}{4}$ das que sobraram a seu irmão Vítor. Restaram na caixa 30 bolinhas. Responda ao que se pede.</p> <p>a) Quantas bolinhas havia na caixa de Artur?</p>	Critério	
	<p>Artur possuía x. Deu $\frac{1}{5}$ de x a André. Então: $x - \frac{1}{5} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot x$</p> <p>Desses $\frac{4}{5} \cdot x$, Artur deu $\frac{1}{4}$ a Vítor. Assim:</p> $\frac{4}{5} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot x - \frac{1}{5} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot x$ <p>Esses $\frac{3}{5} \cdot x$ correspondem às bolinhas que restaram na caixa:</p> $\frac{3}{5} \cdot x = 30 \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot x \cdot 5 = 30 \cdot 5 \Rightarrow 3x = 150 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{150}{3} \Rightarrow x = 50$ <p>Portanto, na caixa havia 50 bolinhas de gude.</p>	A	\otimes
	<p>b) Quem ficou com mais bolinhas: André ou Vítor?</p>	B	\checkmark
	<p>André: $\frac{1}{5} \cdot x = \frac{1}{5} \cdot 50 = 10$ bolinhas</p> <p>Vítor: $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ bolinhas</p> <p>Os dois garotos ficaram com a mesma quantidade de bolinhas de gude.</p>	C	\checkmark

Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

No décimo quarto problema, para resolver o item “a”, se atribuirmos a incógnita “x” ao total de bolinhas de gude que Arthur possuía obteremos a equação $x - \frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 30$, que é referencialmente equivalente ao problema. Para obtê-la consideramos o fato de que, do total de bolinhas, Arthur deu $\frac{1}{5}$ para André, restando $\frac{4}{5}$ do total, ou seja, deu $\frac{x}{5}$ bolinhas e sobraram $\frac{4x}{5}$ bolinhas. Dessas $\frac{4x}{5}$ bolinhas restantes, Arthur deu $\frac{1}{4}$ para Vítor, seu irmão, de forma que este recebeu $\frac{1}{4}$ de $\frac{4x}{5}$,

num total de $\frac{x}{5}$ bolinhas. Como restaram 30 bolinhas a equação acima fica caracterizada.

De modo análogo ao que foi descrito no problema 12, é possível obter a solução desse problema por meio de operações inversas, que não será apresentada aqui.

A resolução do item “b” é imediata a partir do momento em que encontramos a quantidade de bolinhas doadas a André e a Vítor. Uma maneira de observar isso é interpretando a expressão $\frac{x}{5}$ utilizada para indicar a quantidade de bolinhas recebidas tanto por André quanto por Vítor.

No item “a” desse problema, verificamos que não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, já que em “das que sobraram” temos três signos considerados, enquanto que em “ $\cdot \frac{4}{5} \cdot x$ ”, que representa tal sobra, temos quatro signos a serem considerados.

A univocidade semântica terminal é conservada nesse problema, pois as unidades de significado “deu” e “restaram” estão associadas à operação de subtração e à relação de igualdade em ambos os registros, tanto de partida quanto de chegada.

Também nesse problema é conservada a ordem das unidades de significado, pois as unidades significantes presentes no registro de partida em língua natural estão na mesma ordem das unidades significantes no registro de chegada em linguagem algébrica.

Conforme destacado anteriormente, é possível resolver o item “b” desse problema utilizando o valor de “x” encontrado na resolução da equação do 1º grau com uma incógnita obtido para substituir nas expressões referentes à quantidade de bolinhas recebidas por André e Vítor. Assim, consideramos que nesse caso não há conversão de registros e sim tratamento, uma vez que o aluno irá fazer apenas alterações nas expressões numéricas para obter os resultados necessários para

responder o item. Portanto, não cabe fazer uma análise dos critérios de congruência desse item, dado os propósitos desse trabalho.

Quadro 15: Problema número 15 com análise da conservação dos critérios de congruência

P15	<p>15 Na escolinha de futebol de Ronaldo há cinco garotos que vieram de outras cidades para fazer parte do treino. Esses garotos representam $\frac{3}{15}$ da equipe. Quantos garotos treinam futebol nessa equipe da escolinha de Ronaldo?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p>A equipe tem x garotos e $\frac{3}{15} \cdot x = 5$.</p> <p>$3x = 5 \cdot 15 \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{3} \Rightarrow x = 25$</p> <p>A equipe tem 25 garotos.</p> </div>	Critério	
		A	✓
		B	✓
		C	✓

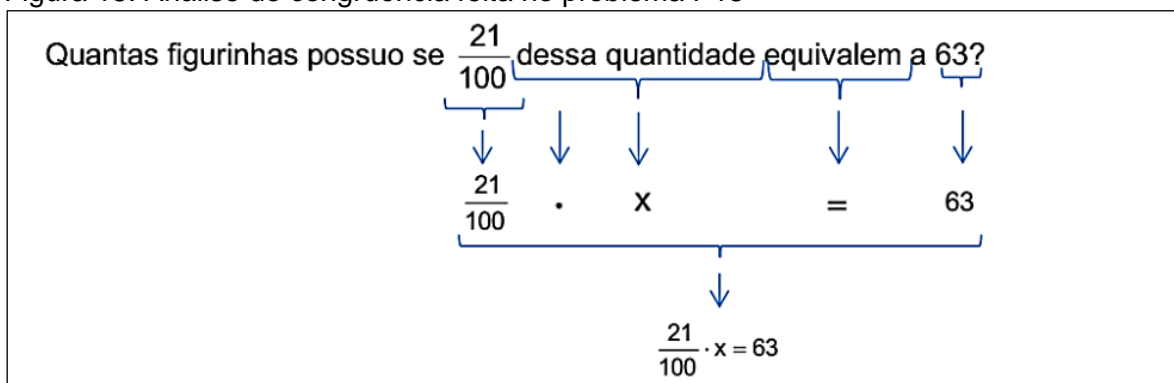
Fonte: Sistema Ético – 7º ano – livro do professor (Adaptado pelo autor)

O décimo quinto e último problema analisado, assim como o problema treze, também se assemelha ao problema dois, de modo que as considerações a respeito do tipo de solução que estamos considerando são idênticas.

Designando por x a quantidade total de garotos que treinam futebol na escolinha de futebol de Ronaldo, a conversão do registro em língua natural para o algébrico pode ser realizada observando no enunciado que os “ $\frac{3}{15}$ da equipe”, permite associar à operação de multiplicação pelo elemento x (da equipe). Assim, inicialmente, obtém-se a expressão $\frac{3}{15} \cdot x$. A palavra “representam” pode ser associada à relação de igualdade e, por fim, o outro membro da equação é obtido pelo registro “cinco” garotos. Portanto, uma equação que é referencialmente equivalente a este problema é $\frac{3}{15} \cdot x = 5$, sendo x a quantidade total de figurinhas.

No que tange à congruência, esse é um problema em que há conservação da correspondência semântica entre as unidades de significado, pois a quantidade de signos de cada uma das unidades significantes do registro de partida corresponde à mesma quantidade signos no registro de chegada. Observe na Figura 15 uma relação entre enunciado e equação.

Figura 15: Análise de congruência feita no problema P15



A univocidade semântica terminal também é conservada nesse problema. A fração $\frac{3}{15}$ e o natural “cinco”, obviamente conservam tal critério, já a palavra “representam” é convertida para o símbolo de igualdade (=), de modo que ambos possuem apenas um signo a ser considerado. Além disso, a expressão “da equipe” que possui dois signos está relacionada à representação “ $\cdot x$ ” que também possui dois signos.

A Figura 15, ilustra a conservação do critério C, referente à ordem das unidades de significado. É importante destacar aqui, porém, que estamos considerando a propriedade simétrica da igualdade, ou seja, a implicação lógica $\frac{3}{15} \cdot x = 5 \Rightarrow 5 = \frac{3}{15} \cdot x$ é verdadeira.

3.2. Discussão acerca da análise feita nos problemas selecionados

Nessa seção do relato de pesquisa retomaremos nossas questões de investigação, procurando responde-las efetivamente, bem como relacionar as possíveis dificuldades dos alunos em obter as respostas aos problemas em questão com o objetivo de nossa pesquisa.

Dessa forma, a Tabela 4 apresentada a seguir contempla uma síntese da análise feita quanto aos critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) que foram levados em consideração nessa pesquisa, para cada um dos problemas selecionados. De modo análogo ao que foi realizado na seção anterior, quando o problema conserva o critério de congruência considerado utilizamos o

símbolo ✓, enquanto que quando o critério de congruência não é conservado utilizamos o símbolo ✘.

Tabela 4: Síntese da análise de congruência realizada nos problemas P1 a P15

Critério de Congruência	Número do Problema Analisado														
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
A	✘	✓	✘	✘	✘	✓	✓	✘	✘	✘	✓	✘	✓	✘	✓
B	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✘	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
C	✘	✓	✓	✓	✘	✘	✘	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Lembrando que o critério **A** refere-se à conservação da correspondência semântica das unidades de significado, o critério **B** refere-se à conservação da univocidade semântica terminal, enquanto que o critério **C** diz respeito à conservação da ordem das unidades de significado.

Duval (2009, p.69), ao tratar do fenômeno da congruência semântica, esclarece que “duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações”, ou seja, quando os três critérios elencados por ele são conservados há congruência entre o registro de partida e o de chegada.

Então, segundo a análise que realizamos, apenas quatro dos quinze problemas apreciados possuem a representação em língua natural semanticamente congruente à equação que é referencialmente equivalente ao enunciado, sendo eles P2, P11, P13 e P15. Isso representa aproximadamente 27% dos problemas.

Oito dos problemas selecionados conservaram exatamente dois dos critérios, sendo que os problemas P3, P4, P8, P9, P10, P12 e P14 não conservaram a correspondência semântica das unidades de significado (critério A), enquanto que o problema P6 não conservou a ordem que menciona o critério C. Esses oito problemas representam aproximadamente 53% do total analisado.

Os três problemas restantes, que representam 20% do total, não conservaram exatamente dois dos critérios considerados, sendo que os problemas P1 e P5 não conservaram a correspondência semântica entre as unidades de significado (critério A) e à ordem das unidades de significado (critério C), enquanto que o problema P7 não conservou a univocidade semântica terminal (critério B) e nem a ordem das unidades de significado (critério C). Ainda, conforme é possível inferir, não foi apresentado nenhum problema totalmente não-congruente à representação algébrica, isto é, problemas em que os três critérios considerados não foram conservados.

Além do olhar verticalizado sobre a Tabela 4, no qual nos permitiu fazer as inferências anteriores, podemos também analisa-la horizontalmente, de modo a observamos que a incidência da não conservação do critério referente à correspondência semântica das unidades de significado é de 60%, isto é, em nove dos quinze problemas (P1, P3, P4, P5, P8, P9, P10, P12 e P14) não se conservou o critério A. Analogamente, é possível verificar que apenas o problema P7 não conservou a univocidade semântica terminal (critério B), representando apenas aproximadamente 7% do total. A ordem das unidades de significado não foi conservada em quatro dos quinze problemas, aproximadamente 27%, sendo eles P1, P5, P6 e P7.

Portanto, por meio da análise realizada em cada um dos problemas em termos de congruência e da tabela síntese de tal análise (Tabela 4), consideramos respondida nossa primeira questão de investigação, a citar: *Quais dos três critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) são conservados em cada um dos problemas?* Do mesmo modo que as considerações quantitativas, destacando os percentuais, nos permite considerar a segunda questão – *Qual a incidência da não conservação para cada um dos critérios nos problemas selecionados?* – também respondida.

Uma vez obtida respostas para tais questões de investigação, buscamos elementos na teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2009, 2012a, 2012b), na análise feita em termos de congruência e em resultados de

pesquisas anteriores que nos permitiu discutir qualitativamente nossas questões de investigação

Os dados da Tabela 4 nos revelaram que aproximadamente 27% dos problemas analisados conservaram os três critérios, isto é, segundo Duval (2009, p.69) são congruentes. Dessa forma, ao direcionarmos nosso olhar para eles, verificamos que os problemas P2, P13 e P15 apresentam estrutura de problemas bastante similares, diferenciando-se substancialmente pelo contexto. Os três problemas podem ser resolvidos utilizando-se das mesmas estratégias, sendo elas por meio do conceito de fração ou pela estruturação de uma equação, conforme discutimos na seção anterior. Já o problema P11 apresenta uma situação comercial envolvendo a compra de um produto dada à entrada e a quantidade de prestações para o valor restante.

Dois fatores podem contribuir fortemente para o sucesso dos alunos na resolução desses problemas, sendo que o primeiro deles refere-se às experiências anteriores dos alunos com tais conteúdos. No 6º ano do Ensino Fundamental é dada bastante ênfase ao estudo das frações, bem como aos problemas envolvendo tal conceito, de modo que problemas similares à P2, P13 e P15 aparecem com razoável frequência. Além disso, ainda no 6º ano, os números decimais são objeto de estudo e nessa etapa figuram problemas análogos ao P11. Como os alunos idealmente já tiveram um primeiro contato com tais problemas, somos levados a crer que algumas dificuldades já tenham sido superadas e, pela familiaridade adquirida, tais problemas podem ser adequados para uma discussão inicial a respeito da utilização da Álgebra, por meio de equações. É claro que somente em uma situação real de sala de aula que, após avaliação diagnóstica do professor, poderá ser comprovada essa hipótese que apresentamos *a priori*.

O segundo fator que está fortemente ligado ao sucesso dos alunos nesses quatro problemas é justamente o fato desses problemas serem semanticamente congruentes, quando consideradas a representação em língua natural e representação algébrica, por meio das equações que foram destacadas anteriormente.

Os dados da Tabela 4 também apontaram oito problemas que não conservaram apenas um dos critérios de congruência. Desses, os problemas P3, P12 e P14 possuem números fracionários em suas representações; o problema P10 apresenta números no formato percentual; e os problemas P4, P8 e P9 apresentam apenas números inteiros positivos. Assim, como para todos esses sete problemas o critério da correspondência semântica das unidades de significado é que não foi conservado, o que determina o nível de dificuldade nesse ou naquele problema é, possivelmente, o conjunto onde estão inseridos os dados e o contexto em que se passa a situação.

O problema P8 que analisamos é um problema do tipo partilha, conforme categorizou Costa (2010) em seu trabalho, porém ele se difere dos problemas analisados por esse autor, pois no delineamento de sua pesquisa considerou os problemas de partilha no qual tem um desencadeamento tipo fonte, enquanto que o problema P8 tem desencadeamento do tipo composição. Nesse tipo de problema, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência. No problema P8, partindo da quantidade selos de Marcos obtemos a quantidade de selos de Lucas e, em a partir desse, obtemos a quantidade de selos de Samir.

Segundo as análises de Silva (2011), a leitura dos dados tratados no *software* CHIC indicaram que, em se tratando dos problemas de partilha com desencadeamento tipo fonte, “o único fator que parece interferir no emprego do registro algébrico na conversão dos problemas propostos é a correspondência semântica das unidades de significado” (SILVA, 2011, p.66). Assim, dada a similaridade entre os problemas tratados por esse autor e o problema P8, possivelmente há proximidade nos resultados, isto é, os alunos podem não recorrer ao registro algébrico para fazer tal problema, em princípio.

Igualmente, para os demais problemas que não conservaram a correspondência semântica das unidades de significado é necessário desenvolver investigações específicas sobre esses tipos de problemas, categorizando-os de forma similar ao que fizeram Costa (2010) e Silva (2011), para que seja possível verificar quais tipos de registros são mobilizados pelos alunos em função do critério

não conservado, bem como avaliar a taxa de sucesso na conversão, tanto para o registro algébrico quanto para os demais registros mobilizados.

Esse fato aponta para a necessidade de pesquisas futuras que ampliem o que fora discutido nos trabalhos levantados. Segundo o nosso levantamento, no cenário nacional há uma carência de pesquisas que contemplem tais indagações.

O problema P6 também não conservou apenas um dos critérios, sendo este o referente à ordem das unidades de significado. Esse, porém, é um problema que se distingue dos demais, uma vez que é o único problema que traz um contexto geométrico. Duval (2012a, p.124) destaca que ao construir uma figura, após leitura de um enunciado, os alunos apresentam a atitude de não retornar ao enunciado da questão. No entanto, ainda de acordo com esse autor, destacamos que pelo fato da Figura 13 se tratar de uma figura semanticamente congruente ao enunciado esse caminho é acessível aos alunos, de modo que a não interpretação discursiva da figura dificilmente implicará dificuldades nessa situação.

Os problemas P1 e P5 que conservaram apenas a univocidade semântica terminal, diferenciam-se de contexto, embora ambos trabalhem com números naturais. O problema P1 lança mão de conceitos relativos a números consecutivos enquanto que o problema P5 não necessita de um pré-requisito bastante específico como o conceito de consecutivo, porém um obstáculo a ser superado pelo aluno certamente será o jogo de palavras característico muitas vezes da língua natural.

O problema P7 não conservou os critérios B e C, sendo este o único a não conservar a univocidade semântica terminal, de acordo com nossa análise. Tal problema se assemelha em contexto com o problema P11, porém a forma com que os dados são dispostos influencia fortemente na conversão de registro. Inclusive o problema P11 é totalmente congruente, já P7 não. Assim, do que destacamos até o momento duas questões muito importantes emergem: (i) como decidir qual critério não conservado influencia mais na conversão de registros e quais os erros mais frequentes que se originariam em decorrência disso? (ii) Qual a influência do conjunto no qual os dados são retirados (natural, fracionário, percentual, decimal)?

Com o que temos de dados nesse trabalho não foi possível responder a tais questões, pois seria necessário elaborar problemas fixando algumas variáveis e alterando apenas os critérios conservados como fizeram Costa (2010) e Silva (2011) para os problemas de partilha, bem como elaborar problemas com os critérios elencados por Duval (2009) fixados e variar o contexto numérico. Após isso, a aplicação desses problemas de forma organizada e sistematizada pode apontar direções para as respostas a tais questões. Em suma, o que queremos dizer é que dada a não conservação dos mesmos critérios em diversos problemas aqui considerados, não temos elementos suficientes para afirmar que este ou aquele problema é mais custoso cognitivamente falando para o aluno responder.

Entretanto, a teoria dos Registros de Representação Semiótica nos fornece elementos para afirmar que “a dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada” (DUVAL, 2009, p.69). O autor da teoria em outro trabalho ainda destaca que:

O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado, e também de não ser efetuado ou entendido. (DUVAL, 2012b, p.105)

Do que foi destacado acima, inferimos que quanto mais critérios não são conservados na conversão entre o registro em língua natural e o registro algébrico, por meio de equações do 1º grau, maior é o custo cognitivo para fazer a conversão. E mais ainda, dependendo da situação, o aluno pode não conseguir fazer tal conversão de forma correta, isto é, não conseguir obter uma equação que seja referencialmente equivalente ao problema. Ocorre que o funcionamento natural do pensamento tende a seguir a congruência semântica entre enunciado em língua natural e representação algébrica e em matemática importa a equivalência referencial.

Duval (2009, p.69) referindo-se à conservação da ordem das unidades de significado destaca que “esse critério é, sobretudo, importante quando se trata de

comparar frases e fórmulas literais”. Isso permite nos dizer que uma atenção especial deve ser dada aos problemas P1, P5, P6 e P7 já que nenhum deles conservou tal critério. É frequente encontrarmos soluções incorretas contendo expressões literais seguindo a ordem do enunciado e não considerando a equivalência referencial. Sobre esse fato, consideremos trecho a seguir:

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica. (DUVAL, 2012b, p. 101)

Isso nos remete ao trabalho de Gil (2008a) que destacou o problema da interpretação ao se referir ao insucesso dos alunos ao converterem da língua natural para a linguagem algébrica. A não interpretação está ligada ao referido obstáculo acima e, como já havíamos nos posicionado, isso depende do grau de não congruência.

Então, no que tange aos problemas considerados nesse trabalho, poderíamos agrupá-los em três categorias: (1) os que conservam todos os critérios; (2) os que conservam dois critérios; (3) os que conservam apenas um critério. De acordo com essa categorização e em consonância com o que foi apontado pela teoria considerada, o custo cognitivo vai aumentando da direita pra esquerda à medida que temos mais critérios não conservados: (1) → (2) → (3).

Mas as duas outras questões mais específicas que se construíram durante a busca da resposta para o nosso terceiro questionamento nos limitam em afirmar exatamente quais tipos de registros serão mobilizados pelos alunos nos problemas do grupo (1), grupo (2) ou grupo (3) separadamente, bem como as dificuldades inerentes a conversão, em função dos critérios não conservados. Assim, como mencionado a pouco, pesquisas com esse delineamento contribuiriam para minimizar esse impasse.

Outro fato a ser considerado é que ao tratar do fenômeno da não congruência entre frase e fórmula, Duval (2012b, p.111-112) destaca que “toda fórmula que se organiza simetricamente por um lado e de outro lado por um símbolo de relação (ou de operação) central é melhor compreendida pelos alunos do que outros tipos de

fórmulas”. Esse fato pode contribuir para o aumento da chance de sucesso do aluno ao converter corretamente o problema P4.

Assim, consideramos que o que foi destacado nos permite considerar concluída a discussão qualitativa sobre as questões de investigação. Contudo, não foi possível apresentar exatamente quais são as dificuldades inerentes a cada tipo de problema, nem qual a tendência de mobilização correta do registro algébrico na totalidade dos problemas considerados, dada a variedade de tipos de questões apresentadas pelos autores do material.

Um ponto além da análise dos problemas que foram analisados necessita ser discutido ainda e para iniciar tal discussão, apresentamos o que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais, acerca das situações a serem propostas aos alunos no estudo da álgebra:

“[...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica”. (BRASIL, 1998, p. 116)

A respeito da proposição de situações-problema com essa natureza, acreditamos ser bastante importante levar em consideração o que apontou Duval (FREITAS; REZENDE, 2013, p.26) visando responder ao questionamento “Quais sugestões o Sr. daria para um professor de Matemática que desejasse utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica em suas aulas?”, em uma entrevista concedida a Revista Paranaense de Educação Matemática:

E o fato de propor os problemas a partir de situações concretas não ensina nem a resolver um problema nem a aplicar conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais fora da sala de aula. Porque, mesmo em sala de aula, nós sempre acabamos por explicar a solução de um problema, isto não prepara, de maneira alguma, os alunos para resolver outros problemas, mesmo aqueles que utilizam o mesmo conhecimento! Para entender como trabalhamos em matemática para resolver problemas e até mesmo para saber como utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais, é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações semióticas, por meio de mudanças de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro” (FREITAS; REZENDE, 2013, p.26-27).

Assim, é necessário mais que propor problemas contextualizados. É preciso levar em consideração a diversidade de registros, bem como a coordenação entre eles. Há ainda a necessidade didática de não sugerir a conversão para os alunos, fato que ocorreu frequentemente em sala de aula durante as observações que realizamos no estágio supervisionado na Educação Básica. Procedendo assim, a incompreensão dos alunos a respeito da conversão da língua natural para a algébrica permanecerá. É claro que, nos exemplos resolvidos pelo professor durante a explicação isso precisará ser feito, ao menos inicialmente.

Uma última consideração que temos a fazer é a respeito das situações apresentadas pelos autores do material para apresentar a solução de situações-problema por meio de equações do primeiro grau com uma incógnita. Na Figura 8, quando o autor apresenta a situação ele menciona que a personagem Carol foi seguindo todas as operações indicadas, de modo que como há conservação da ordem das unidades de significado, seguir a ordem da esquerda para a direita implicará em sucesso. O mesmo ocorre no primeiro problema resolvido apresentado na Figura 9, de modo que essa forma de apresentação contribui para o que os alunos façam a tradução da escrita natural para a escrita algébrica de modo mecânico, não compreendendo os procedimentos utilizados, reduzindo essa tarefa a uma mera tradução no sentido que se apresentam os dados. É preciso, portanto, atentar-se a esse fato ao apresentar tal tópico para os alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho tivemos por objetivo analisar quais critérios de congruência eram conservados em quinze problemas de primeiro grau apresentados no material didático utilizado na instituição de ensino onde lecionamos, quando considerada as representações em língua natural e algébrica por meio de equações do 1º grau, bem como tecer reflexões sobre a influência dos critérios não conservados nas possíveis dificuldades dos alunos.

Tendo em vista atingir tais objetivos, elencamos duas questões que nortearam o desenvolvimento dessa pesquisa: *Quais dos três critérios de congruência elencados por Duval (2009, p.68-69) são conservados em cada um dos problemas? Qual a incidência da não conservação para cada um dos critérios nos problemas selecionados?*

Tais questionamentos foram motivados pela dificuldade observada durante todo estágio supervisionado realizado, inclusive no Ensino Médio, bem como em pesquisas realizadas anteriormente, como o trabalho de Gil (2008a). De modo que pelos estudos realizados ao longo do curso de graduação, sobretudo nas atividades de pesquisa do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM), dessa instituição, as dificuldades estavam relacionadas com o fenômeno da não congruência.

Assim sendo, desenvolvemos uma pesquisa de cunho bibliográfica e documental, sendo que o estudo de trabalhos anteriores como Silva (2011) e Costa (2010), além da própria teoria dos Registros de Representação Semiótica constituíram a parte bibliográfica dessa pesquisa. Já a parte documental foi caracterizada pela análise de problemas selecionados de uma apostila utilizada no colégio onde lecionamos, tendo em vista a crença de que estes tipos de materiais influenciam significativamente na forma como os professores preparam suas aulas, levando em consideração Lajolo (1996).

A análise inicial desse material permitiu-nos delimitar os quinze problemas analisados em termos de congruências conforme nossos objetivos. As questões de investigação foram respondidas à medida que consideramos o que foi exposto na Tabela 4. Porém, as discussões qualitativas realizadas, mostrou-nos que as pesquisas selecionadas, embora contribuíssem para a compreensão de tais dificuldades, são bastante limitadas no sentido que restringem suas discussões a um tipo específico de problema de primeiro grau. Mesmo assim, pudemos discutir que as dificuldades dos alunos tendem a ser aumentadas à medida que se aumenta a quantidade de critérios não conservados na conversão da língua natural para a linguagem algébrica.

Assim, apontamos aqui a necessidade de ampliar as discussões a esse respeito, sendo que um possível direcionamento para pesquisas futuras é: (i) verificar quais tipos de problemas de 1º grau são privilegiados nos livros didáticos do 7º ou 8º ano do Ensino Fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), verificando quais são mais frequentes; (ii) De posse dos conhecimentos do direcionamento (i), investigar qual a influência do tipo de problema para cada um dos critérios de congruência conservado, bem como a influência dos critérios não conservados para cada um dos problemas; (iii) investigar em que medida a estrutura dos problemas baseados em fatores de congruência podem conduzir os alunos a determinados registros na resolução dos problemas de primeiro grau; (iii) considerar pesquisas que levem em consideração a formulação de problemas, que é tão importante, segundo Freitas e Rezende (2013, p.27), para a aprendizagem em matemática.

Portanto, destacamos que este trabalho contribuiu significativamente para o amadurecimento do autor enquanto professor de Matemática em processo de formação inicial, de forma que, conhecimentos aqui adquiridos contribuíssem para o estreitamento da distância entre as pesquisas acadêmicas e a escola básica. Contudo, os questionamentos que aqui ficam já apontam para a necessidade da continuidade e aprofundamento dos estudos a esse respeito no curso de mestrado e doutorado, caracterizando a formação continuada.

Sem mais, encerramos o relato desse trabalho com a sensação de ter contribuído, dentro dos limites da pesquisa, para as pesquisas em Educação Matemática, sobretudo para a formação inicial e continuada de professores de matemática, de forma a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática em nosso país.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática, 5ª a 8ª séries**. Brasília, 1998.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; FLORES, Claudia Regina; MORETTI, Méricles Tadeu. Registros de representações semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, Campinas, v.16, n.29, p.41 – 72, 2008.

COSTA, Wagner Rodrigues. Investigando a conversão da escrita natural para os registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau. 2010. 107f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels)**. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)**. Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)**. Florianópolis, v.7, n.1, p.97-117, 2012b.

FERREIRA, Fernanda Aparecida; SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos; CURTI, Edda. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, v.4, n.2, 14 p, 2013.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**. Campo Mourão, v.2, n.3, p.10-34), 2013.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra**. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Rio Grande do Sul: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2008a.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008b.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em aberto**: livro didático e qualidade de ensino. Brasília, ano 16, n.69, p.3-9, jan./mar. 1996.

MORETTI, Mércles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática. **Contrapontos**, ano 2, n.6, p.343-362, 2002.

SILVA, Marcelo Leonardo Leôncio da. Investigando estratégias mobilizadas pelos alunos no equacionamento de problemas de primeiro grau. 2011. 87f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.