



**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
INTRODUÇÃO À TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Daniel Carlos Magno

Sorocaba, 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
INTRODUÇÃO À TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Daniel Carlos Magno

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, sob a orientação da Prof^ª. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu.

Folha de aprovação

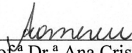
Daniel Carlos Magno

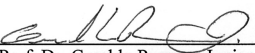
Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

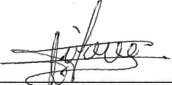
Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus Sorocaba*

Sorocaba, 16/08/2018.

Orientador 
Prof.ª Dr.ª Ana Cristina de Oliveira Mereu

Membro 2 
Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior

Membro 3 
Prof. Dr. Antonio Luis Venezuela

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a minha família. Meus pais, minha irmã e minha esposa. Só consegui chegar até aqui, concretizando este trabalho, pois em toda minha vida tive o apoio destas pessoas maravilhosas, que sempre me incentivaram a buscar o conhecimento, acreditando em meu potencial.

Agradeço também a Universidade Federal de São Carlos e ao Projeto de Licenciaturas Internacionais pela incrível oportunidade de realizar dupla graduação na Universidade de Coimbra. O período em que estive lá proporcionou uma aquisição de conhecimentos que nunca seria possível apenas com o curso de Licenciatura. Agradeço também aos meus amigos de Portugal que estiveram ao meu lado.

Por fim gostaria de agradecer a Prof^a. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu. Nos conhecemos logo no início da minha graduação, e desde lá sempre pude contar com seu apoio nas aulas, no projeto de intercâmbio, na iniciação científica e no trabalho de conclusão de curso.

Resumo

O presente trabalho foi desenvolvido a partir do estudo da Teoria de *Averaging* e sua aplicação para se determinar o número máximo de ciclos limites que bifurcam do centro planar perturbado por uma classe de sistemas diferenciais polinomiais.

Para realizar os estudos citados acima, primeiro será feita uma síntese sobre alguns temas dos aspectos gerais da teoria qualitativa das EDOs como aspectos qualitativos de equações diferenciais envolvendo sistemas lineares, Teorema de Existência e Unicidade de soluções, noções básicas de campos de vetores, Teorema do Fluxo Tubular, conjuntos limites das trajetórias, Teorema de Poincaré-Bendixson, entre outros. Ao finalizar este trabalho foi possível perceber a importância do estudo dos ciclos limites para a qualificação de sistemas diferenciais e suas aplicações.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Sistemas Dinâmicos; Ciclos Limites; Método *Averaging*.

Abstract

The present work was developed from the study of the *Averaging* Theory and its application for the determination of the maximum number of limit cycles that bifurcate from the planar center disturbed by a class of differential polynomials systems.

In order to carry out the above mentioned studies, we will first make a synthesis about some of the general aspects of the qualitative theory of ODEs, such as qualitative aspects of differential equations involving linear systems, Theorem of Existence and Uniqueness of solutions, basics of vector fields, Tubular Flow, limit cycle of trajectories, Poincaré-Bendixson Theorem, among others. At the end of this work it was possible to perceive the importance of the study of the limit cycles for the qualification of differential systems and their applications.

Keywords: Differential Equations; Dynamic Systems; Limit Cycle; *Averaging* Method.

Introdução

Ao estudar os sistemas diferenciais é comum nos voltarmos para problemas envolvendo soluções periódicas ou de equilíbrio, pois estas irão aparecer em várias aplicações de maneira prática. Ao desenvolver estas teorias é normal encontrarmos vários tipos de classificações e divisões dos sistemas diferenciais, de acordo com algumas características em comum que compartilham como sistemas Dinâmicos, Gradientes e Hamiltonianos.

Quando fazemos um estudo 'qualitativo' das equações diferenciais estamos nos voltando para o estudo de suas características básicas e como elas se comportam. Assim, determinamos a 'qualidade' de um sistema diferencial a partir da análise de seus pontos críticos, sua estabilidade, e suas soluções limitantes.

A motivação para buscar este tema foi devido ao fato de que, ao estudar em Portugal, foi possível ter contato com uma disciplina de equações diferenciais, porém, apenas em nível linear. Assim, devido ao número considerável de possíveis aplicações e ramos de estudos, este tema foi escolhido.

A primeira fase do trabalho, composta pelos capítulos 1, 2 e 3, consta de um estudo introdutório sobre os resultados básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias enfatizando os sistemas planares. Para isso se faz necessário um estudo de álgebra linear básica aplicado ao estudo dos sistemas de equações diferenciais lineares. São abordados os seguintes temas: Teorema de Existência e Unicidade de soluções, noções básicas de campos de vetores, os conjuntos limites das trajetórias, Teorema de Poincaré-Bendixson e a Aplicação de Primeiro retorno de Poincaré em sistemas planares. As principais referências para esta etapa do projeto são os livros de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974), PERKO (2006) e SOTOMAYOR (1979).

Em seguida, no capítulo 4, este trabalho será voltado para as soluções periódicas que são descritos por uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo comportamento é descrito por um sistema planar de equações diferenciais ordinárias (EDO's). Uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$, onde X é um conjunto arbitrário não-nulo, é periódica se $x(t+T) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e t é uma variável tempo. Entre as soluções periódicas, denominamos *ciclo limite* uma solução periódica isolada em uma determinada vizinhança.

A noção de ciclo limite surgiu pela primeira vez nos estudos de equações diferenciais no plano realizados por *Poincaré* entre os anos de 1880 e 1890. No final da década de 20 *Van der Pol*,

Lienard e Andronov, no estudo de certos fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites idealizados por Poincaré. Desde então a não existência, a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limites foram estudadas extensivamente por matemáticos, físicos, químicos, biólogos e economistas.

Em 1900, em Paris, durante o II Congresso Internacional de Matemáticos, o matemático *David Hilbert* elaborou uma lista com 23 temas de pesquisa para o próximo século. Nenhum dos problemas havia tido solução até então, e vários deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. Desta lista, dois problemas permanecem abertos. Sendo um deles a conjectura de Riemann e o outro o 16º *problema de Hilbert*.

Originalmente, Hilbert formulou seu 16º problema em duas partes. A primeira delas é de interesse da geometria e a segunda questiona sobre o número máximo e posição relativa de ciclos limite de sistemas polinomiais planares. Durante o século XX e estes primeiros 18 anos do século XXI a pesquisa sobre ciclos limite tem sido um dos grandes objetivos de *Teoria Qualitativa de Sistemas Dinâmicos*. Porém muitas perguntas continuam sem respostas.

Os problemas de Hilbert citados acima e os matemáticos que os resolveram podem ser encontrados no livro de Yandell (2003).

Devido a dificuldade de se resolver o 16º Problema de Hilbert como fora proposto, vários novos enunciados foram surgindo para o problema. Um exemplo é o estudo do número máximo de ciclos limite que bifurcam de um centro, conhecida como *versão fraca do 16º Problema de Hilbert*.

Um método para o estudo das órbitas periódicas é *Averaging*. De forma resumida, a Teoria de *Averaging* estabelece uma relação entre as soluções de um sistema diferencial não autônomo dependente de pequeno parâmetro, e as soluções de um novo sistema diferencial obtido, que é autônomo.

A segunda fase do trabalho é focado no Método de *Averaging*. Alguns modelos matemáticos envolvendo sistemas planares são selecionados e neles aplicados tal método. Aqui é utilizado como bibliografia básica o artigo de Llibre, Mereu e Teixeira (2010).

Assim, o objetivo geral deste TCC é realizar um estudo introdutório de sistemas dinâmicos principalmente no problema de encontrar ciclos limites em sistemas planares, através de estudos de resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais e do Método de *Averaging*, bem como a aplicação de tal conhecimento para o cálculo do número de ciclos limites que podem bifurcar de centros planares. Para atingir estes objetivos foram propostos outros objetivos ao autor:

- Aprender a fazer levantamento/pesquisa bibliográfica;
- Despertar o interesse pela matemática, principalmente no ramo de sistemas dinâmicos e, futuramente, desenvolver estes assuntos num curso de pós-graduação;
- Possibilitar ao aluno não só o preenchimento das lacunas em sua formação mas também aprimorar seu espírito crítico.

SUMÁRIO

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	v
Introdução	vi
1 Sistemas Lineares	1
1.1 Aspectos Gerais de Sistemas Planares	1
1.2 Retrato de Fase e Classificação de Sistemas Planares	6
1.3 Sistemas Lineares em Dimensões Maiores	17
2 Sistemas Não-Lineares	33
2.1 Aspectos Gerais de Sistemas Não-Lineares	33
2.2 Equilíbrio de Sistemas Não-Lineares	40
2.3 Técnicas Locais de Sistemas Não-Lineares	49
2.4 Técnicas Globais de Sistemas Não-Lineares	62
3 Aplicação do método de <i>Averaging</i> em Equações de Lienard	78
3.1 Lienard e Suas Implicações	78
3.2 Método de Averaging	81
Conclusão	85

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES

Uma breve introdução ao estudo de sistemas de equações diferenciais será dada neste início. As imagens utilizadas neste capítulo foram produzidas pelo próprio utilizando o aplicativo Mathematica, citado nas referências.

1.1 Aspectos Gerais de Sistemas Planares

Vamos começar os estudos com os sistemas de equações diferenciais dando algumas definições básicas.

Definição 1.1.1. *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que contém uma ou várias derivadas da função incógnita.*

Alguns exemplos de equação diferencial são:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \text{ oscilador harmônico}$$
$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \text{ pêndulo}$$

Seja Ω um subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde \mathbb{R} é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ é um espaço euclidiano de dimensão n . Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e I um intervalo real. A

função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ é uma solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

no intervalo I quando o conjunto $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Definição 1.1.2. Um sistema de equações diferenciais lineares é da forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.2)$$

onde f_j são funções lineares com $n + 1$ variáveis.

Para simplificar as notações iremos utilizar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

E assim iremos escrever o sistema de equações da forma matricial $X' = f(t, X)$ onde

$$f(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Aqui iremos tratar de sistemas *autônomos*, que são aqueles onde nenhuma das f_j dependem de t . Assim o sistema fica na forma $X' = f(X)$.

Sistema Planar

Ao longo deste capítulo iremos tratar de *equações diferenciais de segunda ordem*, que são aquelas da forma: $x'' = f(t, x, x')$. Podemos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$x' = y$$

$$y' = x''$$

e assim transformando-as em sistemas autônomos em \mathbb{R}^2 , na forma:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (1.3)$$

Considerando $X = (x, y)$ e $F = (f(X), g(X))$, podemos escrever o sistema (1.3) na forma $X'(t) = F(X(t))$. Vamos utilizar como exemplo o seguinte caso:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Neste exemplo é fácil visualizar que uma possível solução é:

$$x(t) = \sin t$$

$$y(t) = \cos t$$

Este sistema é equivalente à equação diferencial de segunda ordem $x'' = -x$. A forma geral de escrever uma equação diferencial de segunda ordem linear é:

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t).$$

Um caso especial é quando temos os coeficientes constantes, e assim

$$ax'' + bx' + cx = f(t) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + \frac{f(t)}{a}.$$

E um caso ainda mais especial é quando temos $f(t) = 0$, que damos o nome de *homogênea*.

Sistema Linear Planar

Agora iremos nos restringir a classe dos sistemas planares lineares. Os casos autônomos assumem a seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy. \end{cases} \quad (1.4)$$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Agora podemos escrever o sistema (1.4) na forma $X' = AX$.

Chamamos de *ponto de equilíbrio* as soluções $x(t)$ da equação (1.2) tais que $F(x(t)) = 0$.

Assim para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (1.4) fazemos $0 = AX$:

$$0 = ax + by$$

$$0 = cx + dy.$$

E assim temos:

Proposição 1.1.3. *Considere o sistema linear planar $X' = AX$.*

1. *Se $\det A \neq 0$, o sistema tem um único ponto de equilíbrio.*
2. *Se $\det A = 0$, o sistema possui uma linha reta de pontos de equilíbrios (e A não é a matriz nula).*

Agora passaremos a procurar as soluções do sistema que não são de equilíbrio. Para isso iremos recordar os conceitos de autovalor a autovetor.

Definição 1.1.4. *Um vetor V_0 não-nulo é chamado de autovetor de A se $AV_0 = \lambda V_0$, para algum valor de λ . E neste caso λ é chamado de autovalor.*

Teorema 1.1.5. *Suponha que V_0 é um autovetor da matriz A com autovalor associado λ . Então a função $X(t) = e^{\lambda t}V_0$ é uma solução do sistema $X'(t) = AX(t)$*

Demonstração: Temos:

$$X(t)' = (e^{\lambda t}V_0)' = \lambda e^{\lambda t}V_0 = e^{\lambda t}\lambda V_0 = e^{\lambda t}AV_0 = Ae^{\lambda t}V_0 = AX(t).$$

■

Solução Geral do Sistema Linear

Vimos que foi possível encontrar uma solução do sistema a partir do autovetor V_0 e do autovalor λ da matriz A . Assim, se A possuir dois autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ poderemos encontrar duas soluções. Mas como podemos encontrar uma solução geral do sistema?

Vamos supor que a matriz A possui dois autovetores V_1 e V_2 linearmente independentes.

Agora vamos supor que $Z(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$ ($X_1(t)$ e $X_2(t)$ são as soluções associadas aos autovetores citados anteriormente) é uma solução do sistema. Para confirmar fazemos:

$$Z(t)' = AZ(t)$$

$$Z(t)' = A(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t))$$

$$Z(t)' = \alpha AX_1(t) + \beta AX_2(t)$$

$$Z(t)' = \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t)$$

Logo, podemos concluir que $Z(t)$ é solução do sistema.

Teorema 1.1.6. *Supondo que A tem um par de autovetores V_1 e V_2 , e autovalores reais associados $\lambda_1 \neq \lambda_2$. A solução geral do sistema $X' = AX$ é dada por*

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} V_1 + \beta e^{\lambda_2 t} V_2.$$

Exemplo 1.1.1. Vamos encontrar a solução geral do sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Primeiro iremos encontrar os autovalores de A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Este polinômio obtido é chamado de *polinômio característico*. Igualando a zero obtemos os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para encontrar os autovetores faz-se:

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E assim encontramos:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim obtemos a solução geral do sistema:

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para encerrar este capítulo iremos apresentar o *Princípio da Linearidade*.

Teorema 1.1.7. *Considere o sistema planar $X' = AX$. Supondo que $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções do sistema e que $Y_1(0)$ e $Y_2(0)$ são linearmente independentes, então*

$$X(t) = \alpha Y_1(t) + \beta Y_2(t)$$

é a única solução do sistema que satisfaz $X(0) = \alpha Y_1(0) + \beta Y_2(0)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974).

1.2 Retrato de Fase e Classificação de Sistemas Planares

Agora iremos observar como se comportam os sistemas planares de acordo com a classificação de seus autovalores, e por consequência, iremos ver como são os *retratos de fase* de cada um.

Antes de começar a falar sobre os retratos de fase, temos que citar algo importante. Os exemplos que serão dados no decorrer deste capítulo são todos simples, para facilitar a compreensão dos conceitos. Usaremos as matrizes denominadas *canônicas*:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Deste modo é possível surgir a dúvida: Mas como tratar de um sistema que possui matrizes mais complexas? Basta que utilizemos *transformações lineares* para fazer com que o sistema dado passe a ser composto pelas *matrizes canônicas*.

Vale lembrar que uma transformação linear é uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Assim, iremos transformar um sistema $X' = AX$, que poderia ser mais complicado, em um outro da forma $Y' = (T^{-1}AT)Y$. Se $Y(t)$ é uma solução do do sistema obtido com a transformação, então $X(t) = TY(t)$ é uma solução do sistema original.

Para encontrarmos a matriz inversa T^{-1} vamos lembrar que uma matriz A é invertível se $\det A \neq 0$. Assim, considerando que $\det A \neq 0$ faz-se:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Agora a pergunta que fica é: Como encontrar a transformação linear T ? Na maioria dos casos utilizamos os autovetores da matriz A para compor as colunas da matriz T , como será mostrado ao longo deste relatório.

Para mais informações detalhadas sobre estas transformações lineares pode-se consultar os livros de HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974) e PERKO (2006).

Autovalores Reais Distintos

Considere um sistema $X' = AX$, onde A possui dois autovalores reais distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podemos ter 3 possíveis situações:

1. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
3. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Vamos mostrar os exemplos mais simples dos três casos, para que seja possível ver a diferença entre eles.

I^o) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Neste primeiro caso o exemplo mais simples seria:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X.$$

Como já foi visto anteriormente, para determinar a solução geral deste sistema primeiro encontramos o *polinômio característico* $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, resultando nos autovalores λ_1 e λ_2 . Posteriormente encontramos os autovetores correspondentes

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E assim, a solução geral do sistema seria:

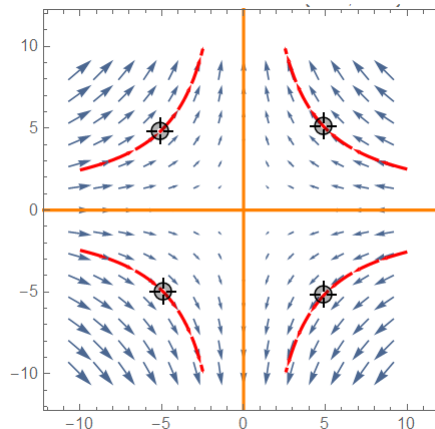
$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A partir do estudo das soluções de um sistema podemos montar um *retrato de fase* do mesmo.

O *retrato de fase* de um sistema é a representação de seu conjunto de soluções. Ao montar o retrato de fase, cada curva observada representa uma solução do mesmo.

Agora vamos analisar o *retrato de fase* do sistema deste primeiro caso. Para isso precisamos entender o comportamento das soluções. Temos que $V_1 = (1, 0)$, assim, as soluções referentes a este vetor formam uma linha reta no *eixo x*. Temos ainda que $\lambda_1 < 0$, assim as soluções irão tender para $(0, 0)$ quanto x tender para ∞ . Neste caso temos uma *linha estável*. Com relação ao outro vetor, $V_2 = (0, 1)$, temos uma linha reta no *eixo y*, e como $\lambda_2 > 0$, as soluções tendem para ∞ . Aqui temos uma *linha instável*. Todas as outras soluções do sistema irão seguir as orientações das soluções descritas acima. Assim, o *retrato de fase* pode ser observado na Figura 1.1.

Figura 1.1: Retrato de fase do sistema $x' = -x; y' = y$.



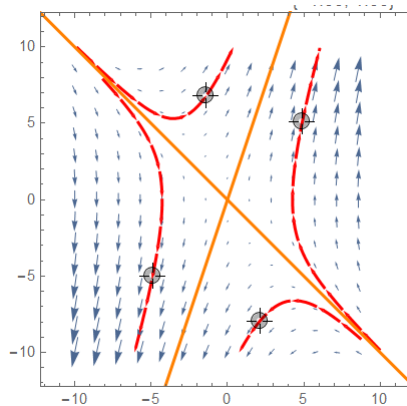
Neste caso o *ponto de equilíbrio* do sistema é chamado de *sela*. Note que a posição dos vetores V_1 e V_2 determina a orientação das soluções, assim como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.2.1. Considere o sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X.$$

Temos que $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -1$. O retrato de fase será similar ao caso anterior, mas orientado pelos autovetores $V_1 = (1, 3)$ e $V_2 = (-1, 1)$. Uma representação deste sistema pode ser vista na Figura 1.2.

Figura 1.2: Retrato de fase do sistema $x' = y; y' = 3x + 2y$.



2º) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Vamos utilizar o mesmo exemplo do item anterior

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X.$$

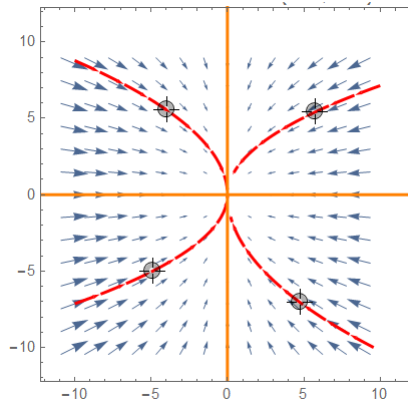
Como já vimos, a solução geral do sistema é

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos estudar o comportamento das soluções para determinar o retrato de fases. Os autovetores são os mesmos do primeiro caso, porém, os autovalores são ambos negativos, logo, quando $t \rightarrow \infty$ as soluções tendem para $(0, 0)$. Neste caso, sabemos que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, assim falamos que o autovalor λ_1 é o mais forte, pois a coordenada x das soluções irão tender para 0 mais rápido

do que as coordenadas y . Assim, no retrato de fase as soluções irão tender para 0 tangenciando a reta que corresponde ao autovalor mais fraco, neste caso, λ_2 . Podemos observar este retrato de fases na Figura 1.3. Neste caso o *ponto de equilíbrio* do sistema é chamado de *nó estável*.

Figura 1.3: Retrato de fase do sistema $x' = -2x; y' = -y$.



3º) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: Novamente utilizaremos o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} X.$$

Mas agora temos que os dois autovalores são positivos, e assim, ao contrário do 2º caso, as soluções irão se afastar do ponto de equilíbrio tendendo para ∞ . A orientação das soluções segue o mesmo raciocínio do item anterior, ou seja, tangenciando o eixo em que o autovalor é mais fraco. Podemos observar este retrato de fases na Figura 1.4. Neste terceiro caso chamamos o *ponto de equilíbrio* do sistema de *nó instável*.

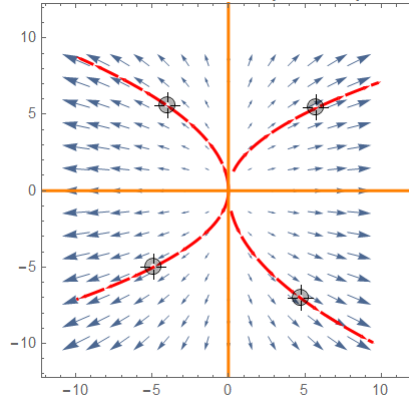
Autovalores Reais Iguais

Também podemos ter o caso onde a matriz A possui autovalores repetidos. Novamente vamos utilizar o caso mais simples:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X$$

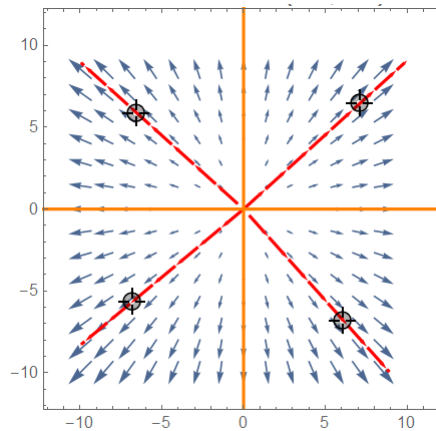
Aqui o polinômio característico seria $(\lambda_1 - \lambda)^2 = 0$, e assim o único autovalor seria λ . Mas ao tentar encontrar os autovetores é possível perceber que todo vetor não-nulo é um autovetor de A .

Figura 1.4: Retrato de fase do sistema $x' = 2x; y' = y$.



Logo, as soluções seriam linhas retas tendendo para $(0, 0)$ se $\lambda < 0$, e tendendo para ∞ se $\lambda > 0$. Aqui temos um ponto de equilíbrio chamado de *nó próprio*, e o retrato de fase do sistema seria como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.5: Retrato de fase do sistema $x' = 5x; y' = 5y$.



Um caso um pouco mais complicado é quando temos o seguinte sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X.$$

Agora o único autovetor possível é $v = (1, 0)$, e assim a solução seria uma única linha reta.

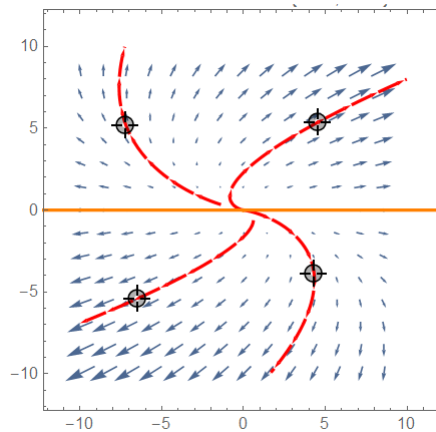
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrarmos mais soluções utilizamos a técnica chamada de *método dos coeficientes indeterminados*, que pode ser vista com mais detalhes no livro de Hirsh (1974), onde após analisar o sistema se chega a conclusão que a solução geral é da forma:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o ponto de equilíbrio é chamado de *nó impróprio*, e o retrato de fase do sistema é da forma como mostra a Figura 1.6.

Figura 1.6: Retrato de fase do sistema $x' = x + y; y' = y$.



Autovalores Complexos

No caso dos autovalores complexos, podemos dividir em dois grupos, de acordo com a organização do retrato de fase.

1º Caso: Quando temos um sistema da forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} X.$$

Aqui temos o polinômio característico $\lambda^2 + \beta^2 = 0$, e assim os autovalores são $\pm i\beta$. Ao fazermos o cálculo do autovetor relativo a $\lambda = i\beta$, encontramos $v = (1, i)$ e assim teríamos a solução da forma:

$$X(t) = \alpha e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Agora, como estamos trabalhando com um sistema de equações reais, não seria adequado termos uma solução complexa. Utilizamos a fórmula de Euler e fazemos:

$$e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t.$$

E agora nossa solução ficaria na forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t + i \cos \beta t \end{bmatrix}.$$

Separando os fatores reais e imaginários da nossa solução temos:

$$X(t) = X_{Re}(t) + iX_{Im}(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

E podemos verificar que $X_{Re}(t)$ e $X_{Im}(t)$ são ambas soluções do sistema original. Assim, ao fazer a combinação das 2 podemos encontrar a solução geral do sistema:

$$X(t) = k_1 X_{Re}(t) + k_2 X_{Im}(t).$$

Por fim, para construirmos o retrato de fase basta observar que as soluções são periódicas de período $2\pi/\beta$ e assim a representação é um círculo em torno da origem. Se o valor de β for positivo então a orientação das soluções é no sentido horário, se o valor de β for negativo então o sentido é anti-horário, assim como mostra a Figura 1.7. Neste caso o sistema é chamado de *centro*.

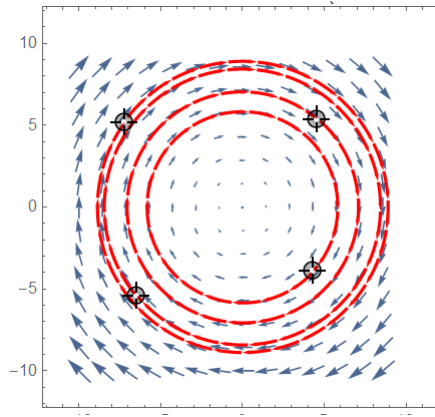
2º Caso: Quando temos um sistema da forma:

$$X' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} X.$$

Agora o polinômio característico é $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$ e os autovalores $\alpha \pm i\beta$. O autovetor associado a $\alpha + i\beta$ é novamente $v = (1, i)$. Assim, temos a solução:

$$X(t) = \alpha e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Figura 1.7: Retrato de fase do sistema $x' = 3y; y' = -3x$.



E assim como no caso anterior utilizamos a fórmula de Euler para obter as soluções reais, e agora adicionamos nas soluções $e^{\alpha t}$:

$$X(t) = e^{\alpha t} X_{Re}(t) + ie^{\alpha t} X_{Im}(t).$$

Chegando a solução geral da forma:

$$X(t) = k_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + k_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

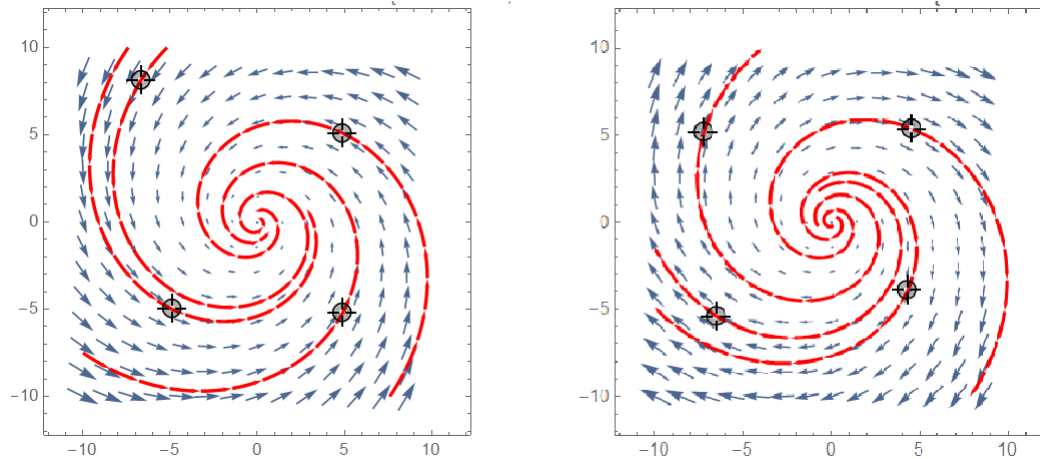
Para construir o retrato de fase devemos considerar a influência de $e^{\alpha t}$ nas soluções. Temos que quando $\alpha < 0$ o retrato de fase é composto de espirais tendendo para a origem, e quando $\alpha > 0$ elas irão se afastar da origem. Neste caso o *ponto equilíbrio* do sistema é chamado de *espiral estável* ou *espiral instável*, como podemos ver na Figura 1.8.

Plano Traço - Determinante e Classificação Dinâmica

Nesta parte do trabalho iremos apresentar dois tipos de classificação para os sistemas planares. Uma é o plano traço-determinante e a outra é dinâmica, envolvendo a noção de sistemas conjugados. Vamos considerar o sistema abaixo:

$$X' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X.$$

Figura 1.8: Retrato de fase dos sistemas: (a) $x' = -x + 3y; y' = -3x - y$ e (b) $x' = x + 3y; y' = -3x + y$.



O traço de A , $tr(A)$, é igual a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é, $a + d$. O determinante de A , $det(A)$, é dado por $ad - bc$. Ao calcularmos o polinômio característico de A temos:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0.$$

E assim, resolvendo a equação do segundo grau temos:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4 det(A)}].$$

Ao fazermos $\lambda_+ + \lambda_-$ percebemos que o resultado é igual ao traço de A , e $\lambda_+ \cdot \lambda_-$ é igual ao determinante de A . Assim é possível ver que os valores do traço e do determinante estão ligados a solução do polinômio característico, logo, estão ligados ao comportamento do sistema. Por exemplo, chamando $T = tr(A)$ e $D = det(A)$, com relação ao autovalores de A , temos:

1. $T^2 - 4D < 0$: Complexos com parte imaginária
2. $T^2 - 4D = 0$: Reais e iguais
3. $T^2 - 4D > 0$: Reais e distintos

Também podemos relacionar T e D com o comportamento do retrato de fase do sistema. Primeiramente vamos tomar o caso onde os autovalores são reais e distintos, $T^2 - 4D > 0$:

1. $D < 0$: Ponto de Sela

2. $D > 0, T < 0$: Nó estável

3. $D > 0, T > 0$: Nó instável

Se tivermos autovalores complexos com parte imaginária diferente de zero, $T^2 - 4D < 0$:

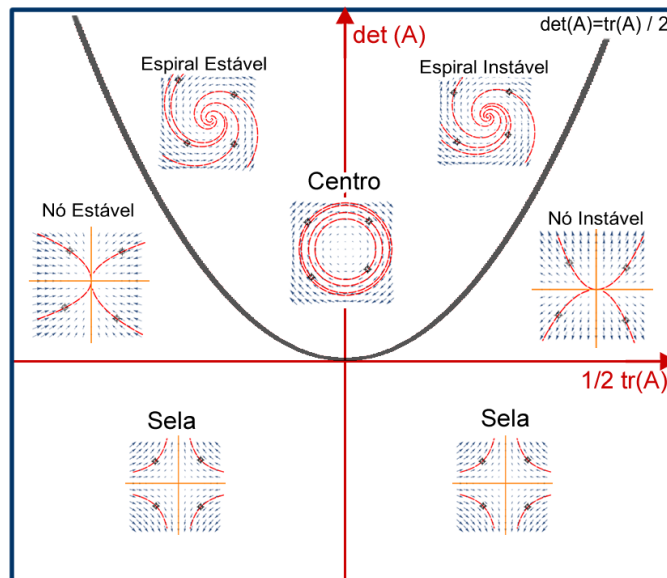
1. $T = 0 \Rightarrow$ Central

2. $T < 0 \Rightarrow$ Espiral estável

3. $T > 0 \Rightarrow$ Espiral instável

Agora vamos juntar todas essas informações de uma maneira geométrica. Para isso vamos construir um plano chamado Traço(x)-Determinante(y). Nele iremos inserir a parábola que representa $T^2 = 4D$, e assim, obtemos a Figura 1.9.

Figura 1.9: Representação do plano traço-determinante.



Portanto, é possível perceber que ao encontrar os valores de T e D podemos obter várias informações sobre o sistema, isso sem nem mesmo calcular seus autovalores e autovetores.

Agora vamos mostrar uma classificação de sistemas mais dinâmica, baseada no comportamento das soluções. Vamos considerar a solução $\phi_0(X_0)$ que satisfaz a condição inicial X_0 . Assim, $\phi_0(X_0) = X_0$. A função $\phi(t, X_0) = \phi_t(X_0)$ é chamada de *fluxo* da equação diferencial, enquanto que ϕ_t é *mapa de tempo t* ou *solução de tempo t* do fluxo.

Assim, teremos dois sistemas *dinamicamente equivalentes* quando existir uma função h que leva um fluxo a outro, e assim, a função h deve ser um *homeomorfismo*, ou seja, uma aplicação que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua.

Vamos supor que os sistemas $X' = AX$ e $X' = BX$ possuem fluxos ϕ^A e ϕ^B . Dizemos que os dois sistemas são *conjugados* se existir um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz:

$$\phi^B(t, (X_0)) = h(\phi^A(t, X_0)).$$

O homeomorfismo h é chamado de *conjugação*. Assim, a conjugação leva as soluções de $X' = AX$ para aquelas de $X' = BX$.

Agora a partir destas definições podemos criar uma nova maneira de classificar os sistemas. Vamos tratar dos casos onde os sistemas possuem matrizes na forma canônica, pois como vimos no capítulo anterior, podemos transformar um sistema mais complexo em um canônico.

Definição 1.2.1. *A matriz A é chamada hiperbólica se todos os seus autovalores possuem parte real diferente de zero. Também dizemos que o sistema é hiperbólico.*

Teorema 1.2.2. *Sejam A_1 e A_2 matrizes 2×2 hiperbólicas. Então os sistemas $X' = A_j X; j = 1, 2$, são conjugados se e somente se cada matriz tem o mesmo número de autovalores com parte real negativa.*

Assim, duas matrizes hiperbólicas produzem sistemas lineares conjugados se ambos os conjuntos de autovalores pertencem a mesma categoria abaixo:

1. *Um autovalor é negativo e o outro positivo;*
2. *Ambos autovalores possuem parte real positiva;*
3. *Ambos autovalores possuem parte real negativa.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974),

1.3 Sistemas Lineares em Dimensões Maiores

Nos itens anteriores estávamos tratando de sistemas lineares de ordem dois. Agora iremos passar a considerar sistemas com dimensões maiores. Vamos dividir os sistemas em três grupos,

um deles contendo autovalores reais distintos, outro contendo autovalores complexos e por fim um contendo os autovalores repetidos.

Autovalores Reais Distintos

Primeiro vamos considerar os sistemas que possuem n autovalores reais distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Já vimos que é possível fazer uma transformação linear para simplificar o sistema $X' = AX$ em um sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ da forma:

$$\begin{aligned}y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= \lambda_n y_n.\end{aligned}$$

Considerando uma condição inicial $Y(t) = (c_1, \dots, c_n)$, a solução do sistema que satisfaz esta condição inicial é:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Assim, como também já foi visto, a solução do sistema $X' = AX$ neste caso seria $X(t) = TY(t)$, e podemos escrever da forma:

$$\sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} V_j.$$

Agora vamos supor que os autovalores são negativos até uma certa ordem k ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$) e a partir desta ordem são todos positivos ($\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$). Assim, temos um sistema hiperbólico, onde todas as soluções que começam no subespaço gerado por V_1, \dots, V_k permanecem no mesmo. E também, cada solução tende para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Este subespaço é chamado de *subespaço estável*. Analogamente, o subespaço gerado por V_{k+1}, \dots, V_n contém as soluções que se afastam da origem, e é chamado de *subespaço instável*. Assim, podemos dizer que este sistema assume uma forma de *sela*, agora com maior dimensão.

Vamos dar um exemplo de dimensão 3:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} X.$$

Esta matriz possui três autovalores 2, 1 e -1 com autovetores associados (3,2,1), (1,0,0) e (0,1,2), respectivamente. Deste modo podemos simplificar o sistema utilizando a matriz dos autovetores:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que converte o sistema $X' = AX$ em:

$$Y' = (T^{-1}AT)Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y.$$

No qual é fácil encontrar a solução. E em seguida multiplicando a solução deste sistema $Y' = (T^{-1}AT)Y$ por T encontramos a solução geral do sistema $X' = AX$:

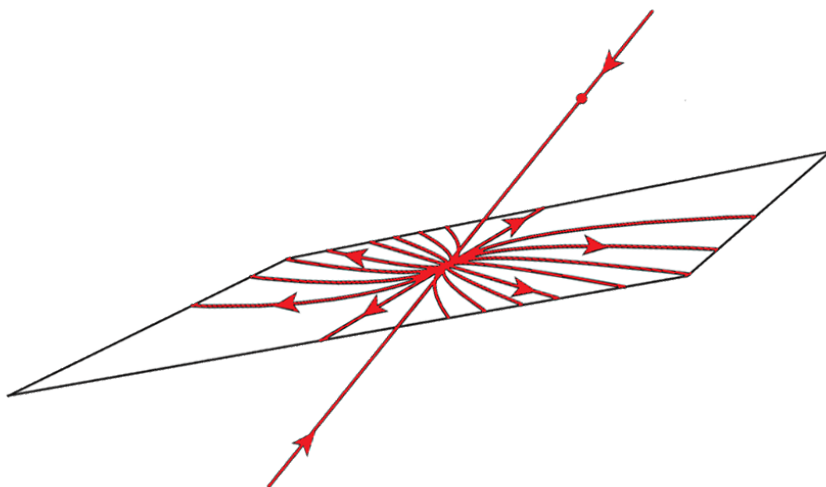
$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Considerando as informações dadas no começo desta seção, identificamos a parte *estável* como sendo aquela correspondente ao autovalor negativo $\lambda_3 = -1$, ou seja, o vetor (0,1,2). E a parte *instável* seria aquela correspondente aos autovalores positivos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, ou seja, o plano gerado pelos vetores (3, 2, 1) e (1, 0, 0). Este caso está representado na Figura 1.10.

Agora vamos considerar o caso onde a matriz A possui apenas autovalores negativos. Podemos utilizar uma transformação linear e obter:

$$Y' = (T^{-1}AT)Y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} Y,$$

Figura 1.10: Representação do retrato de fase sela em 3 dimensões, orientado pelos autovetores $(3, 2, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$.



onde $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$. Neste caso todas as soluções irão tender para a origem, e assim, temos uma representação de *Nó Estável* de maior dimensão. Na Figura 1.11 podemos ver um exemplo onde é dada a condição inicial (x_0, y_0, z_0) .

Autovalores Complexos

Também vamos considerar o caso onde a matriz A $n \times n$ possui k_1 autovalores reais e $2k_2$ autovalores complexos, onde $n = k_1 + 2k_2$. Assim, após fazermos a mudança de coordenadas, o sistema fica na forma:

$$x'_j = \lambda_j x_j,$$

$$u'_l = \alpha_l u_l + \beta_l v_l,$$

$$v'_l = -\beta_l u_l + \alpha_l v_l.$$

com $j = 1, \dots, k_1$ e $l = 1, \dots, k_2$. Neste caso as soluções são dadas por:

$$x_j = c_j e^{\lambda_j t},$$

$$u_l = p_l e^{\alpha_l t} \cos \beta_l t + q_l e^{\alpha_l t} \sin \beta_l t,$$

Então a solução geral do sistema $X' = AX$ é $TY(t)$, com:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_k e^{\lambda_{k_1} t} \\ a_1 e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen} \beta_1 t \\ -a_1 e^{\alpha_1 t} \operatorname{sen} \beta_1 t + b_1 e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t \\ \vdots \\ a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \cos \beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \operatorname{sen} \beta_{k_2} t \\ -a_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \operatorname{sen} \beta_{k_2} t + b_{k_2} e^{\alpha_{k_2} t} \cos \beta_{k_2} t \end{bmatrix}$$

As colunas da matriz T formam os autovetores correspondentes a cada autovalor. E assim como no caso anterior, os subespaços gerados pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real negativa são *estáveis*, e aqueles com parte real positiva são *instáveis*.

Agora vamos mostrar dois exemplos de como podem se comportar os sistemas que possuem autovalores complexos.

Exemplo 1.3.1. Primeiro consideraremos o sistema:

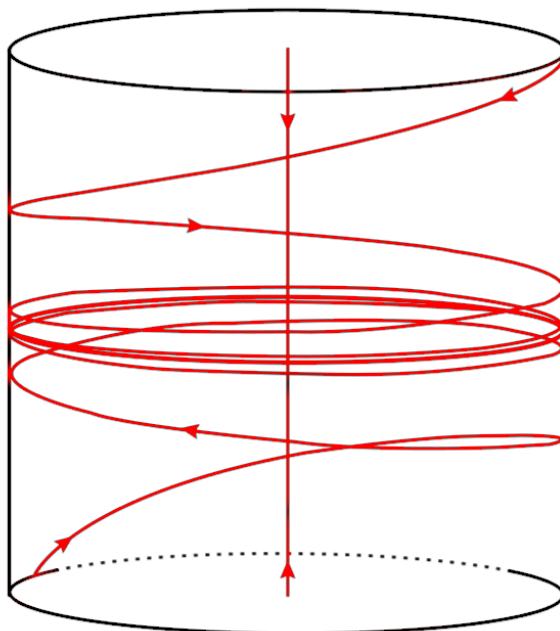
$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

A matriz já está na forma canônica. Seus autovalores são $\pm i$ e -1 . Se levarmos em conta uma condição inicial (x_0, y_0, z_0) , obtemos a solução geral do sistema:

$$X(t) = x_0 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + z_0 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aqui temos um caso onde a parte estável encontra-se ao longo do eixo z , enquanto que todas as soluções do plano xy viajam em círculos centrados na origem. Assim, é formado um cilindro em \mathbb{R}^3 , como mostra a Figura 1.12, e é conhecido como *central espiral*.

Figura 1.12: Representação do retrato de fase central espiral em 3 dimensões.



Exemplo 1.3.2. Agora vamos considerar o sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,0 & 1,0 \\ -1,0 & 1,0 & -1,1 \\ -1,0 & 0,0 & -0,1 \end{bmatrix} X.$$

Aqui para encontrar os autovalores utilizamos o polinômio característico

$$(1,00 - \lambda)(\lambda^2 + 0,02\lambda + 1,01) = 0.$$

E assim obtemos $\lambda = 1,0; -0,1 \pm i$. Resolvendo $(A - \lambda I)X = 0$ encontramos os autovetores $(0, 1, 0)$ e $(-i, 1, 1)$, onde parte real é $(0, 1, 1)$ e a parte imaginária é $(-1, 0, 0)$. Logo, a matriz T fica na forma:

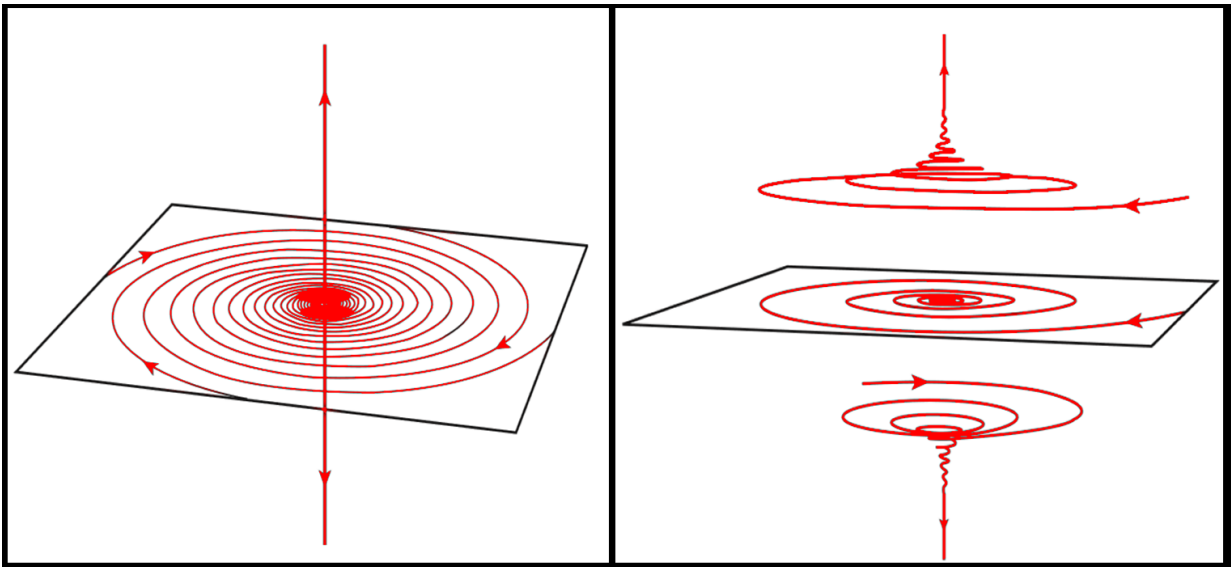
$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E o sistema $X' = AX$ fica na forma:

$$Y' = \begin{bmatrix} -0,1 & 1,0 & 0,0 \\ -1,0 & -0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} Y.$$

Podemos perceber que agora o sistema possui uma linha instável ao longo do eixo z , enquanto que o plano xy é estável. Neste caso as soluções formam uma espiral tendendo para zero no plano estável. Este sistema é chamado de *sela espiral*. As diversas soluções do sistema formam planos estáveis em forma de espirais em direção ao eixo z , conforme as coordenadas de z crescem ou decrescem, assim como está representado na Figura 1.13.

Figura 1.13: Representação das soluções de sela espiral em direção ao eixo z .



Autovalores Repetidos

No caso da matriz A possuir autovalores repetidos, a transformação linear nos apresenta matrizes que contém blocos da forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar o caso de uma matriz 3×3 com autovalor λ :

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} X$$

O único autovetor associado a λ é $(1, 0, 0)$. Note que a partir da linha três podemos concluir que

$$x_3(t) = c_3 e^{\lambda t}.$$

E assim na linha dois:

$$x_2' = \lambda x_2 + c_3 e^{\lambda t}$$

$$x_2(t) = c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}.$$

E por fim, na primeira linha:

$$x_1' = \lambda x_1 + c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t}$$

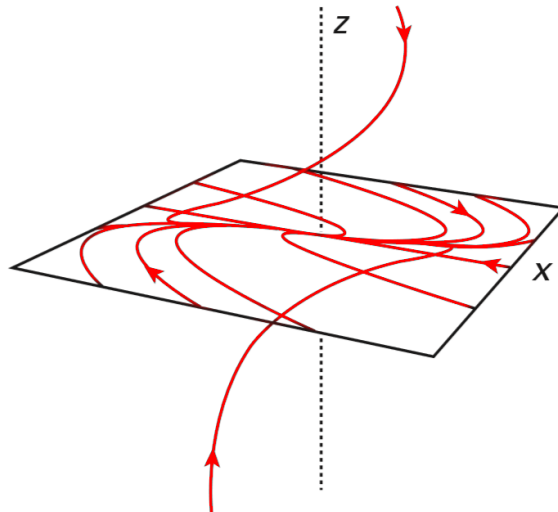
$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}.$$

Juntando as informações, obtemos a solução geral:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que quando $\lambda < 0$, devido aos termos exponenciais, todas as soluções tendem para zero. Este caso está ilustrado na Figura 1.14. Isso ocorre exatamente como vimos no sistema planar com autovalores repetidos.

Figura 1.14: Representação do retrato de fase com autovalores repetidos em 3 dimensões.



Definição de Matriz Exponencial

Vamos agora estudar um modo diferente de resolver sistemas lineares. Considere um sistema linear de primeira ordem, ou seja, do tipo:

$$x'(t) = ax(t)$$

Assim, a solução para esta equação pode ser obtida de maneira simples, sem utilizar autovalores e autovetores. Apenas utilizamos o exponencial de a e obtemos a solução $x(t) = c_1 e^{(at)}$, pois:

$$x'(t) = ac_1 e^{(at)} = ax(t).$$

Este método também funciona quando temos uma matriz A $n \times n$, porém, precisamos saber como encontrar a exponencial de uma matriz.

Vamos primeiro recordar que uma função exponencial pode ser descrita como uma série que converge para todo $x \in \mathbb{R}$, da forma:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Assim, podemos tentar o mesmo raciocínio para matrizes. Precisamos elevar até uma certa ordem k e em seguida multiplicar por $\frac{1}{k!}$.

Definição 1.3.2. Seja A uma matriz $n \times n$, a exponencial de A é definida como a matriz

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

É preciso ter sempre atenção sobre a convergência desta soma de matrizes. Dizemos que uma matriz exponencial converge se todos os seus elementos convergem. Vamos observar alguns exemplos:

Exemplo 1.3.3. Considere a matriz $A_{2 \times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Elevando A até uma certa ordem k temos:

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz exponencial será da forma:

$$e^A = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} \end{bmatrix}.$$

E por fim, as séries acima irão convergir para:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

O exemplo acima lembra o caso onde temos matrizes com autovalores reais distintos. Aqui foi relativamente simples elevar a matriz A até a ordem k .

Observe agora um exemplo mais complicado.

Exemplo 1.3.4. Considere a matriz $A_{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

É possível perceber que este exemplo lembra o caso onde temos matrizes com autovalores reais repetidos. Assim, iremos encontrar a forma exponencial da matriz tA , ao invés do exponencial da matriz A . Faz-se:

$$(tA)^k = \begin{bmatrix} (t\lambda)^k & kt^k(\lambda)^{k-1} \\ 0 & (t\lambda)^k \end{bmatrix}.$$

E em seguida temos a matriz exponencial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t\lambda^k}{k!} & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t\lambda^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t\lambda^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3.5. Considere a matriz $A_{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

sobre esta matriz temos que:

$$A^0 = I; A^1 = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = -\beta^2 I; A^3 = -\beta^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \beta^4 I; A^5 = \beta^5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

E assim por diante, até encontrarmos a matriz A elevada a uma certa ordem k :

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{2k!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{2k!} \end{bmatrix}.$$

Logo, encontrando a função que representa cada uma das séries temos:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Percebemos que este exemplo lembra o caso onde temos matrizes com autovalores complexos.

Propriedades de Matriz Exponencial

Vamos mostrar que as matrizes exponenciais possuem muitas propriedades semelhantes as funções exponenciais. A primeira proposição mostra algumas operações que podem ser feitas.

Proposição 1.3.3. *Considere as matrizes A , B e T , sendo elas $n \times n$. Então:*

1. Se $B = T^{-1}AT$, então $e^B = T^{-1}e^AT$
2. Se $AB=BA$, então $e^{A+B} = e^Ae^B$
3. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$

Demonstração: A prova da parte (1) vem das identidades $T^{-1}(A + B)T = T^{-1}AT + T^{-1}BT$ e $(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$. Portanto:

$$T^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) T = \sum_{k=0}^n \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!}.$$

Para provar (2) observe que, como $AB = BA$, nós temos pelo teorema binomial que:

$$(A + B)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!}.$$

Portanto devemos mostrar que

$$\sum_{j+k=n} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right).$$

Para provar esta igualdade iremos mostrar que as matrizes irão convergir uma para a outra. Considere as somas parciais:

$$\gamma_{2m} = \sum_{n=0}^{2m} \left(\sum_{j+k=n} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \right); \alpha_m = \left(\sum_{j=0}^m \frac{A^j}{j!} \right); \beta_m = \left(\sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!} \right).$$

Devemos mostrar que a subtração das matrizes $\gamma_{2m} - \alpha_m \beta_m$ converge para zero quando $m \rightarrow \infty$. Com esta finalidade vamos mostrar que $\|\gamma_{2m} - \alpha_m \beta_m\| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, onde $\|M\| = \max |m_{ij}|$. Chamando \sum_1 como a soma dos termos satisfazendo:

$$j + k \leq 2m, 0 \leq j \leq m, m + 1 \leq k \leq 2m.$$

Enquanto que \sum_2 é a soma dos termos satisfazendo:

$$j + k \leq 2m, m + 1 \leq j \leq 2m, 0 \leq k \leq m.$$

Podemos realizar um cálculo, visto com mais detalhes em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974), para mostrar que:

$$\gamma_{2m} - \alpha_m \beta_m = \sum_1 \frac{A^j B^k}{j! k!} + \sum_2 \frac{A^j B^k}{j! k!}.$$

Portanto temos:

$$\|\gamma_{2m} - \alpha_m \beta_m\| \leq \sum_1 \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \left\| \frac{B^k}{k!} \right\| + \sum_2 \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \left\| \frac{B^k}{k!} \right\|.$$

E assim:

$$\sum_1 \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \left\| \frac{B^k}{k!} \right\| \leq \left(\sum_{j=0}^m \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \right) \left(\sum_{k=m+1}^{2m} \left\| \frac{B^k}{k!} \right\| \right).$$

Este fator tende para zero quando $m \rightarrow \infty$, e como já sabemos:

$$\sum_{j=0}^m \left\| \frac{A^j}{j!} \right\| \leq e^{\|A\|} \leq \infty$$

Similarmente podemos encontrar que $\sum_2 \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Portanto, $\lim_{m \rightarrow \infty} (\gamma_{2m} - \alpha_m \beta_m) = 0$, provando a propriedade.

Por fim, observe que a afirmação (3) da proposição implica que e^A é invertível para cada matriz A . Isso é análogo ao fato de que $e^a \neq 0$ para todo número real a .

■

A próxima proposição é sobre a relação entre os autovetores da matriz A e os da matriz e^A .

Proposição 1.3.4. *Seja V um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ , com $V \in \mathbb{R}$. Assim, V também é um autovetor da matriz e^A , neste caso associado ao autovalor e^λ .*

Demonstração: Como $AV = \lambda V$, temos:

$$e^A V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k V}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} V \right) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \right) V = e^\lambda V.$$

■

Existe também uma proposição referente a derivada de uma matriz exponencial.

Proposição 1.3.5. *Considere a matriz A $n \times n$.*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Demonstração: Temos:

$$\begin{aligned} \frac{de^{tA}}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} (e^{hA} - I)}{h} &= e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right) = e^{tA} A. \end{aligned}$$

O fato de que o último limite é igual a A segue da definição de série de e^{hA} . Observe que A comuta com cada termo da série para e^{tA} , portanto com e^{tA} . Isso prova a proposição.

■

Agora vamos voltar a resolução de sistemas de equações diferenciais. A seguir temos o Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes.

Teorema 1.3.6. *Considere a matriz A $n \times n$. O problema de valor inicial $X' = AX$ com $X(0) = X_0$ possui uma única solução que é:*

$$X(t) = e^{tA} X_0$$

Demonstração: Pela propriedade anterior temos:

$$\frac{de^{tA} X_0}{dt} = e^{tA} A X_0.$$

Mais ainda, como $e^{0A}X_0 = X_0$, segue-se que esta é uma solução do problema de valor inicial. Para ver que não há outras soluções, seja $Y(t)$ uma outra solução que satisfaça $Y(0) = X_0$ e defina

$$Z(t) = e^{-tA}Y(t).$$

Então:

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \frac{de^{-tA}}{dt}Y(t) + e^{-tA}Y'(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow Z'(t) &= -Ae^{-tA}Y(t) + Ae^{-tA}Y(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow Z'(t) &= e^{-tA}Y(t)(-A + A) \Rightarrow \\ \Rightarrow Z'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto temos que $Z(t)$ é uma constante. Tomando $t = 0$ mostra que $Z(t) = X_0$, de modo que $Y(t) = e^{tA}X_0$. Isso completa a prova do teorema.

■

CAPÍTULO 2

SISTEMAS NÃO-LINEARES

Neste capítulo iremos começar os estudos sobre os sistemas não-lineares. Aqui iremos ver que, ao contrário dos sistemas lineares, nem sempre poderemos descrever as soluções do sistema. Algumas vezes poderemos ver que existem infinitas soluções, ou até mesmo casos onde o sistema não possui solução para um valor inicial. Assim, até mesmo propriedades básicas como existência e unicidade de soluções não podem ser provadas de maneira genérica. Assim, ao tratar de sistemas não-lineares veremos que as teorias e hipóteses serão um pouco mais complicadas. Deste modo, iremos mostrar neste capítulo como identificar os casos onde os sistemas se adequam as técnicas gerais das soluções de equações diferenciais, e também os casos onde essas técnicas falham.

2.1 Aspectos Gerais de Sistemas Não-Lineares

Como já foi dito, a maioria dos sistemas não-lineares não possuem uma solução analítica. E também, em alguns casos, sistemas com dimensões maiores possuem um comportamento totalmente caótico, e mesmo que pudéssemos encontrar uma solução particular, ela não seria suficiente para entendermos o comportamento deste sistema em larga escala. Assim, temos que procurar novas técnicas para entender estes sistemas. Vamos utilizar uma combinação de técnicas analíticas, geométricas e topológicas.

Sistemas Dinâmicos

Primeiramente vamos começar falando sobre os sistemas dinâmicos, que são maneiras de descrever a passagem de tempo ao longo de todos os pontos em um espaço S . Dado um valor inicial $X \in \mathbb{R}^n$, um sistema dinâmico irá nos dizer onde X estará depois de 1 unidade tempo, depois de 2 unidades de tempo, e assim por diante. O valor inicial no tempo zero é chamado de X_0 , seguido por X_1 . No geral, a trajetória de X é dada por X_t .

Temos três tipos principais de sistemas dinâmicos. Quando X_t é dado usando apenas números naturais, dizemos que o sistema é *discreto*. Se o sistema depender de t de uma maneira contínua, utilizando números reais então dizemos que o sistema é *contínuo*. E por fim, se além de contínuo também for diferenciável, dizemos que o sistema é *suave*.

A função que leva t à sua posição X_t é uma sequência de pontos ou uma curva em \mathbb{R}^n . De maneira formal temos:

Definição 2.1.1. *Um sistema dinâmico suave em \mathbb{R}^n é uma função contínua e diferenciável $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\phi : (t, X) = \phi_t(X)$ que satisfaz:*

1. $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função identidade: $\phi_0(X_0) = X_0$;
2. A função composta $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ é válida para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. Para a equação diferenciável de primeira ordem $x' = ax$, a função $\phi_t(X_0) = X_0 \cdot e^{(at)}$ é uma solução desta equação e também define um sistema dinâmico suave em \mathbb{R} .

De maneira geral, um sistema dinâmico suave sempre produz um campo de vetores em \mathbb{R}^n pela regra:

$$F(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(X),$$

onde ϕ_t é mapa no tempo t associado ao fluxo do sistema $X' = F(X)$.

Neste caso temos um sistema bem definido e contínuo ao longo do tempo. Porém, nem sempre iremos encontrar sistemas nesta forma.

Existência e Unicidade

Considere o sistema de equações $X' = F(X)$, onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma solução deste sistema seria uma função $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tal que para qualquer valor $t \in J$:

$$X'(t) = F(X(t))$$

Um problema comum em equações diferenciais é encontrar a solução para um problema de valor inicial, ou seja, determinar a solução do sistema que satisfaz a condição $X(t_0) = X_0$ para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$. (para simplificar normalmente usamos $t_0 = 0$). Como já foi dito anteriormente, nem sempre os sistemas não-lineares irão possuir uma solução que satisfaz uma certa condição inicial.

Exemplo 2.1.2. Considere o sistema simples de primeira ordem:

$$x' = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ -1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Este campo de vetores em \mathbb{R} é direcionado para a esquerda quando $x \geq 0$ e direcionado para a direita quando $x < 0$. Conseqüentemente, não existe solução que satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$, pois tal solução deveria inicialmente decrescer, pois $x'(0) = -1$, mas para todos os valores negativos de x , as soluções crescem. Isso não pode acontecer. O problema acontece pois o campo de vetores não é contínuo em zero. Sempre que este fato acontece podemos ter a possibilidade de que os vetores nesta vizinhança apontem para direções contrárias.

Além destes casos onde não existe uma solução para uma determinada condição inicial, também poderemos encontrar sistemas que possuem mais de uma solução para um mesmo problema de valor inicial.

Exemplo 2.1.3. Considere a equação diferencial $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$. A função nula $f(t) = 0$ é claramente uma solução para o problema de valor inicial $f(0) = 0$. Porém, uma outra função $f_1(t) = t^3$ também é uma solução satisfazendo a mesma condição inicial.

Observando estes dois casos anteriores fica claro que não podemos afirmar a existência e unicidade das soluções de maneira geral para os sistemas não-lineares. Podemos ver que no primeiro exemplo a função não era contínua em zero. Já no segundo, a função não era diferenciável em zero. Felizmente, as equações diferenciáveis que normalmente aparecem em aplicações são contínuas e diferenciáveis. Assim, levando em consideração estas restrições podemos enunciar o teorema:

Teorema 2.1.2. (Existência e Unicidade): Considere o problema de valor inicial $X' = F(x)$, com $X(t_0) = X_0$, onde $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Supondo que F é da classe C^1 , então existe uma solução para este problema de valor inicial, e esta solução é única. Mais precisamente, existe $a > 0$ e uma solução única:

$$X : (t_0 - a, t_0 + a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

satisfazendo a condição inicial $X(t_0) = X_0$.

A prova deste importante teorema pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974).

Assim, podemos ver que sempre é possível admitir a existência de uma solução única em um intervalo máximo. Porém, veremos que não existem garantias de que a solução estará definida para todo tempo, não importa o quão agradável $F(X)$ possa parecer.

Exemplo 2.1.4. Considere a equação diferencial em \mathbb{R} :

$$x' = 1 + x^2.$$

Essa equação tem como solução a função $x(t) = \tan(t + c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. É fácil de entender que esta solução não pode ser estendida para um intervalo maior do que:

$$-c - \frac{\pi}{2} < t < -c + \frac{\pi}{2}.$$

Isso por que a função $x(t) \rightarrow \pm\infty$ quando $t \rightarrow -c \pm \pi/2$.

Logo, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo aberto, e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Considere a solução $X(t)$ do sistema $X' = F(X)$, definida em um intervalo aberto máximo $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com $b < \infty$. Então, dado qualquer conjunto fechado e limitado $K \subset U$, existe um $t \in (a, b)$ tal que $X(t) \notin K$.

Este teorema nos diz que se uma solução não pode ser estendida a um intervalo de tempo maior, então esta solução deixa qualquer conjunto fechado e limitado em U . Isso implica que $X(t)$ deve chegar arbitrariamente perto do limite de U quando $t \rightarrow b$, assim como quando $t \rightarrow a$.

Dependência Contínua das Soluções

Agora iremos complementar o teorema de existência e unicidade com uma propriedade que descreve a dependência contínua da solução $X(t)$ com uma condição inicial $X(0)$.

Teorema 2.1.4. *Considere a equação diferencial $X' = F(X)$, onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Supondo que $X(t)$ é uma solução desta equação definida em um intervalo fechado $[t_0, t_1]$ com $X(t_0) = X_0$. Existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de X_0 e uma constante K , tal que, se $Y_0 \in U$, então existe uma solução única $Y(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ com $Y(t_0) = Y_0$. Além disso, para todo $t \in [t_0, t_1]$, $Y(t)$ satisfaz:*

$$|Y(t) - X(t)| \leq K|Y_0 - X_0|e^{K(t-t_0)}.$$

Este resultado nos diz que soluções $X(t)$ e $Y(t)$ que começam juntas, permanecem juntas para um t próximo a t_0 . Enquanto que, se estas soluções se separarem, elas não irão fazê-lo com um parâmetro mais rápido do que exponencialmente. Podemos também chegar a mais uma conclusão.

Corolário 2.1.5. (Dependência contínua em Condições Iniciais): *Seja $\phi(t, X)$ o fluxo do sistema $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Então ϕ é uma função contínua de X .*

Não é raro encontrarmos equações diferenciais que dependem de parâmetros. A pergunta que fazemos é: como as soluções desta equação irão depender deste parâmetro? Como no caso anterior, as soluções irão depender continuamente desses parâmetros, desde que o sistema dependa dos parâmetros de uma forma contínua e diferenciável.

Teorema 2.1.6. (Dependência Contínua em Parâmetros): *Seja $X' = F_a(X)$ um sistema de equações diferenciais, no qual F_a é continuamente diferenciável em ambos X e a . Então o fluxo deste sistema também depende continuamente de a .*

Equação Variacional e Linearização

Considere o sistema autônomo $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Se $\phi(t, X)$ é o fluxo deste sistema, nós já vimos que ϕ é contínua na variável X . Agora, no próximo teorema que será enunciado, poderemos ver que ϕ é contínua e diferenciável em ambos t e X :

Teorema 2.1.7. (Suavidade do Fluxo): Considere o sistema $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Então o fluxo $\phi(t, X)$ deste sistema também é de classe C^1 , ou seja, as derivadas parciais $\partial\phi/\partial t$ e $\partial\phi/\partial X$ existem e são contínuas.

É possível ver que podemos calcular $\partial\phi/\partial t$ para qualquer valor de t , contanto que saibamos a solução X_0 , onde temos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, X_0) = F(\phi(t, X_0)),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X}(t, X_0) = D\phi_t(X_0),$$

onde $D\phi_t$ é a jacobiana da função $X \rightarrow \phi_t(X)$. Para encontrar o valor de $\partial\phi/\partial X$ também precisaremos conhecer as soluções próximas ao ponto inicial, visto que precisaremos calcular as derivadas parciais dos vários componente de ϕ_t . Podemos contornar esta pequena dificuldade introduzindo a equação variacional ao longo da solução através de X_0 .

Considere o sistema $X' = F(X)$. Seja $X(t)$ uma solução particular do sistema definida para t em um intervalo $J = [a, b]$. Fixando $t_0 \in J$ e definindo $X(t_0) = X_0$, para todo $t \in J$ fazemos:

$$A(t) = DF_{X(t)},$$

onde $DF_{X(t)}$ é a matriz jacobiana de F no ponto $X(t)$. Como F é de classe C^1 , $A(t)$ é uma família contínua de matrizes $n \times n$.

Considere a equação linear não-autônoma $U' = A(t)U$. Ela é conhecida como a *equação variacional* ao longo da solução $X(t)$. Para garantir que esta equação possua uma solução definida em todo J , para cada solução inicial $U(t_0) = U_0$ temos:

Teorema 2.1.8. *Seja $A(t)$ uma família de matrizes $n \times n$ contínuas, definidas para todo $t \in [a, b]$. Então o problema de valor inicial:*

$$X' = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0$$

possui uma solução única que está definida em todo o intervalo $[a, b]$.

Voltando para a equação variacional, sabendo que ela possui uma solução definida em todo intervalo J , se $U(t)$ é uma solução que satisfaz $U(t_0) = U_0$ então a função

$$t \rightarrow X(t) + U(t)$$

é uma boa aproximação para a função $Y(t)$ da equação autônoma com valor inicial $Y(t_0) = X_0 + U_0$, desde que U_0 seja suficientemente pequeno.

Assim, dado um sistema qualquer $X' = F(X)$, com um ponto de equilíbrio em X_0 , consideramos a equação variacional ao longo desta solução, $U' = AU$, com $A = DF_{X_0}$, sendo um sistema linear autônomo. Este sistema é chamado de *Sistema Linearizado* em X_0 . Ao redor de um ponto de equilíbrio do sistema não-linear, o retrato de fase se assemelha ao do sistema linearizado correspondente.

Agora, utilizando os resultados acima, podemos enfim calcular com certeza o valor de $\partial\phi/\partial X$.

Teorema 2.1.9. *Considere o sistema de equações diferenciais $X' = F(X)$, onde F é de classe C^1 . Seja $X(t)$ uma solução deste sistema que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_0$, definido para todo $t \in [a, b]$. Seja $U(t, U_0)$ a solução da equação variacional ao longo de $X(t)$ que satisfaz $U(0, U_0) = U_0$. Então:*

$$D\phi_t(X_0)U_0 = U(t, U_0).$$

Demonstração: Para provar este teorema precisamos antes enunciar uma proposição que nos diz:

1. $X(t)$ é uma solução do sistema $X' = F(X)$, com F de classe C^1 , onde $X(t)$ está definida para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e também $X(t_0) = X_0$;
2. $U(t)$ é a solução da equação variacional ao longo de $X(t)$ que satisfaz $U(t_0) = U_0$;
3. $Y(t)$ é a solução do sistema que satisfaz $Y_0 = X_0 + U_0$. Então o limite:

$$\lim_{U_0 \rightarrow 0} \frac{|Y(t) - (X(t) + U(t))|}{|U_0|}$$

converge para 0 uniformemente em $t \in [\alpha, \beta]$.

Assim, para todo $t \in [\alpha, \beta]$ fazemos:

$$D\phi_t(X_0)U_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_t(X_0 + hU_0) - \phi_t X_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(t, hU_0)}{h} = U(t, U_0)$$

■

Resumindo, temos que $\partial\phi/\partial X$ aplicada a U_0 é dada resolvendo a equação variacional correspondente começando em U_0 .

2.2 Equilíbrio de Sistemas Não-Lineares

Como já vimos, nem sempre é possível encontrar soluções para os sistemas não-lineares. Porém, temos uma exceção quando tratamos de soluções de equilíbrio. Desde que possamos resolver as equações algébricas, podemos encontrar os pontos de equilíbrio. Como já trabalhamos anteriormente com sistemas lineares, aqui, podemos utilizar as técnicas de linearização para estudar o comportamento das soluções próximas. Em muitos casos as soluções de equilíbrio são as mais importantes de um sistema.

Ao tratar das soluções de equilíbrio temos duas situações possíveis. Quando temos um sistema linearizado hiperbólico, seu retrato de fase irá se assemelhar ao do sistema não-linear correspondente. Porém, quando o sistema não é hiperbólico, os retratos de fase irão apresentar uma grande diferença.

Nós Estáveis e Instáveis Não-Lineares

Levando em consideração o que foi dito anteriormente, aqui iremos trabalhar com os sistemas que possuem uma linearização hiperbólica, ou seja, sistemas que possuem todos os autovalores com parte real não-nula. Vamos começar descrevendo o comportamento dos sistemas que apresentam Nós. Para facilitar, iremos utilizar os resultados abaixo em casos planares, porém, eles também serão válidos em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.2.1. Linearização: *Suponha que o sistema n -dimensional $X' = F(X)$ tenha um ponto de equilíbrio em X_0 que seja hiperbólico. Então o fluxo não-linear é conjugado ao fluxo do sistema linearizado em uma vizinhança de X_0*

Não vamos provar este teorema aqui, já que a prova requer técnicas analíticas além do que estudamos neste relatório, quando existem autovalores presentes tanto em partes reais positivas quanto negativas.

Para visualizar melhor, considere o sistema não-linear $X' = F(X)$ e suponha que $F(X_0) = 0$. Assim, $DF(X_0)$ denota a matriz Jacobiana de F calculada no ponto X_0 . Temos então o sistema linearizado próximo a X_0 da forma:

$$Y' = DF(X_0)Y.$$

Agora vamos nos restringir aos casos onde o equilíbrio do sistema planar linearizado possui um nó em zero. Suponha que nosso sistema seja:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

onde $f(x_0, y_0) = 0 = g(x_0, y_0)$. Podemos fazer uma mudança de coordenadas $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$, e assim o novo sistema possui um ponto de equilíbrio em $(0,0)$. Podemos também supor que $x_0 = y_0 = 0$ no início. Em seguida fazemos uma outra mudança de coordenadas que coloca o sistema linearizado na forma canônica. Vamos assumir que neste caso o sistema linearizado possui autovalores distintos $-\lambda < -\mu < 0$. Assim, após essas mudanças, nosso sistema fica na forma:

$$x' = -\lambda x + h_1(x, y)$$

$$y' = -\mu y + h_2(x, y),$$

onde as funções $h_j(x, y)$, $J = 1, 2$, contém todos os termos de ordem superior, isto é, em termos de sua expansão de Taylor, cada h_j contém termos que são de ordem quadrada ou superior em x e/ou y . Equivalentemente, utilizando $r^2 = x^2 + y^2$ temos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h_j(x, y)}{r} = 0.$$

E agora o sistema linearizado fica na forma:

$$x' = \begin{cases} x' = -\lambda x \\ y' = -\mu y. \end{cases}$$

Neste sistema linearizado, podemos recordar que o campo vetorial sempre aponta para dentro do círculo de raio r , centralizado na origem. O mesmo irá acontecer com o sistema não-linear, pelo menos próximo a origem. O campo vetorial não-linear aponta para o interior dos círculos de raio pequeno em torno de 0, e assim todas as soluções cujas condições iniciais estão dentro desses círculos devem tender para a origem. Assim, podemos chamar esse tipo de ponto de equilíbrio de Nó, exatamente como no caso linear.

Selas Não-Lineares

Agora vamos nos voltar para o caso de um equilíbrio onde o sistema linearizado possui uma sela na origem em \mathbb{R}^2 . Como já fizemos no caso anterior, podemos utilizar algumas mudanças de coordenadas e deixar o sistema na forma:

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + h_1(x, y) \\ y' = -\mu y + h_2(x, y) \end{cases}$$

Mas aqui, temos que os autovalores são $-\mu < 0 < \lambda$.

No sistema linearizado, o eixo y serve como linha estável, com todas as soluções tendendo a 0 quando $t \rightarrow \infty$. Da mesma forma, o eixo x é a linha instável. Porém, para o sistema não-linear não podemos esperar que essas linhas retas estáveis e instáveis continuem da mesma forma. No entanto, existe um par de curvas na origem que possuem propriedades semelhantes.

Seja $W_S(0)$ o conjunto de condições iniciais cujas soluções tendem à origem quando $t \rightarrow \infty$. Seja $W_U(0)$ o conjunto de condições iniciais cujas soluções tendem à origem quando $t \rightarrow -\infty$. $W_S(0)$ e $W_U(0)$ são chamados de curva estável e curva instável, respectivamente.

Teorema 2.2.2. Curva Estável: *Suponha que o sistema:*

$$\begin{cases} x' = -\lambda x + h_1(x, y) \\ y' = -\mu y + h_2(x, y) \end{cases}$$

satisfaz as condições $-\mu < 0 < \lambda$ e $h_j(x, y)/r \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Então existe um ϵ e uma curva $x = h_s(y)$ que está definida para $|y| < \epsilon$ e satisfaz $h_s(0) = 0$. Além disso:

- 1. Todas as soluções cujas condições iniciais se encontram nesta curva permanecem nesta curva para todo $t \geq 0$ e tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$;*
- 2. A curva $x = h^s(y)$ passa pela origem tangente ao eixo y ;*
- 3. Todas as outras soluções cujas condições iniciais estão no disco de raio ϵ centradas na origem, deixam este disco à medida que o tempo aumenta.*

Como a demonstração deste teorema é um pouco extensa ela não será abordada aqui, mas pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974).

Este teorema nos mostra que soluções próximas a selas não-lineares se comportam da mesma maneira que no caso linear. Podemos fazer algumas observações. A curva $x = h^s(y)$ é chamada

de *curva estável local*. Podemos encontrar a curva estável completa $W^S(0)$ seguindo as soluções que estão na curva estável local para em sentido contrário ao tempo. A função $x = h^s(y)$ é de classe C^∞ em todos os pontos.

Um teorema parecido, nos dá as curvas instáveis locais da forma $y = h^u(x)$. Esta curva é tangente ao eixo x na origem. Todas as soluções nesta curva tendem para a origem quando $t \rightarrow -\infty$.

Vamos encerrar esta seção com uma breve discussão a respeito das selas em dimensões maiores. Considere o sistema $X' = F(X)$ com $X \in \mathbb{R}^n$. Suponha que X_0 é uma solução de equilíbrio, na qual o sistema linearizado possui k autovalores com a parte real negativa e $n - k$ autovalores com a parte real positiva. Então, os conjuntos locais estáveis e instáveis não são exatamente curvas. Pelo contrário, eles são 'subvariedades' de dimensões k e $n - k$, respectivamente. Sem entrar no reino da teoria de variedades, simplesmente notamos que isso significa que há uma mudança linear de coordenadas na qual o conjunto estável local é dado próximo à origem pelo gráfico de uma função $g : B_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^∞ que satisfaz $g(0) = 0$, e todas as derivadas parciais de g desaparecem na origem. Aqui, B_r é o disco de raio r centrado na origem em \mathbb{R}^k . O conjunto instável local é um gráfico semelhante, sobre um disco de dimensão $n - k$. Cada um desses gráficos é tangente aos subespaços estáveis e instáveis no ponto de equilíbrio em X_0 . Por isso, eles se encontram apenas em X_0 .

Estabilidade

O estudo dos pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais possui um papel fundamental. Para que um ponto de equilíbrio possa ter um papel significativo ele precisa satisfazer certos critérios de estabilidade.

Um ponto de equilíbrio de um sistema é chamado de estável se as soluções ao seu redor se mantém próximas para todo o tempo. No estudo dos sistemas dinâmicos, por exemplo, não é possível denotar com certeza as posições, e assim, um ponto de equilíbrio precisa ser estável para ser fisicamente significativo.

Para entendermos de maneira mais precisa, considere a equação diferencial $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio $X^* \in \mathbb{R}^n$. Então, X^* é um *equilíbrio estável* se, para cada vizinhança Ω de X^* em \mathbb{R}^n existe uma outra vizinhança Ω_1 de X^* em Ω , tal que toda solução $X(t)$ com $X(0) = X_0$

em Ω_1 está definida e permanece em Ω para $t > 0$.

Uma forma diferente de estabilidade é a estabilidade assintótica. Se Ω_1 pode ser escolhido de modo que, além das propriedades para estabilidade, tenhamos $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$, então dizemos que X^* é *assintoticamente estável*.

Se um ponto de equilíbrio não condiz com as restrições citadas anteriormente, então ele é chamado de *instável*.

Um Nó Estável é um exemplo assintoticamente estável, já uma Sela é instável. Um ponto de equilíbrio que é estável, porém não assintoticamente, seria a origem em \mathbb{R}^2 para uma equação linear $X' = AX$, onde A possui autovalores imaginários puros. Porém, a importância de sistemas como este é limitada, visto que, qualquer perturbação não-linear, por mais pequena que seja, pode alterar completamente o comportamento das soluções.

Quando tratamos de um sistema linearizado, se este for hiperbólico, podemos determinar imediatamente a sua estabilidade. Entretanto, muitos pontos de equilíbrio que encontramos em aplicações importantes possuem um caráter não-hiperbólico. Assim, para determinar a estabilidade destes pontos teríamos que calcular todas as soluções do sistema, o que pode não ser tão fácil, ou até mesmo possível.

Bifurcações

Agora vamos descrever alguns exemplos simples de bifurcações que ocorrem em sistemas não-lineares. Vamos considerar a família de sistemas

$$X' = F_a(X)$$

onde a é um parâmetro real. Uma bifurcação ocorre quando a variação do parâmetro a gera uma mudança significativa na estrutura das soluções do sistema. Os tipos mais simples de bifurcações são aquelas que ocorrem quando a variação do parâmetro altera o número de pontos de equilíbrio.

Teorema 2.2.3. Bifurcação Nó-Sela: *Suponha que $x' = f_a(x)$ seja uma equação diferencial de primeira ordem na qual:*

1. $f_{a_0}(x_0) = 0$;
2. $f'_{a_0}(x_0) = 0$;
3. $f''_{a_0}(x_0) \neq 0$;

$$4. \frac{\partial f_{a_0}}{\partial a}(x_0) \neq 0.$$

Então esta equação diferencial possui uma bifurcação nó-sela em $a = a_0$

Demonstração: Seja $G(x, a) = f_a(x)$. Temos que $G(x_0, a_0) = 0$. E também:

$$\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0) = \frac{\partial f_{a_0}}{\partial a}(x_0) \neq 0,$$

então podemos aplicar o teorema da função implícita, detalhado em PERKO (2006), para concluir que existe uma função suave $a = a(x)$ tal que $G(x, a(x)) = 0$. Em particular, se x^* pertence ao domínio de $a(x)$, então x^* é um ponto de equilíbrio para a equação $x' = f_{a(x^*)}(x)$, uma vez que $f_{a(x^*)}(x^*) = 0$. Diferenciando $G(x, a(x)) = 0$ com em relação a x , encontramos

$$a'(x) = \frac{-\partial G/\partial x}{\partial G/\partial a}.$$

Agora $(\partial G/\partial x)(x_0, a_0) = f'_{a_0}(x_0) = 0$, enquanto $(\partial G/\partial a)(x_0, a_0) \neq 0$ por suposição. Daí um $a'(x_0) = 0$. Diferenciando mais uma vez, encontramos

$$a''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \frac{\partial G}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 G}{\partial a^2}}{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)^2}.$$

Como $(\partial G/\partial x)(x_0, a_0) = 0$, temos:

$$a''(x) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, a_0)}{\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0)} \neq 0$$

pois $(\partial^2 G/\partial^2 x)(x_0, a_0) = f''_{a_0}(x_0) \neq 0$. Isto implica que o gráfico de $a = a(x)$ é côncavo para cima ou côncavo para baixo, então temos dois equilíbrios próximos a x_0 para valores de a em um lado de a_0 , e nenhum equilíbrio para valores de a no outro lado. ■

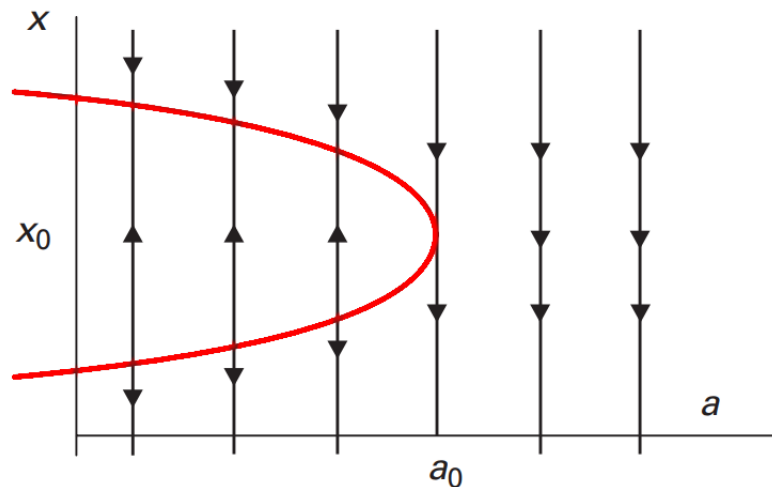
Nas bifurcações nó-sela, há um intervalo sobre o valor de bifurcação a_0 e outro intervalo I no eixo x em que a equação diferencial tem:

1. Dois pontos de equilíbrio em I se $a < a_0$;
2. Um ponto de equilíbrio em I se $a = a_0$;

3. Nenhum ponto de equilíbrio em I se $a > a_0$.

O diagrama de bifurcação para $x' = f_a(x)$ é um gráfico das várias linhas de fase da equação e do parâmetro a . O diagrama de uma bifurcação nó-sela típica pode ser visto na Figura 2.1 (A direção das setas e da curva de equilíbrio pode mudar).

Figura 2.1: Representação de um Diagrama de Bifurcação Nó-Sela.



Exemplo 2.2.1. Considere a equação de primeira ordem

$$x' = f_a(x) = x^2 + a.$$

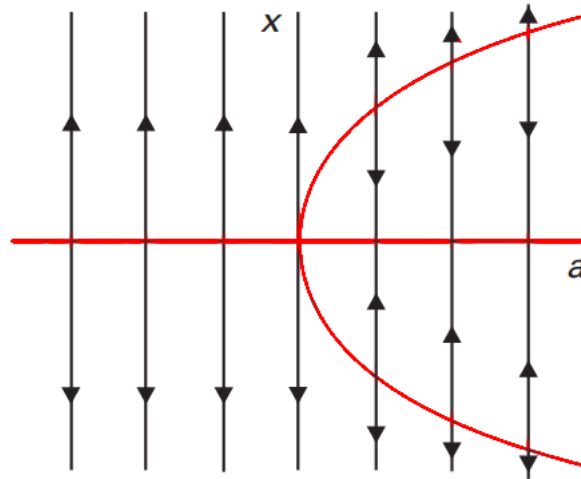
Ela possui um ponto de equilíbrio único em $x = 0$ quando $a = 0$. Veja que $f'_0(0) = 0$, porém $f''_0(0) \neq 0$. Para $a > 0$ a equação não possui pontos de equilíbrio, pois $f_a(x) > 0$ para todo x . Porém quando $a < 0$ a equação possui um par de equilíbrios em $x = \pm\sqrt{-a}$. Portanto, a bifurcação ocorre quando o parâmetro passa por $a = 0$.

Exemplo 2.2.2. Bifurcação de Forquilha - Pitchfork: Considere a equação

$$x' = f_a(x) = x^3 - ax.$$

Aqui temos duas situações possíveis. Quando $a > 0$ a equação possui três pontos de equilíbrio, um em $x = 0$ e outros dois em $x = \pm\sqrt{a}$. Porém, quando $a \leq 0$ o sistema possui apenas um ponto de equilíbrio em $x = 0$. Assim, o diagrama de bifurcações está representado na Figura 2.2.

Figura 2.2: Representação de um Diagrama de Bifurcação Pitchfork.



Exemplo 2.2.3. Bifurcação de Dimensão Maior: Agora vamos tratar de algumas bifurcações em dimensões maiores. A bifurcação nó-sela no plano é semelhante à sua representação unidimensional, só que agora podemos ver de onde a sela surge. Considere o sistema:

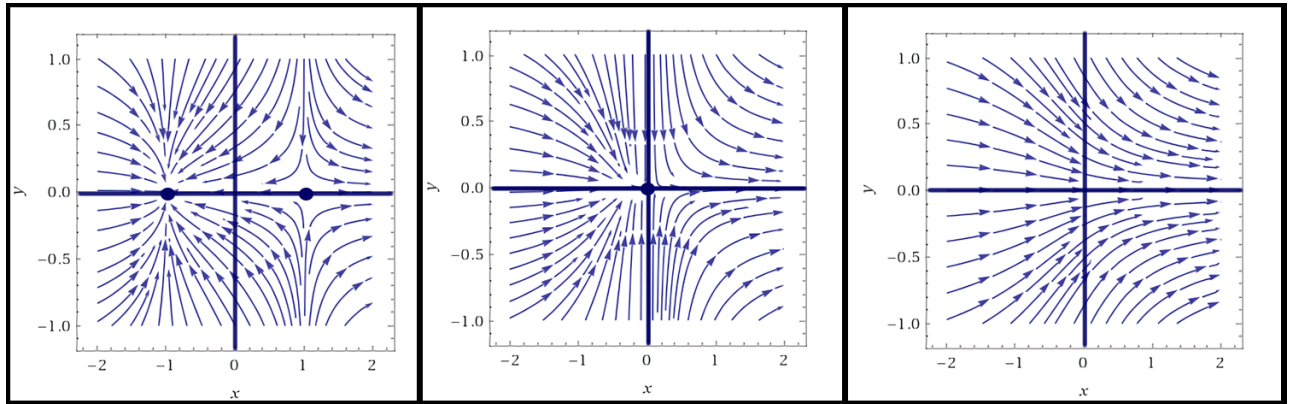
$$\begin{cases} x' = x^2 + a \\ y' = -y \end{cases}$$

Quando $a = 0$ temos um ponto de equilíbrio único na origem. Quando a passa sobre $a = 0$ podemos ver uma bifurcação nó-sela acontecendo. Quando $a > 0$ temos $x' > 0$, e assim, todas as soluções se movem para a direita e o ponto de equilíbrio desaparece. Quando $a < 0$ temos um par de equilíbrios em $(-\sqrt{-a}, 0)$ e $(\sqrt{-a}, 0)$. Calculando a equação linearizada correspondente temos:

$$X' = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

Portanto, temos um nó estável em $(-\sqrt{-a}, 0)$ e uma sela em $(\sqrt{-a}, 0)$. Podemos ver que as soluções nas linhas $x = \pm\sqrt{-a}$ permanecem sobre elas para todo tempo, pois $x' = 0$. As soluções nestas linhas tendem diretamente para o equilíbrio, visto que $y' = -y$. Esta bifurcação pode ser vista na Figura 2.3.

Figura 2.3: Representação de uma Bifurcação Nó-Sela com (a): $a = -1$, (b) : $a = 0$ e (c): $a = 1$.



Exemplo 2.2.4. Bifurcação de Hopf: Considere o sistema:

$$x' = ax - y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x + ay - y(x^2 + y^2)$$

Existe um ponto de equilíbrio na origem e o sistema linearizado correspondente é:

$$X' = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} X.$$

Com autovalores $a \pm i$. Assim, esperamos encontrar uma bifurcação em $a = 0$. Vamos utilizar uma mudança de coordenadas e colocar o sistema em sua forma polar:

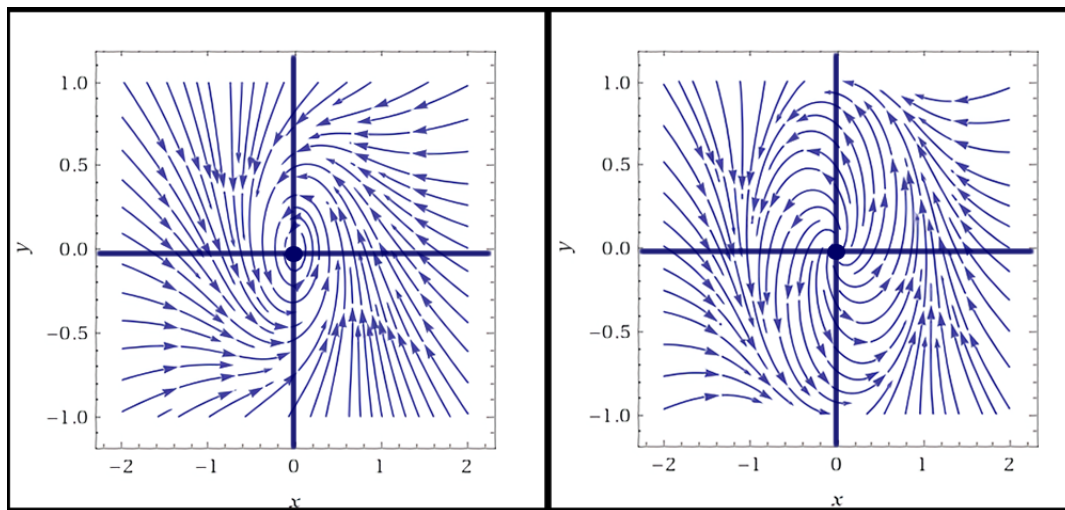
$$r' = r(a - r^2)$$

$$\theta' = 1.$$

Como $\theta' \neq 0$, o único ponto de equilíbrio seria a origem. Quando temos $a < 0$ concluí-se que $r(a - r^2) < 0$ para qualquer $r > 0$. Assim, temos um nó estável, com todas as soluções tendendo para a origem. Já quando $a > 0$, vamos considerar um caso específico onde $r = \sqrt{a}$, e assim temos $r' = 0$. Logo, obtemos uma solução periódica circular de raio \sqrt{a} . Podemos então concluir que a origem fica isolada por uma órbita fechada que é única, atratora e centrada na origem. Assim sendo, todas as órbitas internas ou externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem á órbita fechada quando $t \rightarrow \infty$.

O surgimento da órbita periódica e a mudança de estabilidade do nó a partir da perturbação do sistema, com o parâmetro a , é o que chamamos de *Bifurcação de Hopf*. Uma representação pode ser vista na Figura 2.4.

Figura 2.4: Representação de uma Bifurcação de Hopf com (a): $a = -1$ e (b): $a = 1$.



2.3 Técnicas Locais de Sistemas Não-Lineares

Agora vamos estudar algumas técnicas qualitativas para analisar o comportamento dos sistemas não-lineares de equações diferenciais. As técnicas que serão apresentadas se mostram de extrema importância, contudo, elas não podem ser aplicadas a todos os tipos de sistemas não-lineares. Elas funcionam para alguns tipos específicos de situações, e estas ocorrem em muitas aplicações importantes de equações diferenciais.

Vamos começar com algumas técnicas locais que podem ser aplicadas em sistemas não-lineares. Estas aplicações nos ajudaram a estudar o comportamento local dos sistemas. Em alguns tipos de sistema é consideravelmente fácil utilizar as técnicas, porém, em outros casos, é mais difícil aplicar tal ferramenta do que resolver analiticamente.

Nulidade

Uma ferramenta muito importante para analisar sistemas de equações diferenciais (principalmente os sistemas planares) é a nulidade. Considere um sistema da forma:

$$x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n).$$

O conjunto de pontos onde as derivadas x_j são nulas, ou seja, onde $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, é chamado de nulidade de ordem x'_j .

Estas x'_j nulidades do sistema separam \mathbb{R}^n em várias regiões, onde as x'_j componentes do campo vetorial apontam para o lado positivo ou para o lado negativo. Assim, ao determinar as nulidades de um sistema, podemos decompor \mathbb{R}^n em uma coleção de conjuntos abertos, nos quais, o campo de vetor aponta para uma determinada direção. Quando temos a intersecção de duas curvas de nulidade, é formado um ponto de equilíbrio do sistema.

Exemplo 2.3.1. Para entender melhor, vamos considerar o caso de um sistema planar

$$x' = y - x^2$$

$$y' = x - 2.$$

Para a nulidade em x temos que $x' = 0$, ou seja, a parábola $y = x^2$. Já para a nulidade em y temos a linha vertical $x = 2$. As intersecções destas nulidades se dá no ponto $(2, 4)$, onde temos um equilíbrio. Assim as nulidades irão dividir \mathbb{R}^n em quatro regiões distintas. Para determinar a direção do campo vetorial em cada uma destas regiões precisamos apenas escolher um ponto pertencente a cada região, e em seguida determinar a direção do campo vetorial neste ponto. Como já foi dito, as regiões separadas pelas nulidades possuem o mesmo caráter direcional. Por exemplo, se escolhermos o ponto $(0, 1)$, podemos encontrar o vetor $(1, -2)$ correspondente. Assim, os vetores nesta região irão apontar sempre para sudeste, ou seja, possuem um ângulo θ compreendido entre $-\pi/2$ e 0 . Utilizando este mesmo raciocínio é possível encontrar as direções do campo vetorial em todas as regiões. Uma representação das nulidades deste sistemas pode ser vista na Figura 2.5.

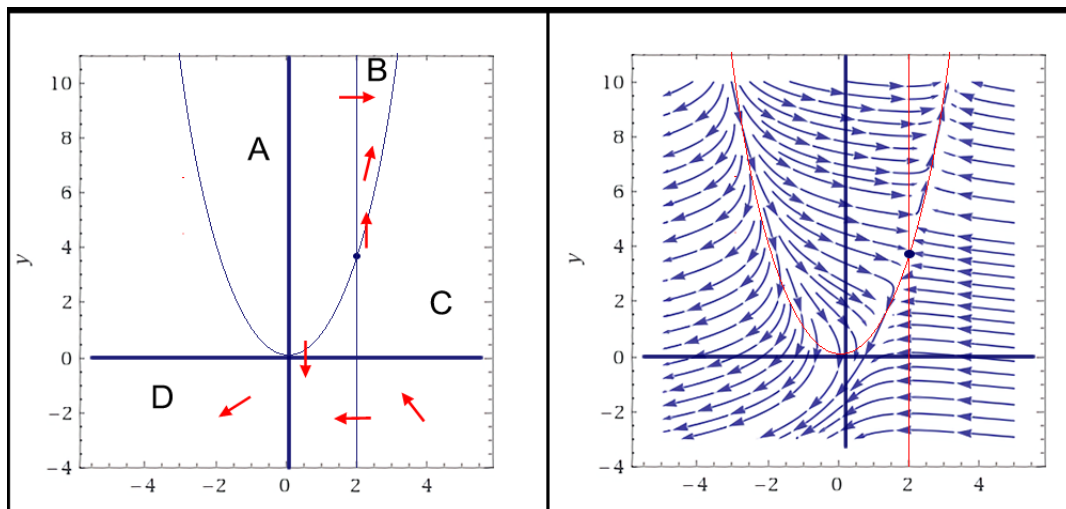
Apenas observando as nulidades e o campo de direções podemos ter uma ideia de que o ponto de equilíbrio do sistema se assemelha a uma Sela. De fato, ao encontrar o sistema linearizado correspondente em $(2, 4)$ temos:

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Os autovalores seriam $-2 \pm \sqrt{5}$, um positivo e outro negativo. Ou seja, como previmos, temos um ponto de Sela.

A relação entre as nulidades e o comportamento do campo de direções é muito importante pois conseguimos presumir o comportamento aproximado das soluções em todos os lugares no plano. Observe que todas as soluções das regiões B e D se mantêm nelas para todo tempo e tendem para ∞ , nas direções nordeste e sudoeste, respectivamente. Já nas outras duas regiões A e C, as soluções se dividem em duas opções. Ou elas tendem diretamente para o ponto de equilíbrio, ou elas atravessam as curvas de nulidade e assim seguem o comportamento das outras soluções nestas regiões. Assim sendo, conseguimos entender de maneira qualitativa o comportamento do retrato de fase deste sistema, que está representado na Figura 2.5.

Figura 2.5: Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) do Sistema $x' = y - x^2; y' = x - 2$.



Exemplo 2.3.2. Bifurcação Heteroclínica: Agora vamos considerar o sistema de equações abaixo que depende do parâmetro a :

$$x' = x^2 - 1$$

$$y' = -xy + a(x^2 - 1)$$

Primeiramente vamos encontrar as nulidades. Para o eixo x elas são dadas em $x = \pm 1$, e para o eixo y temos $xy = (x^2 - 1)$. Portanto temos dois pontos de equilíbrio $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Antes de estudar os diferentes valores do parâmetro, temos alguns comportamentos universais deste sistema. Na primeira linha de nulidade do eixo x , em $x = 1$ teríamos $y' = -y$, e assim, as soluções irão tender para o ponto de equilíbrio ao longo desta linha vertical. Já em $x = -1$ teríamos $y' = y$, e assim, as soluções iriam se afastar do ponto de equilíbrio.

Agora vamos considerar o caso $a = 0$, onde o sistema fica na forma

$$\begin{cases} x' = x^2 - 1 \\ y' = -xy. \end{cases}$$

Ao longo dos eixos temos $y' = 0$. Em particular, o campo de vetores é tangente ao eixo x , e é dado por $x' = x^2 - 1$ nesta linha. Assim temos que $x' > 0$ se $x^2 > 1$ e $x' < 0$ se $x^2 < 1$. Portanto, temos uma solução em linha reta tendendo ao equilíbrio e uma tendendo para longe. Ao que parece, cada ponto de equilíbrio seria uma sela. Este fato é facilmente checado ao utilizar o sistema linearizado.

Existe uma segunda nulidade de y , quando $x = 0$. Aqui o campo vetorial não é tangente a essa nulidade. Ao calcular a direção do campo vetorial em cada uma das regiões determinadas pelas nulidades encontramos a Figura 2.3.2, a partir da qual podemos deduzir imediatamente o comportamento qualitativo de todas as soluções.

Veja que aqui, quando temos o parâmetro a nulo, uma ramificação da curva instável através de $(1, 0)$ coincide exatamente com uma ramificação da curva estável em $(-1, 0)$. As soluções nesta curva viajam de uma sela para a outra, de maneira cíclica. Tais soluções são chamadas de *Heteroclínicas* ou *Conexões de Sela*. Normalmente, em sistemas planares, as curvas estáveis e instáveis raramente se encontram para formar tais “conexões” heteroclínicas. Quando o fazem, no entanto, pode-se esperar uma bifurcação. As nulidades e o retrato de fase neste caso podem ser vistos na Figura 2.3.2.

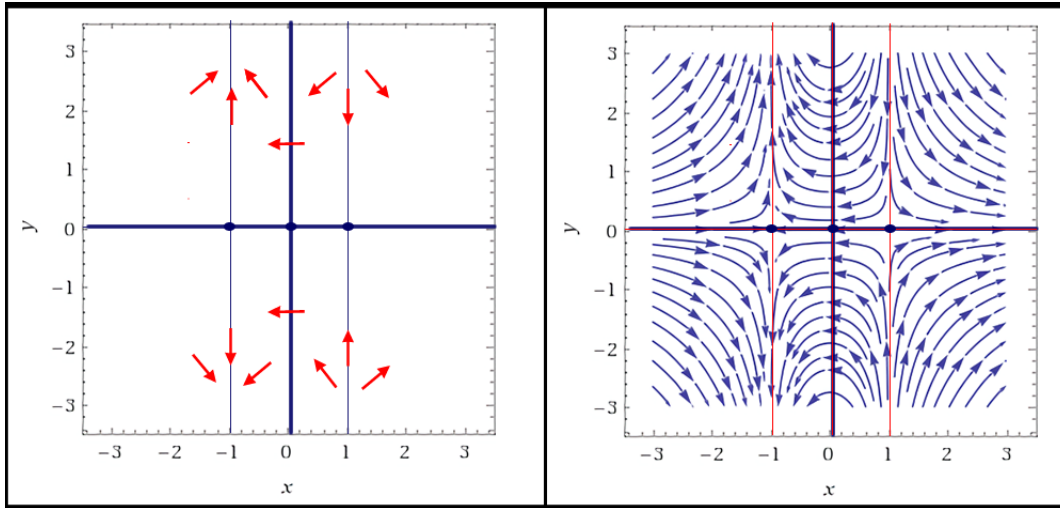


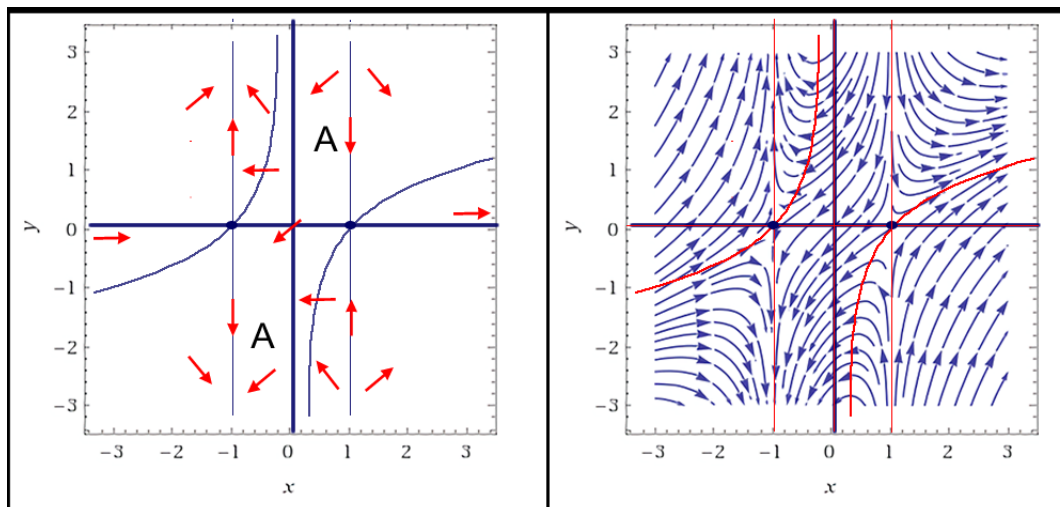
Figura 2.6: Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) do sistema $x' = x^2 - 1$; $y' = xy$.

Agora vamos analisar o caso onde o parâmetro $a \neq 0$. Temos uma mudança significativa no sistema. A nulidade do eixo x apresenta o mesmo comportamento anterior, em $x = \pm 1$. Já para a nulidade do eixo y temos aqui as curvas $y = a(x^2 - 1)/x$. Quando $a > 0$, temos uma região central entre as nulidades onde o ciclo heteroclínico é quebrado. O campo de vetores nesta região aponta para a direção sudoeste. A parte direita da curva estável associada a $(-1, 0)$ surge de $y = \infty$ na parte superior do plano. Já a parte esquerda da curva instável associada a $(1, 0)$ parte para $y = -\infty$ na parte inferior do plano. Assim temos um tipo de 'corredor' entre as linhas $x = \pm 1$ com soluções viajando de $y = \infty$ para $y = -\infty$. Este comportamento pode ser observado na Figura 2.7. Para $a < 0$ este comportamento seria similar.

Estabilidade dos Equilíbrios

Já vimos neste relatório que é relativamente simples determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Porém, quando este não é o caso, a situação fica um pouco mais complicada. Aqui vamos estudar um método diferente para determinar a estabilidade dos equilíbrios de um sistema. Este método generaliza a noção de que, para sistemas lineares na forma canônica, o componente radial r decresce ao longo das curvas de solução. O matemático russo Liapunov descreveu um método que nos dá uma ideia do tamanho da bacia de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Por definição, a bacia de atração é o conjunto de todas as condições

Figura 2.7: Representação das Nulidades (a) e do Retrato de Fase (b) para um parâmetro $a > 0$.



iniciais cujas soluções tendem ao ponto de equilíbrio.

Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no conjunto aberto U contendo X^* . Considere ainda que:

$$L'(X) = DL_X(F(X)).$$

Como já vimos, se $\phi_t(X)$ é uma solução do sistema passando por X quando $t = 0$, então usando a regra da cadeia para $t = 0$ temos:

$$L'(X) = \frac{\partial L(\phi_t(X))}{\partial t}.$$

Conseqüentemente, se $L'(X)$ é negativo, então L diminui ao longo da curva de solução através de X .

Teorema 2.3.1. Estabilidade de Liapunov: Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no conjunto aberto U contendo X^* . Considere as três condições:

- (a) $L(X^*) = 0$ e $L(X) > 0$ se $X \neq X^*$;
- (b) $L' \leq 0$ em $U - X^*$;
- (c) $L' < 0$ em $U - X^*$.

Se X^* satisfaz as condições (a) e (b) então é um ponto de equilíbrio estável. Se X^* satisfaz as três condições acima então é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Se L satisfaz as condições (a) e (b) então é chamada de função de Liapunov. Se L satisfaz as três condições acima então é chamada de Função de Liapunov Estrita.

Veja que o Teorema de Liapunov pode ser aplicado sem resolver a equação diferencial, tudo que precisamos é encontrar $DL_X(F(X))$, e isto é um ganho significativo. Por outro lado, não existe nenhum método simples para encontrar as funções de Liapunov. Normalmente é uma questão de criatividade ou tentativa e erro. Às vezes, existem funções simples para tentar.

Exemplo 2.3.3. Considere o sistema de equações diferenciais abaixo com um parâmetro λ :

$$\begin{cases} x' = (\lambda x + 2y)(z + 1) \\ y' = (-x + \lambda y)(z + 1) \\ z' = -z^3. \end{cases}$$

O único ponto de equilíbrio do sistema é a origem $(0, 0, 0)$. O sistema linearizado neste ponto é:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Os autovalores são 0 e $\lambda \pm \sqrt{2}i$. Supondo que $\lambda > 0$, podemos concluir apenas que a origem seria instável. Supondo que $\lambda \leq 0$ podemos concluir apenas que a origem não seria hiperbólica.

Quando $\lambda \leq 0$ procuramos por uma função de Liapunov para $(0, 0, 0)$ da forma $L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, com $a, b, c > 0$. Para tal função temos:

$$L' = 2(axx' + byy' + cz z') \Rightarrow$$

$$L'/2 = ax(\lambda x + 2y)(z + 1) + by(-x + \lambda y)(z + 1) - cz^4.$$

Para existir estabilidade nós queremos que $L' \leq 0$. Podemos chegar neste resultado utilizando $a = 1, b = 2, c = 1$. Se $\lambda = 0$ a função fica na forma $L' = -z^4$, que é menor ou igual a zero, e assim, a origem é estável. É possível mostrar, no entanto, que a origem não é assintoticamente estável. Se $\lambda < 0$ a função fica na forma $L' = \lambda(x^2 + 2y^2)(z + 1) - z^4$. Aqui, $L' < 0$ na região de U dada por $z > 1$ (exceto a origem). Concluímos então que a origem é assintoticamente estável.

A função de Liapunov não é usada apenas para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, mas também, para fazer estimativas sobre o tamanho da bacia de atração dos equilíbrios assintoticamente estáveis. O teorema a seguir nos mostra alguns critérios para definir a estabilidade assintótica e o tamanho da bacia de atração, mesmo quando a função de Liapunov não é estrita. Para entender este teorema precisamos recordar algumas definições.

Um conjunto A é chamado *invariante* se, para cada $X \in A$, $\phi_t(X)$ está em A para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto A é chamado *positivamente invariante* se para cada $X \in A$, $\phi_t(X)$ está em A para todo $t \geq 0$. Por fim, uma *solução inteira* de um sistema é um conjunto da forma $(\phi_t(X) | t \in \mathbb{R})$.

Teorema 2.3.2. Princípio de Invariância de Lasalle: *Considere o sistema $X' = F(X)$ com um ponto de equilíbrio X^* . Seja $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Liapunov em X^* , onde U é um conjunto aberto contendo X^* . Seja $\Omega \subset U$ uma vizinhança de X^* fechada e limitada. Supondo que Ω seja positivamente invariante e que não existem soluções inteiras em $\Omega - X^*$ no qual L é constante. Deste modo X^* é assintoticamente estável e Ω está contido na bacia de atração de X^* .*

Demonstração: Imagine uma solução $X(t)$ que se encontra no conjunto invariante positivo Ω para $0 \leq t \leq \infty$, mas suponha que $X(t)$ não tenda a X^* quando $t \rightarrow \infty$. Como Ω é fechado e limitado, deve haver um ponto $Z \neq X^*$ em Ω e uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n) = Z.$$

Podemos supor que a sequência t_n é crescente.

Afirmamos que toda a solução através de Z está em Ω . Isto é, $\phi_t(Z)$ é definida e está em Ω para todo $t \in \mathbb{R}$, não apenas para $t \geq 0$. Isto pode ser visto como segue. Primeiro, $\phi_t(Z)$ é certamente definida para todo $t \geq 0$, uma vez que Ω é positivamente invariante. Por outro lado, $\phi_t(X(t_n))$ é definida e está em Ω para todo t no intervalo $[-t_n, 0]$. Como t_n é uma sequência crescente, temos que $\phi_t(X(t_{n+k}))$ também é definida e está em Ω para todos $t \in [-t_n, 0]$ e todos $k \geq 0$. Como os pontos $X(t_{n+k}) \rightarrow Z$ quando $k \rightarrow \infty$, segue da dependência contínua de soluções em condições iniciais que $\phi_t(Z)$ é definida e está em Ω para todo $t \in [-t_n, 0]$. Como isso vale para qualquer t_n , vemos que a solução através de Z é uma solução inteiramente situada em Ω .

Finalmente, mostramos que L é constante em toda a solução através de Z . Se $L(Z) = \alpha$, então temos $L(X(t_n)) \geq \alpha$. Além disso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(X(t_n)) = \alpha.$$

Mais geralmente, se s_n é qualquer sequência de tempos para a qual $s_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então $L(X(s_n)) \rightarrow \alpha$. Isso decorre do fato de que L não aumenta ao longo das soluções. Agora a sequência $X(t_n + s)$ converge para $\phi_s(Z)$, e assim $L(\phi_s(Z)) = \alpha$. Isso contradiz nossa suposição de que não há soluções inteiramente situadas em Ω para as quais L é constante, e isso comprova o teorema. ■

Sistema Gradiente

Agora vamos tratar de um tipo específico de sistema, chamado *Sistema Gradiente*. Considere o sistema de equações diferenciais em \mathbb{R}^n da forma:

$$X' = -\text{grad } V(X),$$

onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ e :

$$\text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right).$$

Sistemas Gradiente possuem propriedades especiais que tornam seus fluxos um tanto quanto simples. A igualdade seguinte é fundamental:

$$DV_X(Y) = \text{grad } V(X) \cdot Y$$

Ela nos diz que a derivada de V em X , calculada em $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada calculando o produto escalar entre os vetores $\text{grad } V(x)$ e Y .

Proposição 2.3.3. *A função V é considerada uma Função de Liapunov do sistema $X' = -\text{grad } V(X)$. E ainda, $V'(X) = 0$ se, e somente se, X é um ponto de equilíbrio do sistema.*

Demonstração: Pela regra da cadeia temos:

$$V'(X) = DV_X(X') = \text{grad } V(X)(-\text{grad } V(X)) = -|\text{grad } V(X)|^2 \leq 0.$$

Em particular, $V'(X) = 0$ se, e somente se, $\text{grad } V(X) = 0$. ■

Uma consequência imediata disso é o fato de que, se X^* é um mínimo isolado de V , então X^* é um equilíbrio assintoticamente estável do sistema gradiente. De fato, se X^* for isolado, isso garante que $V' < 0$ em uma vizinhança de X^* (não incluindo X^*).

Teorema 2.3.4. Propriedades do Sistema Gradiente: Para o sistema $X' = -\text{grad } V(X)$:

1. Se c é um valor regular de V , então, o campo de vetores é perpendicular ao Conjunto de Nível $V^{-1}(c)$;
2. Os pontos críticos de V são os pontos de equilíbrio do sistema;
3. Se um ponto crítico é um mínimo isolado de V , então este ponto é um equilíbrio assintoticamente estável.

Exemplo 2.3.4. Considere a função $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$. O sistema gradiente $X' = -\text{grad } V(X)$ é dado por:

$$\begin{cases} x' = -2x(x - 1)(2x - 1) \\ y' = -2y. \end{cases}$$

De acordo com o teorema acima, temos que os pontos críticos da função $V(x, y)$ são os pontos de equilíbrio do sistema. Assim, encontramos 3 pontos de equilíbrio em $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1/2, 0)$. As linearizações do sistema em cada um dos pontos geram as matrizes:

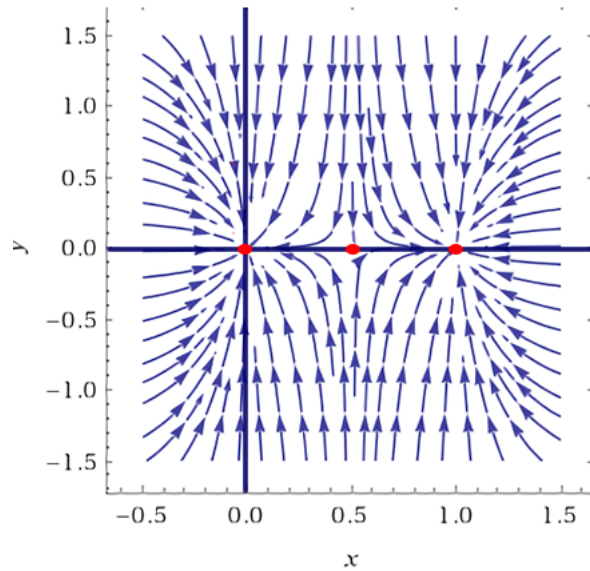
$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, DF(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, DF(1/2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim temos que $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são nós estáveis e $(1/2, 0)$ é uma sela. É possível vermos uma representação do retrato de fase deste sistema na Figura 2.8. Podemos ver que todas as soluções descritas irão tender para um dos 3 equilíbrios.

Dada uma solução $X(t)$, o conjunto de todos os pontos que são limites de uma sequência quando $t \rightarrow +\infty$ é chamado de conjunto ω -limite da solução $X(t)$. Da mesma forma, o conjunto de todos os pontos que são limites de uma sequência quando $t \rightarrow -\infty$ é chamado de conjunto α -limite. No próximo capítulo iremos estudar mais afundo estas definições de conjunto limite.

Proposição 2.3.5. Considere um sistema gradiente $X' = -\text{grad } V(X)$. Suponha que Z é um ponto α -limite ou ω -limite de uma solução deste sistema. Então podemos afirmar que Z é um ponto de equilíbrio do sistema.

Figura 2.8: Representação do Retrato de Fase do Sistema Gradiente $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$.



Demonstração: Suponha que Z seja um ponto ω - *limite*. Como na prova do princípio de invariância de Lasalle da seção anterior, mostra-se que V é constante ao longo da solução através de Z . Assim, $V'(Z) = 0$, e Z deve ser um ponto de equilíbrio. O caso de um ponto α - *limite* é similar. De fato, um ponto Z que é α - *limite* de $X' = -\text{grad } V(X)$ é um ponto ω - *limite* de $X' = \text{grad } V(X)$, de modo que $\text{grad } V(Z) = 0$.

■

Se um sistema gradiente tiver apenas pontos de equilíbrio isolados, isto implica que toda solução do sistema deve tender ao infinito ou a um ponto de equilíbrio. No exemplo anterior, vemos que cada solução que entra nos conjuntos de nível correspondentes aos pontos fixos é definida para todo $t \geq 0$ e tende para um dos três equilíbrios $(0, 0)$, $(1, 0)$ ou $(1/2, 0)$.

Existe ainda uma última propriedade que os sistemas gradientes compartilham. Perceba que, no exemplo anterior, a linearização dos pontos de equilíbrio possuem todos os autovalores reais. Isso ocorre por que, uma matriz A gerada pela linearização de um sistema gradiente em um ponto de equilíbrio X^* , possui elementos da forma:

$$a_{ij} = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} (X^*) \right).$$

Como as derivadas parciais mistas são iguais, temos:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(X^*) \right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}(X^*) \right),$$

E também $a_{ij} = a_{ji}$. Isso nos diz que as matrizes são simétricas, e como já vimos, tais matrizes possuem sempre autovalores positivos.

Proposição 2.3.6. *Para um sistema gradiente $X' = -\text{grad } V(X)$, a linearização em pontos de equilíbrio possui apenas autovalores reais.*

Sistema Hamiltoniano

Agora vamos nos voltar para um outro tipo específico de sistema que costuma aparecer comumente em aplicações de mecânica clássica. Estes sistemas são chamados de *Hamiltonianos*. Assim, ao restringirmos os estudos em \mathbb{R}^2 , um sistema hamiltoniano é da forma:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

A função $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é chamada de *função hamiltoniana*.

Exemplo 2.3.5. Oscilador Harmônico Não Amortecido: Considere o sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -kx,\end{aligned}$$

com a constante $k > 0$. Aqui temos um sistema hamiltoniano clássico, onde a função hamiltoniana é dada por:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{k}{2}x^2.$$

A importância de saber que um determinado sistema é hamiltoniano, se dá pelo fato de que podemos construir o seu retrato da fase sem resolver o sistema. Assumindo que H não é constante

em nenhum conjunto aberto, simplesmente construímos as curvas de nível $H(x, y) = k$, para uma constante k . As soluções do sistema estão nesses conjuntos de níveis. Assim, nós apenas precisamos descobrir para quais direções as curvas de solução apontam. Mas isso é fácil, já que temos o campo vetorial. Veja que, em sistemas hamiltonianos, os pontos de equilíbrio são iguais aos pontos críticos de H .

Outro fator que torna os sistemas hamiltonianos tão importantes, é que a função hamiltoniana é a *integral primeira*, e isto significa que H é constante ao longo de todas as soluções do sistema.

Proposição 2.3.7. *Para um sistema hamiltoniano em \mathbb{R}^2 , a função H é constante ao longo de todas as curvas de solução.*

Exemplo 2.3.6. Considere o sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x(x^2 - 1).\end{aligned}$$

Aqui podemos encontrar a função hamiltoniana correspondente:

$$H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}.$$

A função H possui valor mínimo igual a zero, que ocorre em $(\pm 1, 0)$. A linearização genérica do sistema ficaria na forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{bmatrix} X.$$

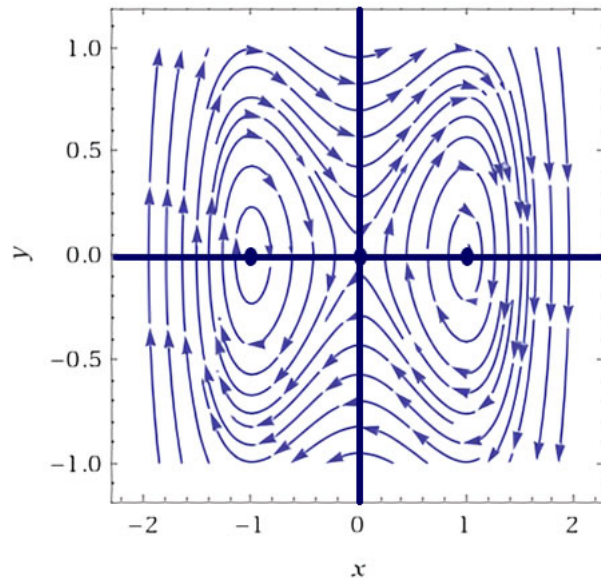
No ponto de equilíbrio $(0, 0)$ do sistema temos autovalores $\lambda = \pm 1$, gerando assim um ponto de sela. Já nos pontos de equilíbrio $(\pm 1, 0)$ temos autovalores $\lambda = \pm\sqrt{2}i$, gerando assim dois centros.

Assim, podemos facilmente encontrar a configuração do retrato de fase do sistema. Perceba que as curvas estáveis e instáveis na origem combinam exatamente, formando assim ciclos heteroclínicos. Uma representação deste caso pode ser vista na Figura 2.9.

O fato de que os autovalores do sistema possuem a forma especial de ± 1 e $\pm\sqrt{2}i$ não foi coincidência, como podemos ver na proposição a seguir.

Proposição 2.3.8. *Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto de equilíbrio de um sistema hamiltoniano planar. Assim, os autovalores do sistema linearizado são especificamente $\pm\lambda$ ou $\pm\lambda i$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Figura 2.9: Representação do Retrato de Fase do Sistema $x' = y; y' = -x(x^2 - 1)$.



A prova desta afirmação pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974).

2.4 Técnicas Globais de Sistemas Não-Lineares

Nos capítulos anteriores estávamos focados em estudar os comportamentos das soluções de equilíbrio e suas aplicações. Podemos afirmar sem dúvida que estas soluções estão entre as mais importantes de um sistema diferencial. Porém, existem outras que também representam um papel importante nas aplicações. Agora vamos nos focar em outros tipos de soluções, de maneira mais global, nos voltando para as *soluções periódicas*, ou *órbitas periódicas*.

Uma solução do sistema $X' = F(X)$ é chamada de periódica se para um ponto X (que não seja um equilíbrio) e um tempo $\tau > 0$ temos que $\rho_\tau(X) = X$ e assim $\rho_{t+\tau}(X) = \rho_t(X)$ para todo t . O valor $\tau > 0$ é chamado de período. Veremos que, assim como nos pontos de equilíbrio, aqui as soluções periódicas poderão atrair outras soluções.

Conjunto Limite e Atratores

Vamos começar descrevendo o comportamento limitante das soluções.

Definição 2.4.1. Considere um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in A$ é chamado de ponto ω -limite da solução $\phi_t(X)$ se existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(X) = p.$$

De maneira similar, um ponto $q \in A$ é chamado de ponto α -limite da solução $\phi_t(X)$ se existe uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(X) = q.$$

Para simplificar, considere uma solução ϕ . Podemos chamar o conjunto ω -limite desta solução de $\omega(\phi)$. Seguindo a mesma ideia, o conjunto α -limite é chamado $\alpha(\phi)$.

Se X^* é um equilíbrio assintoticamente estável, então ele é o conjunto ω -limite de cada ponto em sua bacia de atração. Qualquer equilíbrio também é seu próprio conjunto ω -limite e α -limite. Uma solução periódica é o conjunto ω -limite e também α -limite de todos os seus pontos. Tal solução também pode ser o conjunto ω -limite de muitos outros pontos.

Para entendermos a próxima definição precisamos saber que dado um conjunto A , a notação $X(t) \rightarrow A$ quando $t \rightarrow \infty$ significa que a distância $d(X(t), A) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Definição 2.4.2. Um conjunto invariante e fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de Conjunto Atrator do sistema $X' = F(X)$ se existe alguma vizinhança Ω de A tal que, para todo $X \in \Omega$, a solução $\phi_t(X) \in \Omega$ em todo tempo $t \geq 0$. E também $\phi_t(X) \rightarrow A$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja q qualquer ponto regular em $\alpha(\phi)$ ou $\omega(\phi)$, então a trajetória através de q é chamada de órbita limite de ϕ . Consideremos agora alguns exemplos específicos de conjuntos limite e atratores.

Exemplo 2.4.1. Considere o sistema de planar:

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Convertendo o sistema para coordenadas polares ficamos com:

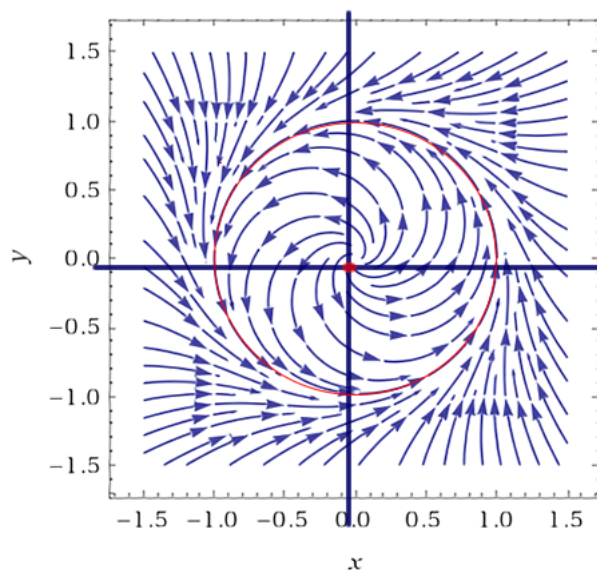
$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\theta' = 1.$$

Podemos ver que a origem é um ponto de equilíbrio desse sistema. O fluxo é uma espiral em torno da origem no sentido anti-horário. Em $0 < r < 1$ ela tende para fora, pois $r' > 0$. Já em $r > 1$ ela tende para dentro, visto que $r' < 0$. Para $r = 1$ o fluxo no sentido anti-horário descreve uma trajetória ρ_0 circular unitária, pois $r' = 0$. O retrato de fase deste sistema é mostrado na Figura 2.10. Neste caso podemos ver que todas as soluções do sistema estão tendendo para a solução ρ_0 , e assim, ela é chamada de *ciclo limite estável*.

O ciclo de limite estável do sistema no exemplo anterior, é o conjunto ω – *limite* de cada trajetória deste sistema, exceto o ponto de equilíbrio na origem. Este ciclo limite estável do sistema também é um *atrator*.

Figura 2.10: Representação do Retrato de Fase do Sistema $r' = r(1 - r^2); \theta' = 1$.



Agora vamos considerar um exemplo de conjunto limite para um sistema em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.4.2. Considere o sistema:

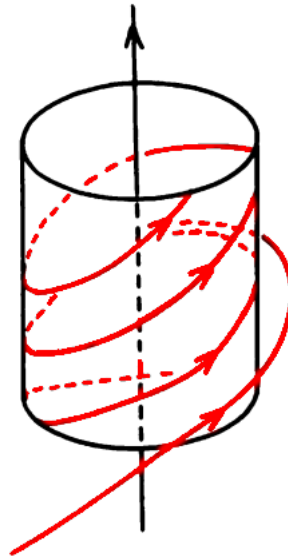
$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

$$z' = \alpha$$

Veja que o sistema possui no eixo z e no cilindro $x^2 + y^2 = 1$ conjuntos invariantes. Assim, o cilindro é um conjunto atrator. Uma representação deste sistema pode ser vista na Figura 2.11.

Figura 2.11: Representação do Retrato de Fase do Sistema em \mathbb{R}^3 .



Proposição 2.4.3. *Considere dois pontos X e $Z \in \mathbb{R}^n$. Então*

1. *Se X e Z estiverem na mesma curva de solução, então $\omega(X) = \omega(Z)$ e $\alpha(X) = \alpha(Z)$;*
2. *Se D é um conjunto fechado, positivamente invariante e $Z \in D$, então $\omega(Z) \subset D$. Este fato acontece similarmente para conjuntos negativamente invariantes e conjuntos α – limite;*
3. *Um conjunto invariante fechado, em particular, um conjunto limite, contém os conjuntos de α – limite e ω – limite de cada ponto nele mesmo.*

Demonstração: Para (1), suponha que $Y \in \omega(X)$ e $\phi_s(X) = Z$. Se $\phi_{t_n}(X) \rightarrow Y$, então temos

$$\phi_{t_n-s}(Z) = \phi_{t_n}(X) \rightarrow Y.$$

E assim $Y \in \omega(Z)$ também.

Para (2), se $\phi_{t_n}(Z) \rightarrow Y \in \omega(Z)$ quando $t_n \rightarrow \infty$, então temos $t_n \geq 0$ para um n suficientemente grande, tal que $\phi_{t_n}(Z) \in D$. Assim $Y \in D$, pois D é um conjunto fechado.

Por fim, a parte (3) segue imediatamente da parte (2).



Ciclos Limite e Mapa de Poincaré

Assim como vimos no estudo dos pontos de equilíbrio, podemos analisar a estabilidade das órbitas periódicas. As definições desses conceitos são inteiramente análogas às dos equilíbrios. Assim, uma órbita periódica ρ se diz estável se todas as soluções ao seu redor se mantêm próximas, para todo o tempo. Uma órbita periódica é instável se não for estável. Estes conceitos, assim como a definição de estabilidade assintótica, serão descritos com mais formalidade nos resultados abaixo.

Definição 2.4.4. *Considere uma órbita periódica ρ . Então:*

1. ρ é estável se, para cada $\epsilon > 0$ houver uma vizinhança Ω de ρ tal que para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$, a distância entre ρ e qualquer outra solução ϕ_t do sistema é $d(\phi_t(X), \rho) < \epsilon$;
2. ρ é assintoticamente estável se é estável, e também, para todos os pontos X em alguma vizinhança Ω de ρ temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(X), \rho) = 0$$

3. ρ é chamada instável se não for estável;

Para exemplificar vamos nos lembrar de um sistema que possui um ponto de equilíbrio em formato de *centro*. Ele é um ponto de equilíbrio cercado por uma faixa contínua de ciclos. Em geral, o período τ varia continuamente à medida que nos movemos ao longo de uma curva contínua, cruzando essa família de ciclos. No entanto, no caso de um centro para um sistema linear, o período é o mesmo para cada órbita periódica na família. Cada órbita periódica na família de ciclos circundando um centro é estável, mas não assintoticamente estável.

Agora vamos considerar as órbitas periódicas de sistemas planares, com $X \in \mathbb{R}^2$.

Definição 2.4.5. *Sejam A um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 e $\Gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica ρ de Γ chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança Ω de ρ tal que ρ é a única órbita periódica de Γ que intercepta Ω .*

De maneira simplificada podemos dizer que, um *ciclo limite* de um sistema de equações diferenciais é uma órbita periódica isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema. A definição abaixo nos diz respeito a estabilidade de ciclos limites.

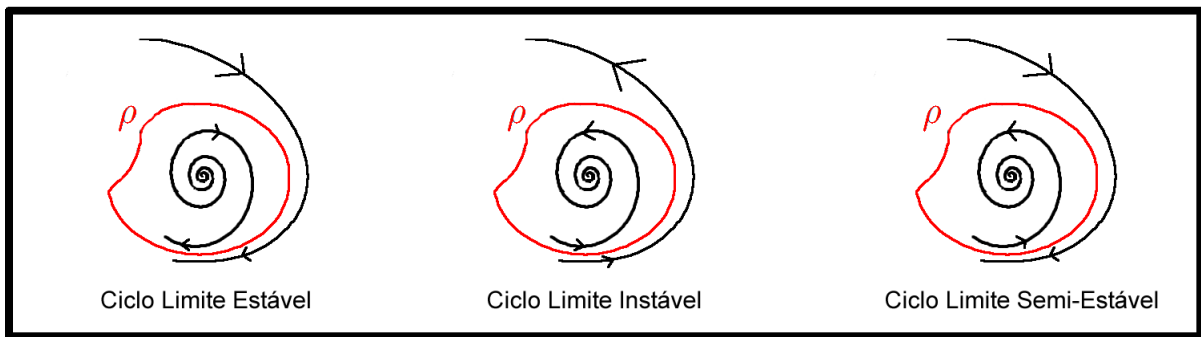
Definição 2.4.6. *Considere uma órbita periódica ρ que também é um ciclo limite. Então:*

1. Se ρ é o conjunto ω – limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite estável;

2. Se ρ é o conjunto α – limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de ρ , então ρ é um ciclo limite instável;

3. Se ρ é o conjunto ω – limite de uma trajetória, porém, ρ também é o conjunto α – limite de uma outra trajetória, então ρ é um ciclo limite semiestável.

Figura 2.12: Representação dos Três Tipos de Estabilidade de Ciclo Limite.



Exemplo 2.4.3. Considere o sistema:

$$x' = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y' = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Com $x^2 + y^2 \neq 0$ e $x' = y' = 0$ em $(0, 0)$, e assim, sendo de classe C^1 em \mathbb{R}^2 . Passando o sistema para coordenadas polares temos:

$$r' = r^3 \sin \frac{1}{r}$$

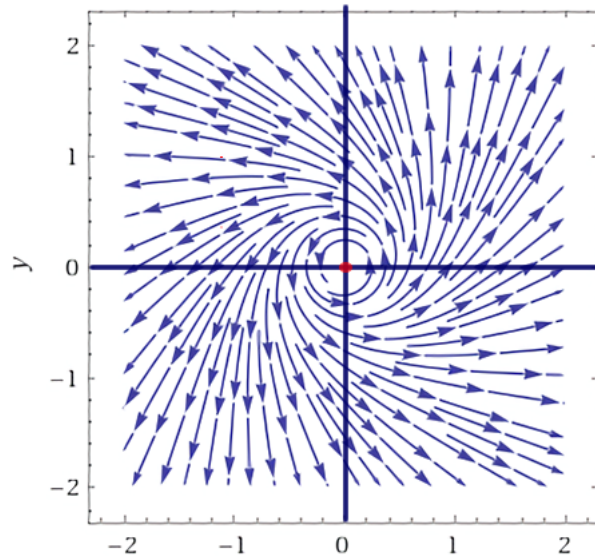
$$\theta' = 1$$

A origem aqui é um ponto de equilíbrio e existem ciclos limite ρ_n situados nos círculos de raio $r = 1/(n.\pi)$. Estes ciclos limite se acumulam na origem, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\rho_n, 0) = 0$$

Cada um dos ciclos limite de ordem ρ_{2n} é estável, já os ciclos de ordem ρ_{2n+1} são instáveis. Podemos ver uma representação deste sistema na Figura 2.13.

Figura 2.13: Representação do Retrato de fase do sistema $r' = r^3 \sin \frac{1}{r}; \theta' = 1$.



O próximo teorema irá nos mostrar que sistemas planares da forma $X' = F(X)$ em que $F(X)$ é uma função analítica em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ não pode admitir um número infinito de ciclos limite se acumulando em ponto crítico, como aconteceu no exemplo anterior.

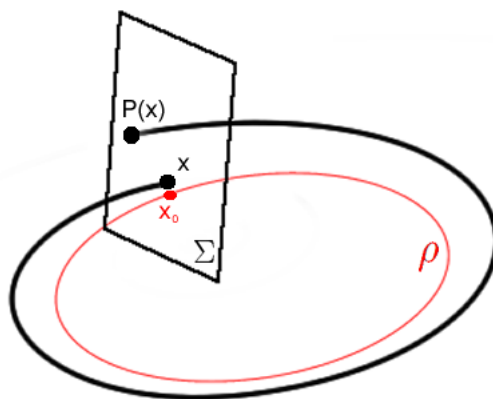
Teorema 2.4.7. Teorema de Dulac: *Em qualquer região limitada do plano, um sistema analítico planar $X' = F(X)$ com $F(X)$ analítica em $A \subset \mathbb{R}^2$ tem no máximo um número finito de ciclos limite. Qualquer sistema polinomial tem no máximo um número finito de ciclos limite em $A \subset \mathbb{R}^2$.*

Como pudemos ver, determinar a estabilidade das órbitas periódicas é muito mais difícil do que o problema correspondente para os equilíbrios. Embora tenhamos uma ferramenta que se assemelhe à técnica de linearização usada para determinar a estabilidade da maioria dos pontos de equilíbrio, geralmente essa ferramenta é muito mais difícil de usar na prática. Esta ferramenta é conhecida como o Mapa de Poincaré.

Seja então ρ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo vetorial Γ de classe C^k , com $k \geq 1$, definido em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma secção transversal de Γ em ρ . Agora considere um ponto X_0 pertencente ao plano transversal e a ρ . Assim, para qualquer outro ponto $X \in \Sigma$ próximo a X_0 , a solução $\phi_t(X)$ permanece próxima a órbita fechada ρ , com t em um intervalo compacto pré-fixado. Define-se $P(X)$ como o primeiro ponto onde esta órbita, partindo

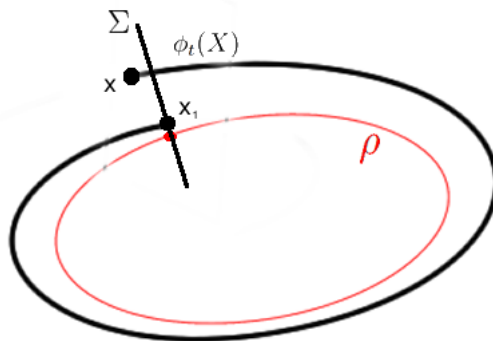
de X intercepta novamente o plano Σ . A função $P(X)$, com domínio Σ_0 , é chamada de *Mapa de Poincaré*. Temos que $X_0 \in \Sigma_0$ e $P(X_0) = X_0$.

Figura 2.14: Representação do Mapa de Poincaré.



Para sistemas planares, se considerarmos a origem como o ponto $X_0 \in \rho \cap \Sigma$, teremos que a secção transversal será uma linha normal a partir da origem. A solução $\phi_t(X)$ que parte de um ponto X em Σ se move para mais perto da órbita periódica ρ depois de seu primeiro retorno ao plano Σ . Continuando seu movimento, nós temos que a solução $\phi_t(X)$ se aproxima cada vez mais de ρ cada vez que retorna à Σ . Podemos ver uma representação desta situação na Figura 2.15. Assim, podemos chegar a proposição seguinte.

Figura 2.15: Representação do Mapa de Poincaré em \mathbb{R}^2 .



Proposição 2.4.8. *Considere o sistema planar $X' = F(X)$ e uma órbita periódica ρ . Suponha*

que X_0 esteja situado em ρ . Então, seja P o mapa de Poincaré definido em uma vizinhança de X_0 em uma secção transversal. Se $|P'(X_0)| < 1$, então ρ é uma órbita assintoticamente estável.

Este resultado acima é muito importante, visto que, para determinar a estabilidade assintótica de uma órbita fechada precisaremos apenas encontrar uma função P que satisfaça as condições necessárias. Porém, encontrar esta função nem sempre é uma tarefa fácil. Para facilitar este processo temos o teorema abaixo.

Teorema 2.4.9. Derivada do Mapa de Poincaré: *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Seja ρ uma órbita periódica de período τ e $P : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ o mapa de Poincaré numa secção transversal Σ em $X_0 \in \rho$. Então:*

$$P'(X_0) = \exp \left[\int_0^\tau \nabla f(\rho(t)) dt \right].$$

Em particular, temos que a órbita periódica ρ é um ciclo limite estável se:

$$\int_0^\tau \nabla f(\rho(t)) dt < 0$$

e ρ é um ciclo limite instável se:

$$\int_0^\tau \nabla f(\rho(t)) dt > 0.$$

Demonstração: Para cada t , definimos $A(t) = DX(\rho(t))$. Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de $x' = A(t)x$, com $\phi(0) = E$. Vamos utilizar aqui a fórmula de Liouville.

Proposição 2.4.10. Fórmula de Liouville: *Seja $\phi(t)$ uma matriz cujas colunas são soluções de $x' = A(t)x$. Então para todo $t \in I$ e $t_0 \in I$ fixo,*

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

A demonstração desta propriedade pode ser encontrada no livro de SOTOMAYOR (1979), no capítulo 2. Continuando a demonstração do nosso teorema, utilizando a fórmula de Liouville temos:

$$\det \phi(\tau) = \exp \left[\int_0^\tau \nabla f(\rho(t)) dt \right].$$

Vamos mostrar que $P'(X_0) = \det \phi(\tau)$. Seja φ o fluxo gerado por f . Pela definição global de diferenciabilidade temos $\varphi(\tau) = D_2\varphi(\tau, X_0)$. Vamos mostrar primeiro que $D_2\varphi(\tau, X_0) \cdot f(X_0) = f(X_0)$. De fato, como $\left. \frac{d}{dt} \varphi(t, X_0) \right|_{t=0} = f(X_0)$, temos:

$$D_2\varphi(\tau, X_0) \cdot f(X_0) = \left. \frac{d}{dt}\varphi(\tau, \varphi(t, X_0)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\varphi(\tau + t, X_0) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\varphi(t, X_0) \right|_{t=0} = f(X_0).$$

Por outro lado se $g : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ é uma parametrização de Σ tal que $g(0) = X_0$, o conjunto $B = \{f(X_0, g'(0))\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 . Por definição $P(g(s)) = \varphi(\tau + \psi(\varphi(\tau, g(s)), g(s))$, e assim:

$$P'(X_0) \cdot g'(0) = \left. \frac{d}{ds}P \circ g(s) \right|_{s=0} = D_1\varphi(\tau, X_0) \cdot a + D_2\varphi(\tau, X_0) \cdot g'(0) = af(X_0) + D_2\varphi(\tau, X_0) \cdot g'(0),$$

onde a é a derivada de $\psi(\varphi(\tau, g(s)))$ em $s = 0$. Portanto, a matriz $D_2\varphi(\tau, X_0)$ na base B é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & P'(X_0) \end{bmatrix}.$$

Obtemos $\det \phi(\tau) = P'(X_0)$, provando nossa afirmação. ■

Exemplo 2.4.4. Considere o sistema planar:

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2),$$

Temos um ciclo limite de período τ representado pela solução $\rho(t) = (\cos t, \sin t)^\tau$. Podemos converter o sistema para coordenadas polares, e assim temos:

$$r' = r(1 - r^2)$$

$$\theta' = 1$$

Para utilizar o teorema da derivada do mapa de Poincaré em $\rho(t) = (\cos t, \sin t)^\tau$ fazemos $\nabla f(x, y) = (2 - 4x^2 - 4y^2)$. E assim:

$$\int_0^{2\pi} \nabla f(\rho(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4x^2 - 4y^2) dt = -4\pi.$$

Portanto concluímos que no ponto X_0 da trajetória ρ temos:

$$P'(X_0) = e^{-4\pi}.$$

Assim, como $P'(X_0) < 1$, ρ é um ciclo limite estável.

Teorema de Poincaré-Bendixson

Aqui vamos estudar uma ferramenta muito importante que vem sendo utilizada para determinar a existência de ciclos limites em sistemas planares. Para entender o teorema vamos nos lembrar que se ρ é uma órbita periódica, então o conjunto ρ^+ é definido por $\rho^+ = \{\rho_t(X); t > 0\}$.

Teorema 2.4.11. Poincaré-Bendixson: *Considere o sistema planar $X' = F(X)$. Suponha que F é de classe C^1 definida em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e que o sistema possui uma órbita fechada ρ , tal que ρ^+ está contida em um subconjunto compacto K de A . Portanto, se o conjunto $\omega(\rho)$ não contém pontos de equilíbrio do sistema, $\omega(\rho)$ é uma órbita periódica.*

Demonstração: Suponha que $\omega(X)$ seja fechado e limitado e que $Y \in \omega(X)$ (A demonstração para o caso do conjunto α – limite é idêntica). Mostraremos primeiro que Y está em uma órbita fechada e depois que essa órbita fechada é na verdade $\omega(X)$.

Como Y pertence a $\omega(X)$, sabemos que $\omega(Y)$ é um subconjunto não vazio de $\omega(X)$. Seja $Z \in \omega(Y)$ e seja S uma seção local em Z . Seja V uma caixa de fluxo associada a S . A solução através de Y encontra S em exatamente um ponto. Por outro lado, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi_{t_n}(Y) \rightarrow Z$, portanto existem infinitas $\phi_{t_n}(Y)$ que pertencem a V . Assim, podemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tal que $r > s$ e $\phi_r(Y), \phi_s(Y) \in S$. Daqui resulta que $\phi_r(Y) = \phi_s(Y)$, e assim $\phi_{r-s}(Y) = Y$ e $r - s > 0$. Como $\omega(X)$ não contém equilíbrios, Y deve estar em uma órbita fechada.

Agora precisamos provar que se ρ é uma órbita fechada em $\omega(X)$, então $\rho = \omega(X)$. Para isso, basta mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(X), \rho) = 0,$$

onde $d(\phi_t(X), \rho)$ é a distância de $\phi_t(X)$ até o conjunto ρ .

Seja S uma seção local em $Y \in \rho$. Seja $\epsilon > 0$ e considere a caixa de fluxo V_ϵ associada a S . Então existe uma sequência $t_0 < t_1 < \dots$ tal que

1. $\phi_{t_n}(X) \in S$;
2. $\phi_{t_n}(X) \rightarrow Y$;
3. $\phi_t(X) \notin S$ para $t_{n-1} < t < t_n$, com $n = 1, 2, \dots$

Considere $X_n = \phi_{t_n}(X)$. Assim, X_n é uma sequência monótona em S que converge para Y . Afirmamos que existe um limite superior para o conjunto de números positivos $t_{n+1} - t_n$ para n

suficientemente grande. Para ver isso, suponha que $\phi_\tau(Y) = Y$, onde $\tau > 0$. Então, para X_n suficientemente próximo de Y , $\phi_\tau(X_n) \in V_\epsilon$ e, portanto, $\phi_{\tau+t}(X_n) \in S$ para algum $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Logo:

$$t_{n+1} - t_n \leq \tau + \epsilon.$$

Isso fornece o limite superior para $t_{n+1} - t_n$. Além disso, $t_{n+1} - t_n$ é claramente pelo menos 2ϵ , então $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considere $\beta > 0$ pequeno. Pela continuidade das soluções em relação às condições iniciais, existe $\delta > 0$ tal que, se $|Z - Y| < \delta$ e $|t| \leq \tau + \epsilon$ então $|\phi_t(Z) - \phi_t(Y)| < \beta$. Ou seja, a distância da solução $\phi_t(Z)$ para ρ é menor que β para todo t satisfazendo $|t| \leq \tau + \epsilon$. Seja n_0 não tão grande que $|X_n - Y| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Então $|\phi_t(X_n) - \phi_t(Y)| < \beta$ se $|t| \leq \tau$ e $n \geq n_0$. Agora considere um $t \geq t_{n_0}$. Seja $n \geq n_0$ tal que $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Então:

$$d(\phi_t(X), \rho) \leq |\phi_t(X) - \phi_{t-t_n}(Y)| = |\phi_{t-t_n}(X_n) - \phi_{t-t_n}(Y)| < \beta$$

pois $|t - t_n| \leq \tau + \epsilon$. Isso mostra que a distância de $\phi_t(X)$ a ρ é menor que β para todo t suficientemente grande. Isto completa a prova do teorema de Poincaré-Bendixson. ■

Este teorema se mostra de extrema importância para o estudo dos pontos de equilíbrio e ciclos limites de um sistema. Isto por que, além de sua aplicação direta, ele gera vários outros resultados diretos. Vamos mostrar alguns destes resultados abaixo.

Primeiro vamos mostrar um corolário importante, que vai no caminho inverso do teorema de Poincaré-Bendixson, ou seja, mostra um critério para determinar quando um sistema planar não possui ciclos limite.

Corolário 2.4.12. *Seja H a integral primeira de um sistema planar. Se H não é constante em nenhum conjunto aberto, então não existem ciclos limite.*

Demonstração: Suponha que haja um ciclo limite ρ . Seja $c \in \mathbb{R}$ o valor constante de H em ρ . Se $X(t)$ é uma solução que forma uma espiral em direção a ρ , então $H(X(t)) \equiv c$, pela continuidade de H . Considere um $X \notin \rho$ tal que $\rho = \omega(X)$. Então X possui uma vizinhança Θ tal que para todo $Y \in \Theta$ temos que $\rho = \omega(Y)$. Em outras palavras, podemos definir o conjunto:

$$\{Y \mid \omega(Y) = \rho\} - \rho,$$

de modo que este seja aberto e forme uma espiral em direção a ρ . Assim, H é constante em um conjunto aberto. ■

Para checar o critério acima utilizamos a seguinte estratégia.

Teorema 2.4.13. Critério de Bendixson-Dulac: *Considere um conjunto A simplesmente conexo. Para determinar se H não é constante encontramos o valor de suas derivadas $\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y}$. Se as derivadas forem contínuas em A e para todos os pontos de A :*

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} \neq 0$$

então o sistema

$$x' = H_1(x, y)$$

$$y' = H_2(x, y)$$

não possui ciclos limite em A .

Demonstração: Suponhamos por contradição que existe um ciclo limite ρ em A . Denote por S o interior da curva fechada ρ . Vamos calcular a integral de linha no sentido positivo (o interior da curva ρ fica sempre à esquerda), ou seja, vamos aplicar o Teorema de Green no plano, que é:

$$\oint_C H_1(x, y)dy - H_2(x, y)dx = \iint_C \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Observe que o lado direito da igualdade é diferente de zero por hipótese. Do sistema podemos obter:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_1(x, y)}{H_2(x, y)} \text{ ou } H_1(x, y)dy = H_2(x, y)dx.$$

Logo, a integral do lado esquerdo da igualdade anterior deve ser igual a zero, o que nos leva a uma contradição. ■

Exemplo 2.4.5. Considere o sistema planar:

$$x' = e^x$$

$$y' = 1 + y^3.$$

Encontramos as derivadas do sistema na forma:

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} = e^x; \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} = 3y^2.$$

Como podemos ver, a soma das derivadas é $e^x + 3y^2 > 0$, e assim, pelo critério de Bendixson-Dulac, o sistema não possui ciclos limite.

Exemplo 2.4.6. Considere um sistema planar genérico da forma:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy.$$

Ao calcularmos os valores das derivadas temos que, se $a + d = 0$ então o sistema não possui ciclos limite. Caso $a + d \neq 0$ então não podemos utilizar o critério.

Exemplo 2.4.7. Vamos analisar a existência de ciclos limite para o sistema:

$$x' = -y - x + x(x^2 + y^2)$$

$$y' = x - y + y(x^2 + y^2).$$

Calculando o valor das derivadas temos:

$$\frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} = -1 + 3x^2 + y^2; \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} = -1 + x^2 + 3y^2$$

Assim o valor da soma das derivadas é $4x^2 + 4y^2 - 2$. Como podemos ver, este valor é igual a zero para $x^2 + y^2 = 1/2$. Não podemos assumir que a soma das derivadas é diferente de zero para todo \mathbb{R}^2 . Porém, podemos nos restringir a um conjunto A onde $x^2 + y^2 \neq 1/2$, ou seja, todo \mathbb{R}^2 sem a circunferência de raio $\sqrt{2}/2$.

Temos agora mais um resultado importante derivado do teorema de Poincaré-Bendixson. Aqui podemos afirmar que um ciclo limite definido em um campo vetorial F de classe C^1 em um conjunto aberto A de \mathbb{R}^2 envolve pelo menos um ponto de equilíbrio.

Corolário 2.4.14. *Considere o sistema planar $X' = F(X)$. Suponha que $F \in C^1(A)$ onde A é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 que contém uma órbita periódica ρ do sistema, assim como o interior desta órbita B . Então B contém pelo menos um ponto de equilíbrio do sistema ou um ciclo limite.*

Demonstração: Considere D um conjunto compacto tal que $D = B \cup \rho$. Então D é invariante, já que nenhuma solução em B pode cruzar ρ . Se B não contém nenhum ciclo limite e nenhum equilíbrio, então, para qualquer $X \in B$ temos:

$$\omega(X) = \alpha(X) = \rho,$$

pelo teorema de Poincaré-Bendixson.

Agora considere a proposição abaixo:

Proposição 2.4.15. *Seja S uma seção local para um sistema planar de equações diferenciais e Y_0, Y_1, Y_2, \dots é uma sequência de pontos distintos em S que estão na mesma curva de solução. Se esta sequência é monótona ao longo da solução, então ela também é monótona ao longo de S .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em HIRSCH, SMALE e DEVANEY (1974). Assim, continuando com a prova do nosso corolário, considere S uma seção local em um ponto $Z \in \rho$, existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $s_n \rightarrow \infty$ tais que $\phi_{t_n}(X), \phi_{s_n}(X) \in S$ e ambos $\phi_{t_n}(X)$ e $\phi_{s_n}(X)$ tendem a Z quando $n \rightarrow \infty$. Mas isso leva a uma contradição da proposição citada em sequências monótonas.

■

Exemplo 2.4.8. Considere o sistema planar:

$$x' = x^2 + y^2 + 1$$

$$y' = x^2 - y^3$$

Analisando este sistema podemos perceber que $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$ para todo (x, y) , ou seja, o sistema não possui pontos de equilíbrio. Portanto, pelo corolário anterior temos que o sistema também não possui ciclos limite.

Por último temos uma resolução que nos diz respeito das funções de Liapunov estudadas na seção 6.2.

Corolário 2.4.16. *Considere um sistema planar $X' = L(X)$. Se L é uma função de Liapunov então não existem ciclos limite.*

Encerramos os estudos deste capítulo mostrando um exemplo onde, ao analisar o sistema e tentar aplicar o teorema de Poincaré-Bendixson, não conseguimos definir que o conjunto ω -limite é um ponto de equilíbrio nem que ele é uma órbita periódica.

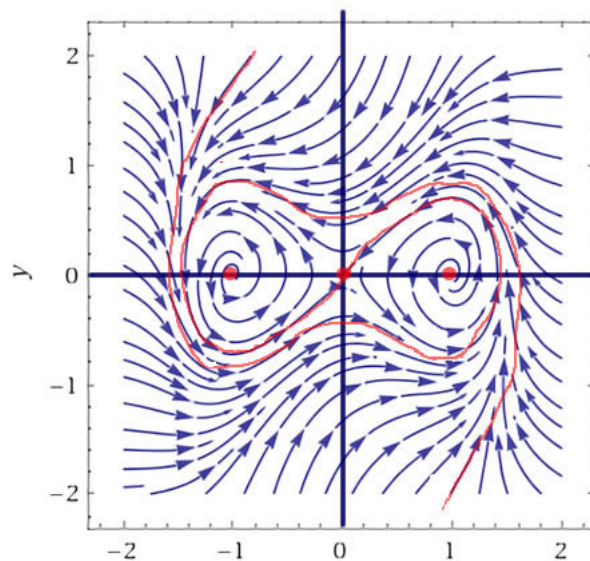
Exemplo 2.4.9. Considere o sistema planar:

$$x' = -y - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) (x^3 - x)$$

$$y' = x^3 - x - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) y.$$

Podemos encontrar os pontos de equilíbrio em $(0, 0); (-1, 0); (1, 0)$. A origem é uma sela, enquanto os outros dois equilíbrios são nós instáveis. Note que soluções longe da origem tendem a se acumular na origem. O par de soluções homoclínicas, cada uma das quais, deixa e depois retorna para a origem. As soluções que emanam de qualquer nó instável possuem conjunto ω -limite que consiste em apenas uma solução homoclínica e $(0, 0)$. Temos aqui um exemplo onde o conjunto ω -limite, que não é nem um ponto de equilíbrio nem uma órbita periódica, é fornecido por uma *solução homoclínica*. O retrato de fase deste sistema é mostrado na Figura 2.16.

Figura 2.16: Representação do Retrato de Fase de uma solução Homoclínica.



CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE *AVERAGING* EM EQUAÇÕES DE LIENARD

Nos capítulos anteriores estudamos as definições de ponto de equilíbrio e ciclos limite, assim como as maneiras de determinar a existência destes nos sistemas não-lineares. Aqui iremos nos focar em determinar a quantidade de ciclos limite que existem em um sistema específico. Esta linha de estudos vem sendo desenvolvida por vários matemáticos ao longo do tempo, e assim, vem se tornando algo cada vez mais refinado.

3.1 Lienard e Suas Implicações

Vimos que o Teorema de Poincaré-Bendixson poderia ser usado para estabelecer a existência de ciclos-limite para certos sistemas planares. Porém, uma questão muito mais delicada é determinar o número exato de ciclos limite de um determinado sistema ou classe de sistemas, dependendo de parâmetros.

O sistema

$$x' = y - F(x)$$

$$y' = g(x)$$

ficou conhecido como sistema de Lienard. E a equação:

$$x'' + f(x)x' + g(x)$$

ficou conhecida como a equação polinomial generalizada de Lienard, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios de grau n e m , respectivamente.

Teorema 3.1.1. Lienard: *Seja $F(x)$ uma função que satisfaz as condições acima para $m=1$. A função possui uma única raiz em $x = a$ e é monótona crescente em $x \geq a$. Assim, a equação de Lienard correspondente possui um único ciclo limite.*

O número de ciclos limite de uma equação diferencial polinomial pode ser chamado de número de Hilbert $H(m, n)$ onde m e n são os graus dos polinômios $g(x)$ e $f(x)$.

Muitos resultados de ciclos limite de equações diferenciais polinomiais tem sido obtidos considerando os ciclos limite que bifurcam de um ponto singular. Estes ciclos são chamados de ciclos de pequena amplitude. Chamamos de $\hat{H}(m, n)$ o número máximo de ciclos limite de pequena amplitude das equações diferenciais polinomiais da forma vista acima. Agora vamos descrever alguns resultados obtidos a partir dos estudos de Lienard e de sua equação generalizada.

1. Rychkov (1973) provou que se $m = 1$ e $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ é um polinômio ímpar de grau 5, então a equação generalizada de Lienard tem até 2 ciclos limite;
2. Lins, de Melo e Pugh (1977) provaram que $H(1, 1) = 0$ e $H(1, 2) = 1$;
3. Dumortier e Chengzhi (1996) provaram que $H(2, 2) = 1$;
4. Coppel (1998) provou que $H(2, 1) = 1$;

A tabela a seguir mostra os valores de $H(m, n)$ ou $\hat{H}(m, n)$ para equações de Lienard em função dos graus m e n . Até agora os únicos números de Hilbert determinados são os casos marcados com asterisco na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores de $H(m, n)$ ou $\hat{H}(m, n)$ para equações de Lienard em função dos graus m e n .

		n																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	48	49	50
m	1	0	1*	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→
	2	1*	1*	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	...	32	33	→
	3	1*	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	...	36	38	38
	4	2	3	4	4	6	7	8	9	9	10	11	12	13				
	5	2	3	4	6	6	8	9	10	11								
	6	3	4	6	7	8	8	9										
	7	3	5	6	8	9	9	9										
	8	4	5	6	9	10												
	9	4	6	8	9	11												
	10	5	7	8	10													
	11	5	7	8	11													
	12	6	8	10	12													
	13	6	9	10	13													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	20	10	13	14	17													
	⋮	⋮	⋮	⋮														
	48	24	32	36														
	49	24	33	38														
	50	↓	↓	38														

Temos alguns resultados importantes mostrados por Blows (1984), Lloyd (1998) e Lynch (1995), que usaram argumentos indutivos em suas provas:

1. Se g é ímpar, então $\hat{H}(m, n) = \lfloor n/2 \rfloor$;
2. Se f é par, então $\hat{H}(m, n) = n$, para qualquer g ;
3. Se f for ímpar, então $\hat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor (m - 2)/2 \rfloor + n$;
4. Se $g(x) = x + g_e(x)$, onde g_e é par, então $\hat{H}(2m, 2) = m$.

Temos também os resultados de Christopher e Lynch (1999), que utilizaram métodos algébricos em suas provas:

1. $\hat{H}(m, 2) = \lfloor (2m + 1)/3 \rfloor$;
2. $\hat{H}(2, n) = \lfloor (2n + 1)/3 \rfloor$;
3. $\hat{H}(m, 3) = 2\lfloor (3m + 2)/8 \rfloor$ para todo $1 < m \leq 50$;
4. $\hat{H}(3, n) = 2\lfloor (3n + 2)/8 \rfloor$ para todo $1 < n \leq 50$;

5. Os valores da Tabela 3.1 para $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$, com $k = 6, 7, 8, 9$. E $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$. Gasull e Torregrosa (1988) obtiveram as cotas superiores para $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$, $\hat{H}(7, 7)$, $\hat{H}(4, 20)$. E por fim, Yu e Han (2006) encontraram os valores da Figura ?? onde $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$

para alguns valores de m e n :

1. $n = 4$ e $m = 10, 11, 12, 13$;
2. $n = 5$ e $m = 6, 7, 8, 9$;
3. $n = 6$ e $m = 5, 6$.

3.2 Método de Averaging

O método que vamos utilizar nesta secção é conhecido como "Averaging". Ele está descrito no teorema abaixo.

Teorema 3.2.1. Método de Averaging de Primeira Ordem: *Considere o seguinte sistema diferencial:*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon),$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na segunda variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Definimos f_1 por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds$$

e assumimos que

(i) F_1 e R são localmente Lipschitz em relação a x ;

(ii) para D com $f_1(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in V - \{a\}$ e $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\bullet, \epsilon)$ do sistema anterior tal que $\varphi(\bullet, \epsilon) \rightarrow a$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A demonstração deste método pode ser encontrada no artigo de LLIBRE, MEREU e TEIXEIRA (2010).

Agora iremos utilizar o método de "averaging" para determinar o número máximo de ciclos limite $\tilde{H}(m, n)$ que bifurcam de órbitas periódicas de um centro linear perturbado, das equações

diferenciais polinomiais de Lienard de graus m e n na forma:

$$x' = y$$

$$y' = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x)),$$

onde para todo k os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ tem graus n e m respectivamente, e ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno. Ou seja, vamos estudar o número de ciclos limite de amplitude média que podem bifurcar das órbitas periódicas de centro $x' = y; y' = -x$ perturbado. Vamos denotar este número máximo como $\tilde{H}_1(m, n)$.

Vamos aplicar a teoria de averaging para os sistemas descritos acima com $k=1$. Como $H(m, n) \geq \tilde{H}(m, n) \geq \tilde{H}_k(m, n)$.

Teorema 3.2.2. Primeira Ordem: *Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ tem graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de órbitas periódicas do centro $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de "averaging" de primeira ordem é:*

$$\tilde{H}_1(m, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração: Primeiramente vamos reescrever o sistema anterior na forma polar, com as coordenadas $x = r \cos\theta$ e $y = r \sin\theta$.

$$r' = -\epsilon \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta) \right)$$

$$\theta' = -1 - \frac{\epsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta) \right).$$

Tomando agora θ como nova variável independente, fazemos a divisão $dr/d\theta$. Ao utilizar a expansão de Taylor encontramos o resultado:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sin \theta) \right) + \epsilon^2 H_1 + \epsilon^3 H_2 + \dots$$

Como estamos trabalhando com o método de primeira ordem podemos desconsiderar os termos de ordem maior. Assim, a função f_1 do método de averaging é dada por:

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^n (a_i r^{i+1} \cos^i \theta \sen^2 \theta) + \sum_{i=0}^m (b_i r^i \cos^i \theta \sen \theta) \right) d\theta.$$

Para encontrar o seu valor exato usamos as fórmulas de integrais trigonométricas com expoentes pares e ímpares:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} \theta \sen^2 \theta d\theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \sen^2 \theta d\theta &= \alpha_{2k} \\ \int_0^{2\pi} \cos^k \theta \sen \theta d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, para i assumindo valores pares, temos que:

$$f_1(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n a_i \alpha_i r^{i+1}.$$

Para encontrarmos o número de soluções desta equação fazemos:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2} (a_0 \alpha_0 r + a_2 \alpha_2 r^3 + a_4 \alpha_4 r^5 + \dots) \\ f_1(r) &= \frac{1}{2} r (a_0 \alpha_0 + a_2 \alpha_2 r^2 + a_4 \alpha_4 r^4 + \dots). \end{aligned}$$

Assim, esta função possui n soluções, com n par, e $n - 1$ soluções com n ímpar. Mas, como estamos tratando da variável r , não podemos levar em conta as soluções negativas. Como os expoentes dos polinômios são todos pares, podemos dizer que suas soluções são dadas em pares. Assim, retirando as soluções negativas, e usando a função do menor inteiro, temos que a função possui $[n/2]$ raízes positivas. Logo, o teorema está provado.

Agora vamos enunciar os teoremas referentes a segunda e terceira ordem.

Teorema 3.2.3. Segunda Ordem: *Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ tem graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de*

órbitas periódicas do centro $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de "averaging" de segunda ordem é:

$$\tilde{H}_2(m, n) = \max \left\{ \left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{m}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] \right\}$$

Teorema 3.2.4. Terceira Ordem: Se para cada $k = 1$ os polinômios $f_n^k(x)$ e $g_m^k(x)$ tem graus n e m respectivamente, com $m, n \geq 1$, então para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno o número máximo de ciclos limite de média amplitude dos sistemas diferenciais polinomiais de Lienard bifurcando de órbitas periódicas do centro $x' = y; y' = -x$, usando a teoria de "averaging" de terceira ordem é:

$$\tilde{H}_3(m, n) = \left[\frac{n+m-1}{2} \right]$$

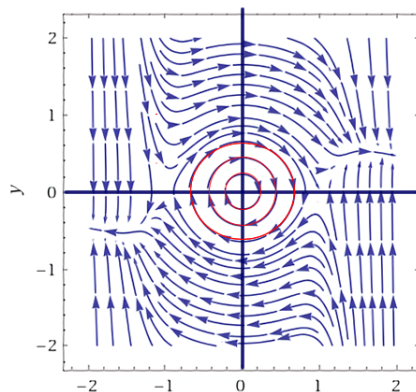
Exemplo 3.2.1. Vamos considerar o caso simples da primeira ordem onde os polinômios são $f(x) = x^6$ e $g(x) = x^5$ e $\epsilon = 1$. Assim teríamos o sistema:

$$x' = y$$

$$y' = -x - (x^6 y + x^5)$$

Logo, pelo teorema podemos afirmar que o número de ciclos limite neste sistema é $[n/2] = [6/2] = 3$. O retrato de fase deste sistema pode ser visto na Figura 3.1.

Figura 3.1: Retrato de fase do sistema $x' = y; y' = -x - (x^6 y + x^5)$



CONCLUSÃO

Ao concluir os estudos sobre as equações diferenciais e produzir este trabalho de conclusão de curso, foi possível perceber que minhas ideias sobre estes assuntos aumentaram de maneira considerável. No período em que estive participando do Projeto de Licenciaturas Internacionais na universidade de Coimbra pude ter um contato maior com equações diferenciais, porém, não tive oportunidade de estudar teorias qualitativas sobre os sistemas não-lineares. Assim, este trabalho serviu como um complemento para a minha graduação, visto que ele contempla assuntos não abordados ao longo do curso.

Também podemos adicionar o fato de que este trabalho serviu como um método efetivo para o desenvolvimento da utilização do software Latex, que é uma ferramenta muito importantes na produção de relatórios científicos.

Foi possível perceber que ao estudar os sistemas diferenciais é muito importante entender o comportamento que eles descrevem em torno de soluções de equilíbrio e ciclos limite, pois estas soluções são encontradas em diversos casos de aplicação, como por exemplo em mecânica clássica. Assim, ao estudar inicialmente os pontos de equilíbrio de um sistema e sua estabilidade, e posteriormente as órbitas periódicas e ciclos limite, pude ter uma base para o entendimento dos sistemas de Lienard e aplicação do método de Averaging.

Ao aplicar o método de Avering em equações diferenciais que respeitam certas restrições podemos ter uma ideia do número de ciclos limite em um determinado intervalo. Isso é um resultado muito importante, pois como vimos no relatório, os ciclos limite estão interligados aos pontos de

equilíbrio de um sistema, e o teorema de Poincaré-Bendixson e suas implicações nos dão uma ideia da existência de ciclos limite, mas não de sua quantidade.

Assim, acredito que seja correto afirmar que os objetivos deste trabalho foram cumpridos, visto que ao final dos estudos foi possível adquirir conhecimentos novos sobre sistemas diferenciais, assim como saber a maneira de determinar o número de ciclos limite em um determinado sistema diferencial planar.

Acredito que a grande diversidade de temas relacionados aos sistemas diferenciais poderão ser abordados em estudos posteriores, como por exemplo, aplicar o método estudado para encontrar o número de ciclos limite de outras classes de sistemas diferenciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLOWS, T. R.; LLOYD, N. G. *The number of small-amplitude limit cycles of Lienard equations. 95 Ed. Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 1984;*

CHRISTOPHER, C. J.; LYNCH, S. *Small-amplitude limit cycle bifurcations for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. Ed. 12. Nonlinearity, 1999;*

COPPEL, W. A. *Some quadratic systems with at most one limit cycles. Dynamics Reported Vol. 2 Wiley, 1998;*

DUMORTIER, F.; LI, C. *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Lienard equations. Ed.9 . Nonlinearity, 1996;*

DUMORTIER, F.; RUSSEAU, C. *Cubic Lienard equations with linear damping. Ed.3 . Nonlinearity, 1990;*

ÉCALE, J. , *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, 1992;*

- GASULL, A.; TORREGROSA, J. *Small-amplitude limit cycles in Lienard systems via multiplicity. Ed.159 . J. Diff. Eqs., 19988;*
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. ELSEVIER, 1974;*
- ILYASHENKO, Y. *Finiteness theorems for limit cycles, Translations of Math. Monographs 94, Amer. Math. Soc., 1991;*
- LINS, A.; DE MELO, W.; PUGH, C.C. *On Lienard's equation. Lecture Notes in Math. 597 Ed. Springer, 1977;*
- LLIBRE, J.; MEREU, A. C.; TEIXEIRA, M. A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2010;*
- LLOYD, N. G.; LYNCH, S. *Small-amplitude limit cycles of certain Lienard systems. Ed. 418. Proc. Royal Soc. London Ser. A, 1998;*
- LYNCH, S. *Limit cycles if generalized Lienard equations. Ed. 8. Appl. Math. Lett., 1995;*
- LYNCH, S. *Generalized quadratic Lienard equations. Ed. 11. Appl. Math. Lett., 1998;*
- LYNCH, S.; CHRISTOPHER, C. J. *Limit cycles in highly non-linear differential equations. Ed. 224. J. Sound Vib, 1999;*
- PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems. 3 Ed. Nova York. Springer, 2006;*
- RYCHKOV, G. S. *The maximum number of limit cycle of the system $x' = ya^1x^3a_2x^5, y' = x$*

is two. Ed. 11. *Differential'nye Uravneniya*, (1975);

SMALE S. *Mathematical problems for the next century*. 20 Ed. *Math. Intelligencer*, 1998;

SOTOMAYOR, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides*, 1979;

YANDELL, B. H. *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*. Ed. 1. *A K Peters/CRC Press*, 2003;

YU, P.; HAN, M. *Limit cycles in generalized Lienard systems*. Ed. 30. *Chaos Solitons Fractals*, 2006;

YUSTLE, S. B. *Phase Portrait and Field Directions of Two-Dimensional Linear Systems of ODEs*. *Wolfram Demonstration Project*. Disponível em: <http://demonstrations.wolfram.com/PhasePortraitAndFieldDirections/OfTwoDimensionalLinearSystems/>. Acesso em 31 de Agosto de 2016;

WOLFRAM RESEARCH, INC. *Mathematica*. Versão 11.3, Champaign, IL, 2018.