UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Campus Sorocaba

Departamento de Física, Química e Matemática

Um estudo de Sistemas *Fuzzy*:

Modelo para estimar o Espalhamento da Tuberculose

Trabalho de Conclusão de Curso

Camila dos Santos Sant'Anna

Orientadora: Profª Drª Magda da Silva Peixoto

Sorocaba 2013

UNIVESIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Campus SOROCABA

Um estudo de Sistemas Fuzzy: Modelo para estimar o Espalhamento da Tuberculose

Autora: Camila dos Santos Sant'Anna

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Física, Química e Matemática (DFQM) da UFSCar, *Campus* Sorocaba, como requisito parcial para a obtenção da graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ªDr.ª Magda da Silva Peixoto

Licenciatura em Matemática

Sorocaba 2013

Folha de aprovação

Camila dos Santos Sant'Anna

"Um Estudo de Sistemas *Fuzzy*: Modelo para estimar o Espalhamento da Tuberculose".

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus* Sorocaba

Sorocaba, 20/09/2013.

Orientadora Magda Peixoto
Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto

Membro 2 Wladimir Seixas
Prof. Dr. Wladimir Seixas

Membro 3 ______________________
Prof. Dr. Adílson José Vieira Brandão

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível. Por seu imenso amor, cuidado, misericórdia, ajuda, permissão e por ter me escolhido e me guiado nesse árduo caminho.

Ao meu amado e querido Amor Lindo, por seu amor, carinho, cuidado, estímulo, e incondicional apoio em todos os momentos da minha vida. Obrigada pelo seu amor que é tão precioso para mim. Te Amo!

Aos meus avós pela criação e por tudo o que fizeram por mim durante minha vida.

À minha amiga Mayra pela amizade e ajuda e correção do inglês deste trabalho.

À minha querida orientadora e coordenadora Magda por sua credibilidade, amizade, paciência, por seus conselhos, apoio e ajuda durante esses anos na graduação e pela excelente e indispensável orientação durante a confecção desse trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora Prof. Dr. Adilson Brandão, Prof. Dr. Wladimir Seixas, pela avaliação, dedicação e sugestões dadas no intuito de melhorar a qualidade deste trabalho. Também gostaria de agradecê-los pela dedicação e atenção e todo ensinamento dedicados durante as aulas ministradas ao longo de minha graduação.

À minha Best Friend Tiemi pela linda amizade que construímos, por todo apoio, pelas conversas, puxões de orelha, por todos os momentos que passamos juntas (bons e ruins) e pelas inúmeras risadas durante todos esses anos. Saiba que te amo muito e que você é uma pessoa muito importante para mim. Obrigada por tudo!

Aos colegas de curso pela companhia e convivência. Ao meu amigo Vitor pela amizade, apoio e pelas inúmeras risadas.

Aos professores do DFQM da UFSCar pela atenção e amizade, em especial aos professores Magda Peixoto, Wladimir Seixas, Silvia Carvalho, Antonio Venezuela, Paulo Oliveira e Geraldo Pompeu.

À Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba instituição que possibilitou a realização de minha graduação.

A todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente com meu crescimento e formação.

Meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Nos dias de hoje, onde cada vez mais o homem quer ter controle sobre o mundo que o cerca, é crescente o interesse por processos quantitativos para predizer fenômenos da realidade. Estes processos são, via de regra, obtidos por meio de modelos matemáticos. Os fenômenos biológicos estudados por meio da modelagem matemática fazem parte do ramo da ciência chamada *Biomatemática*.

Um sistema *fuzzy* é um sistema no qual a dinâmica é obtida através de um sistema baseado em regras *fuzzy*. Nesse trabalho pretende-se estudar conceitos básicos da Teoria *Fuzzy* e de sistemas baseados em regras *fuzzy*. A Teoria *Fuzzy* utiliza conceitos e técnicas relativamente novos e seu emprego tem grande potencial, uma vez que tal teoria tem se mostrado eficaz no tratamento de subjetividades características ao fenômeno estudado.

Através do estudo de sistemas baseados em regras *fuzzy* pretende-se elaborar um modelo matemático para estimar, ao longo do tempo, a quantidade de indivíduos infectados pela bactéria causadora da tuberculose.

ABSTRACT

Nowadays, when man increasingly wants to have control over the world that surrounds it, is growing interest in quantitative processes to predict phenomena of reality. These processes are usually obtained through mathematical models. The biological phenomena studied by mathematical modeling are part of the field of science called Biomathematics.

A Fuzzy System is a system in which the dynamics is obtained through a system based on fuzzy rules. This work intends to study basic concepts of Fuzzy Theory and systems based on fuzzy rules. Fuzzy Theory uses relatively new concepts and techniques and its use in inaccurate studies has great potential, since such a theory has been shown to be effective in the treatment of the studied phenomenonfeatures subjectivities.

Through the study of fuzzy rules-based systems, is intended to develop a mathematical model to estimate the amount of individuals infected over time by the bacterium that causes tuberculosis by one individual already infected in a population of susceptible individuals.

Sumário

Resumo 3

Abstract 4

Agradecimentos 6

Lista de figuras..7

Lista de tabelas..8

Introdução..9

1 Um pouco da história e conceitos básicos 12

1.1 Um breve relato através da História...12

1.2 Conceitos Básicos da Teoria *Fuzzy*....................................14

1.3 Operações com subconjuntos *Fuzzy*...16

1.4 O Conceito de α-nível...18

1.5 Princípios de Extensão 19

1.6 Relações *Fuzzy* 21

1.7 Conectivos Lógicos 21

2 Sistemas baseados em regras *fuzzy* 24

3 Aplicações 32

3.1 Introdução ao Problema..32

3.2 Formulação do Modelo Fuzzy...34

4 Considerações Finais...39

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...40

Lista de Figuras

1 Operações com subconjuntos Fuzzy 16

2 Imagem de um subconjunto *fuzzy* a partir do princípio de extensão de Zadeh para uma função *f (*Fonte:Barros e Bassanezi, 2011)..19

3 Defuzzificador Centro de Gravidade G(B)*(*Fonte:BARROS-BASSANEZI, 2011)..26

4 Esquema geral de um controlador *fuzzy*(Fonte: PEIXOTO-BARROS-BASSANEZI,2007)...27

5 Esquema para um sistema de controle humano na tarefa de lavar roupa.............29

6 Controlador *Fuzzy*..30

7Variáveis de entrada (tecido e sujeira) e variáveis de saída (tempo de lavagem)...31

8 Solução do controlador fuzzy: tempo de lavagem em função do tipo de tecido e tipo de sujeira..31

9 Método de Inferência de Mamdani e Centro de Gravidade................................32

10 Gráfico número de infectados no Brasil...36

11 Ajuste da curva...36

12 Sistema controle fuzzy para o modelo do espalhamento da tuberculose............37

13 Variáveis do sistema..36

14Superfície da Variação do espalhamento da Tuberculose.................................37

15 Modelo *fuzzy* comparado ao ajuste da curva com os dados reais.......................37

16 Estimativa para o número de casos...39

Lista de Tabelas

1 Estudantes e Grau de Estudo..16

2 Operações com subconjuntos *fuzzy*...19

3Taxa de Incidência de Tuberculose no Brasil (Fonte:[2])...................................35

Introdução

Nos dias de hoje, onde cada vez mais o homem quer ter controle sobre o mundo que o cerca, é crescente o interesse por processos quantitativos para predizer fenômenos da realidade. Estes processos são, via de regra, obtidos por meio de modelos matemáticos. Os fenômenos biológicos estudados por meio da modelagem matemática fazem parte do ramo da ciência chamada *Biomatemática*. Muitos dos modelos da Biomatemática são adaptações ou interpretações de princípios das ciências físicas, principalmente quando utilizam-se da Lei de Ação das Massas em meios homogêneos. Este procedimento é utilizado nos principais modelos de interação entre espécies como os de Competição, Predação e Epidemiologia (EDELSTEIN-KESHET, 1987; BASSANEZI, 2002 e BASSANEZI-FERREIRA, 1988).

Os modelos da Biomatemática mais utilizados, e que servem de paradigmas em novos estudos, têm sido os clássicos modelos determinísticos. Tais modelos utilizam-se, via de regra, das equações diferenciais, de diferenças ou integro-diferencial. Este é o caso do clássico modelo de Lotka-Volterra (1926) para descrever a dinâmica do número de presas (x) interagindo com certo número de predadores (y):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \tag{1}$$

onde a, b, α e β são constantes positivas, sendo a a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e α e β os coeficientes de interação entre as duas espécies. Neste exemplo, os parâmetros α e β são de difíceis avaliações quantitativas. Lotka (1926) propõe que o parâmetro α, por exemplo, seja a probabilidade de uma presa ser encontrada e predada, supondo que todos os encontros são equiprováveis. Levando-se em conta que, tanto as habilidades das presas quanto as dos predadores são diferentes para indivíduos distintos, seria mais realista se α fosse representado por uma distribuição de probabilidades. Neste caso, o modelo (1) tornar-se-ia mais representativo para o fenômeno. Também os modelos clássicos de transmissão direta, em Epidemiologia, têm sido bastante estudados. Os primeiros modelos matemáticos deste tipo foram propostos por Kermack e McKendric (1927) através de equações diferenciais. A principal hipótese nestes modelos é que a razão de transmissão da doença é proporcional ao número de encontros entre indivíduos suscetíveis e infectados.

As equações de Kermack e McKendric, para o modelo do tipo *SI*, ou seja, para doenças que não remove indivíduos da população e também não há cura, são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI \end{cases} \tag{2}$$

onde S e I representam a proporção de indivíduos suscetíveis e infectados respectivamente e β é o coeficiente de transmissão da doença.

O modelo (2) acima pré-supõe homogeneidade tanto na classe dos suscetíveis quanto na dos infectados, no sentido que todos os indivíduos têm mesma chance tanto de transmitir como de ser infectado. No entanto, é claro que essa é uma simplificação da realidade. Por exemplo, de acordo com especialistas, indivíduos com baixíssima carga viral têm menos chance de infectar que aqueles com carga viral alta. Também indivíduos com baixa resistência têm mais chance de adquirir a doença que aqueles com alta resistência. Aqui surge a questão, o que significa carga viral *baixa*? E *alta* resistência? Esses são termos incertos e podem ser modelados de acordo com especialistas do fenômeno de interesse. Essas são incertezas tipicamente linguísticas e que, portanto, fogem à modelagem tradicionalmente proposta pela teoria estocástica. Muitas das incertezas que encontramos nos fenômenos são provenientes apenas da subjetividade da nossa linguagem. Esse é o caso típico de alguns procedimentos adotados em Biomedicina para diagnosticar e controlar alguma doença em paciente. Por exemplo, para se controlar determinada doença, observam-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. A gravidade destes sinais indicará o procedimento médico a ser adotado. O termo "gravidade" é subjetivo no sentido de apresentar graduações. Pois bem, incertezas devido à gradualidade são tipicamente tratadas por meio de métodos *fuzzy* (ORTEGA et al, 1997). No entanto, termos incertos como estes, têm sido tratados por meio da Teoria *Fuzzy* (BARROS e BASSANEZI, 2011), que é o principal objetivo desse trabalho.

Nossa principal proposta neste trabalho de conclusão de curso se refere ao estudo de incertezas e seus tratamentos matemáticos, através do estudo de conceitos básicos da Teoria *Fuzzy,* mais especificamente *Sistemas Baseados em Regras Fuzzy.* Daremos ênfase aqui aos métodos *fuzzy*uma vez que a aluna não estudou este conteúdo em seu curso de graduação. Entendemos que o estudo de s*istemas fuzzy* irá complementar a formação.

A Teoria *Fuzzy* tem sido uma ferramenta com fundamentação teórica para se estudar quantitativamente fenômenos onde aspectos de gradualidades (e, portanto de qualidades) são julgados fundamentais para seu modelamento matemático (BARROS-BASSANEZI, 2011).

Os conceitos e técnicas da Teoria *Fuzzy* são relativamente novos e seu emprego em Biomatemática tem grande potencial, uma vez que tal teoria tem se mostrado capaz de incorporar subjetividades inerentes ao fenômeno estudado.

Ao final, elaborou-se um modelo matemático utilizando um sistema baseado em regras *fuzzy* para estimar a quantidade, ao longo do tempo, de indivíduos infectados pela bactéria causadora da tuberculose.

O modelo matemático foi desenvolvido utilizando-se o software *MatLab*, que possui ferramenta (*Toolbox Fuzzy*) que possibilita trabalhar com sistemas *fuzzy*.

Capítulo 1 – Conceitos Básicos da Teoria *Fuzzy*

1.1 Um breve relato através da História

Ao longo do tempo, filósofos e pesquisadores têm se preocupado com questionamentos a respeito de incertezas. Entre esses questionamentos está a busca da verdade, do que é e do que existe de fato, desde a Grécia Antiga, quando os gregos lançaram a questão "Transformação ou Pertinência?", fazendo referência às duas dimensões do pensamento.

Os filósofos procuravam fazer afirmações que sintetizavam seus pensamentos sobre o universo na tentativa de explicar as coisas que existiam nele.

Para Parmênides de Eléia (VI – V a.C), "a única coisa que existe é o ser – que é o mesmo que pensar". O ser é imutável e imóvel, uno e contínuo, idêntico a si mesmo. Já os sofistas interpretam Parmênides concluindo a impossibilidade do falso discurso. Para eles não existem verdades absolutas e o homem deve buscar soluções para questões práticas. A maioria dos filósofos pré-socráticos acreditavam que havia algo externo e imutável por detrás do vir-a-ser, e que esse externo era a origem, a sustentação e o fim de todos os seres.

Contudo, a certeza e a incerteza foram amplamente debatidas pelos filósofos gregos; não interessando saber como as coisas são, pois tudo é relativo e depende da opinião de cada um a respeito. De acordo com Platão, o mais importante não é o conceito final, mas o caminho para se chegar até ele(BARROS e BASSANEZI, 2011).

A diferença fundamental entre os principais filósofos gregos está no fato de que para uns existe uma verdade objetiva, eterna, imutável, que depende dos seres humanos; no momento em que para outros, não existe nenhuma verdade absoluta, eterna e imutável e, sim, apenas o conhecimento relativo aos nossos sentidos. Diante de toda essa discussão, há uma grande dificuldade em se falar a respeito de certeza ou incerteza. Ao procurarmos no dicionário o significado da palavra incerteza, encontraremos termos como *subjetividade*, *imprecisão*, *aleatoriedade*, *dúvida,indecisão, ambiguidade*. O que se pode perceber é que, em relação a um tratamento quantitativo há uma distinção dos vários tipos de incertezas.

Matematicamente, a incerteza que provém da aleatoriedade de eventos ocupa lugar de destaque. Em contrapartida, algumas variáveis (variáveis linguísticas provenientes da necessidade de se distinguir qualificações por meio de graduações), utilizadas em nosso dia-a-dia e que são compreendidas linguisticamente, frequentemente permanecem fora do tratamento matemático tradicional. Por exemplo, alguns conceitos como alto, fumante, infeccioso, que são relacionados ao mundo sensível, são descritos através de graus que representam qualidades ou verdades subjetivas.

A Teoria *Fuzzy* tem contribuído exatamente nesses tipos de incertezas, fazendo uso de uma linguagem conjuntista, definindo, por exemplo, ao "conjunto" das pessoas *altas, fumantes ou infecciosas;* ou seja, que são definidos por meio de propriedades subjetivas.

A Teoria *Fuzzy* surgiu a partir de desafios como esse, no qual a propriedade que define o conjunto é incerta e tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações nas diversas áreas estudo, sobretudo na tecnologia.

A palavra "*fuzzy*" tem origem inglesa e significa incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso. Porém, nenhuma dessas traduções contempla o sentido amplo da palavra. Além disso, em quase todos os países a palavra *fuzzy* tem sido utilizada sem tradução para a língua pátria, salvo exceções como França e alguns países latinos.

A Teoria *Fuzzy* foi introduzida pelo matemático Lofti Asker Zadeh em 1965 (BARROS e BASSANEZI, 2011) com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como "aproximadamente", "em torno de", entre outros.

Ao conseguir controlar uma máquina de vapor usando a teoria de Zadeh em 1974, o professor Mamdani da Queen Mary College- Universidade de Londres, aplicou o raciocínio *fuzzy*.

1.2 Conceitos Básicos

Para a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de qualquer conjunto clássico (ou conjunto crisp) pode ser caracterizado por uma função característica e que é definida por:

Definição 1: Seja U um conjunto e A um subconjunto de U. A função característica de A é dada por:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}$$

Tal função, cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0,1\}$ indica quando um elemento $x \in U$ pertence ou não a A. Dessa forma, a função característica descreve completamente o conjunto A, uma vez que indica quais elementos do conjunto U são elementos de A.

Entretanto, existem casos em que a pertinência entre os elementos desse conjunto não é precisa. Diante disso, Zadeh formulou um subconjunto *fuzzy*, através da ampliação do conjunto imagem da função característica que passa então a ser todo o intervalo [0,1].

Definição 2: Seja U um conjunto (clássico). Um subconjunto *fuzzy* F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0,1],$$

chamada função de pertinência do subconjunto*fuzzy* F.

O valor $\varphi_F \in [0,1]$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto *fuzzy* F; $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$ indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto *fuzzy* F.

Um subconjunto *fuzzy* F é composto de elementos x de um conjunto clássico U, decorrentes de um valor de pertinência a F, dado por $\varphi_F(x)$. Assim, um subconjunto *fuzzy*F de U é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), com\, x \in U\}$$

Além disso, temos o subconjunto clássico de U definido por:

$$supp\ F = \{\, x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

denominado suporte de F tem papel fundamental na interrelação entre as teorias de conjuntos clássica e *fuzzy*.

Exemplo 1

Tabela 1 – Estudantes e Grau de Estudo

Estudantes	Grau de Estudo
B =Bia	0,25
C = Camila	0,25
D = Daniel	0,8

Os dados da tabela podem ser representados como:

$$F = \frac{0,25}{B} + \frac{0,25}{C} + \frac{0,8}{D}$$

É importante destacar que o sinal + não representa uma soma, mas sim um modo de relacionar os elementos do conjunto *fuzzyF*.

A forma geral de representar o conjunto *fuzzy F* quando U é finito é:

$$F = \sum \varphi_F(x)/x$$

Também podemos definir a cardinalidade de um conjunto *fuzzy* como sendo a soma dos graus de pertinência do conjunto, representado da seguinte forma:

$$card(F) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i)$$

Exemplo 2

Seja o conjunto U = {1,2,3,4,5,6}, representado como

$$F = \frac{0,1}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,4}{5}$$

$$card\ (F) = 0,1 + 0,3 + 0,6 + 1,0 + 0,4 = 2,4$$

Exemplo 3(Números naturais pequenos)

Considere o subconjunto *fuzzy F* dos números naturais pequenos

$$F = \{n \in N : n \text{ é } pequeno\}$$

O número 0 (zero) pertence a esse conjunto? E o número 1000?

Na Teoria *Fuzzy*, poderíamos dizer que ambos pertencem a F, porém com diferentes graus, dependendo da função de pertinênciaφ_F que caracteriza o subconjunto *fuzzy F*. A função de pertinência associada a *F* deve ser "construída" de forma coerente com o termo "pequeno" (BARROS e BASSANEZI, 2011).

Uma possibilidade para a função de pertinência de *F* é

$$\varphi_F(n) = \frac{1}{n+1}$$

Logo, podemos dizer que o número 0 pertence a *F* com grau de pertinência $\varphi_F(0) = 1$, enquanto que 1000 pertence a *F* com grau de pertinência$\varphi_F(1000) = 0,001$. Ou seja, quanto mais longe do 0, menos "pequeno" ele será.

Neste caso, a escolha da função φ_F foi feita de maneira arbitrária, apenas levando-se em conta o significado da palavra "pequeno".

1.3 Operações com subconjuntos *Fuzzy*

Sejam *A* e *B* dois subconjuntos *fuzzy* de *U,* com funções de pertinência indicadas respectivamente por φ_A e φ_B. Vamos definir as operações de união, interseção e complementar desses conjuntos.

Vamos dizer que *A* é subconjunto *fuzzy* de *B* e escrever $A \subset B$, se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$ para todo $x \in U$.

É importante lembrar que o conjunto vazio $(\emptyset)$ tem função de pertinência $\varphi_\emptyset(x) = 0$, enquanto que o conjunto universo (*U*) tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$, para todo $x \in U$. Dessa forma, pode-se dizer que $\emptyset \subset A$ e que $A \subset U$ para todo *A*.

Definição 3: A união entre *A* e *B* é o subconjunto *fuzzy* de *U* cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

Definição 4: A interseção entre *A* e *B* é o subconjunto *fuzzy* de *U* cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A\cap B}(x) = min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}$$

Definição 5: O complementar de *A* é o subconjunto *fuzzy* *A'* de *U* cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \ \ x \in U$$

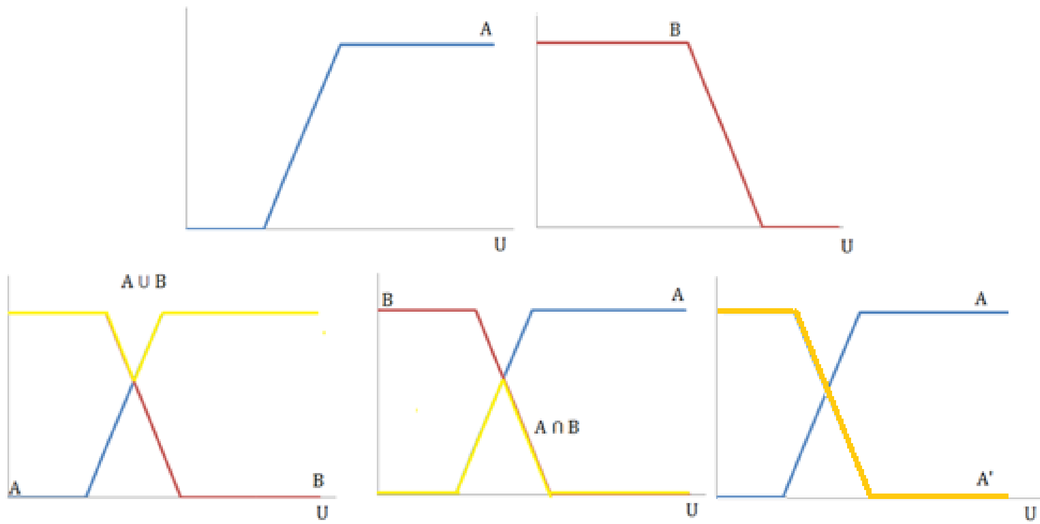

Figura 1 – Operações com subconjuntos *Fuzzy*

Exemplo 4 (Conjunto *fuzzy*dos febris e/ou mialgia)

Seja o conjunto U composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3 e 4. Sejam ainda, A e B os subconjuntos *fuzzy* que representam os pacientes com febre e mialgia (dor muscular), respectivamente.

A tabela abaixo ilustra as operações união, interseção e completamento.

Tabela 2 – Operações com subconjuntos *fuzzy*.

Paciente	Febre: A	Mialgia: B	∪ *B*	∩ *B*	A'	B'
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,4
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,8
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Não podemos deixar de mencionar uma classe especial de conjuntos crisps que está estreitamente ligada com cada subconjunto *fuzzy*. Esses conjuntos crisps indicam limiares das incertezas representadas por cada conjunto *fuzzy*.

1.4. O conceito de $\propto -nível$

Entendemos por $\propto -nível$ de A, o conjunto clássico dos elementos x pertencentes a um conjunto U tais que estão em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível $\propto \in [0,1]$ que define aquela classe. Uma vez que um subconjunto *fuzzy* *A* de *U* é “formado” por elementos de *U* com certa ordem (hierarquia) que é traduzida através de classificação por graus. Tal conjunto é denotado por $[A]^{\propto}$.

<u>Definição 6 ($\propto -nível$):</u> Seja *A* um subconjunto *fuzzy* de *U* e $\propto \in [0,1]$. O $\propto -nível$ de *A* é o subconjunto clássico de *U* definido por

$$[A]^{\propto} = \{x \in U: \varphi_A(x) \geq \propto\} \quad \text{para} < \propto \leq 1$$

Exemplo 5 ($\propto -nível$):

Seja *A* um subconjunto *fuzzy* dos números reais representado por

$$A = \frac{0{,}1}{1} + \frac{0{,}2}{2} + \frac{0{,}25}{3} + \frac{0{,}7}{5} + \frac{0{,}9}{8} + \frac{1}{10}$$

$0{,}15 \ - nível \ de \ A?$

$[A]^{0{,}15} = \{2{,}3{,}5{,}8{,}10\}$

<u>Definição 7:</u> Suporte de um conjunto $fuzzy\ A$ são todos os elementos de U que tem grau de pertinência diferente de zero em A e denotamos por $supp\ (A)$

$$supp(A) = \{x \in U;\ \varphi_A(x) > 0\}.$$

Vale destacar que o nível zero de um subconjunto *fuzzy A* é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de *U* que contém o conjunto suporte de *A*. Matematicamente, $[A]^0$é o fecho do suporte de A e é indicado por $\overline{supp}A$.

Faremos agora, menção ao Princípio de Extensão, que nada mais é do que um método utilizado para estender operações típicas de conjuntos clássicos.

1.5. Princípio de Extensão de Zadeh

O método de extensão proposto por Zadeh também conhecido como Princípio de Extensão, surgiu da necessidade de se estender conceitos da teoria dos conjuntos clássica para a teoria dos conjuntos *fuzzy*, com a finalidade de estender conceitos matemáticos não-*fuzzy* em *fuzzy*.

O princípio de Extensão de Zadeh para uma função $f: X \rightarrow Z$ tem por objetivo indicar como será a imagem de um subconjunto *fuzzy* A de X por meio de f.

<u>Definição 8(Princípio de Extensão de Zadeh) :</u> Seja uma função $f: X \rightarrow Z$ e A um subconjunto *fuzzy* de X. A extensão de Zadeh de f é a função $\hat{f}$ que, aplicada a A, fornece o subconjunto *fuzzy* $\hat{f}(A)$de Z, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}_A}(z) = \begin{cases} supp\ \varphi_A(x) & se\ \{x: f(x) = z\} \neq \emptyset \\ 0 & se\ \{x: f(x) = z\} = \emptyset \end{cases}$$

O processo gráfico para obtenção $\hat{f}\ de\ f$ é ilustrado a seguir.

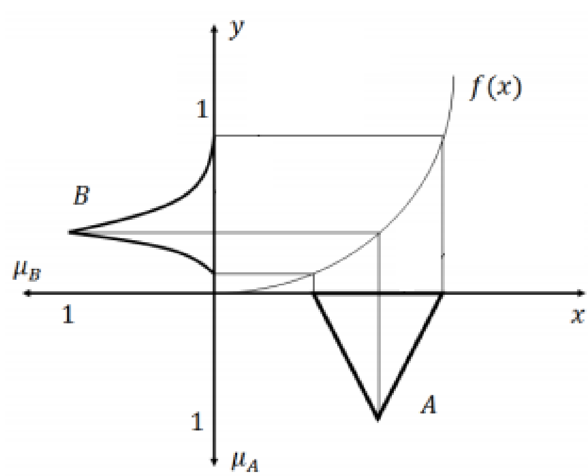

Figura 2 – Imagem de um subconjunto *fuzzy* a partir do princípio de extensão de Zadeh para uma função *f*.

Exemplo 6: Seja $f: \mathbb{R} \text{ X } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f\ (x,y) = x + y$. Considere os subconjuntos *fuzzy* finitos de $\mathbb{R}$.

$X = \{1,2,3,4\}$

$Y = \{1,2,3,4,5,6\}$

$z = f(x) = x + 2$

$A = \frac{0,1}{1} + \frac{0,2}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{1}{4}$

$\varphi_{\hat{f}_A}(z)$?

Solução:

$\varphi_{\hat{f}_A}(z) = supp\ A(x)$

$\varphi_{\hat{f}_A}(3) = \max\big(A(1)\big) = 0{,}1$

$\varphi_{\hat{f}_A}(4) = \max\big(A(2)\big) = 0{,}2$

$\varphi_{\hat{f}_A}(5) = \max\big(A(3)\big) = 0{,}7$

$\varphi_{\hat{f}_A}(6) = \max\big(A(4)\big) = 1$

Portanto,

$\varphi_{\hat{f}_A}(z) = \frac{0,1}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,7}{5} + \frac{1}{6}$

1.6. Relações *Fuzzy*

Matematicamente, o conceito de relação *fuzzy* é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos, estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.

Definição 9: Uma relação *fuzzy* R sobre $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ é qualquer subconjunto *fuzzy* de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Assim, uma relação *fuzzy* R é definida por uma função de pertinência $\varphi_R: U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to [0,1]$.

Definição 10: O produto cartesiano *fuzzy* dos subconjuntos *fuzzy* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ de $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, respectivamente, é a relação *fuzzy* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

Onde $\wedge$ representa o mínimo.

1.7. Conectivos Lógicos

Na Matemática Clássica, os estudos relacionados à Lógica são realizados com o estudo dos conectivos "*e*", "*ou*" e "*implicação*". Esses conectivos são utilizados em sentenças como:

"Se a está em *A* e b está em *B*, **então** c está em *C* **ou** d **não** está em *D*". (1.6)

De acordo com BARROS e BASSANEZI (2011) os valores lógicos para cada conectivo são estudados através de tabelas verdades. Dessa forma, o valor lógico de uma sentença, formada a partir de duas ou mais proposições é formada por meio de composições das tabelas verdades dos conectivos presentes nessa tabela.

Para avaliar logicamente a expressão (1.6) através dos conectivos, admitimos que a mesma somente poderia assumir os valores 0 ou 1. Vamos, agora, analisar logicamente esta expressão admitindo que os conjuntos de (1.6) sejam *fuzzy*.

Primeiramente, devemos atribuir um valor que indique o quanto a proposição "a está em *A*" é verdadeira, com *A* *fuzzy*, sendo que um elemento a pode pertencer a *A* com valores no intervalo $[0,1]$. Para realizar a análise lógica dos conectivos no sentido *fuzzy*, devemos estendê-los. Essas extensões são obtidas por meio das normas e conormas.

Definição 11 (t-norma): O operador Δ: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. $\Delta(x,y) = x\Delta y$, é uma t-norma se satisfazer as seguintes condições:

1) Elemento Neutro: $\Delta(1,x) = 1\Delta x = x$;
2) Comutatividade: $\Delta(x,y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y,x)$;
3) Associatividade: $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$;
4) Monotonicidade: se $x < u$ e $y < v$, então$x\Delta y < u\Delta v$.

A operação t-conorma estende o operador $\wedge$ que modela o conectivo "**e**".

Exemplos:

- $\Delta_1(x,y) = \min\{x,y\}$

  Demonstração: Óbvio.

- $\Delta_2(x,y) = xy$

  Demonstração: Considerando as propriedades da multiplicação usual:

  1) Elemento Neutro: $\Delta(1,x) = 1x = x$;
  2) Comutatividade: $\Delta(x,y) = xy = yx = \Delta(y,x)$;
  3) Associatividade: $x\Delta(y\Delta z) = x(yz) = (xy)z = (x\Delta y)\Delta z$;
  4) Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, multiplicando ambas temos: $xy \leq uv = x\Delta y \leq u\Delta v$.

Definição 12 (t-conorma): O operador ∇: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. $\Delta(x,y) = x\nabla y$, é uma t-conorma se satisfazer as seguintes condições:

1) Elemento Neutro: $\nabla(0,x) = 0\nabla x = x$;
2) Comutatividade: $\nabla(x,y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y,x)$;
3) Associatividade: $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$;
4) Monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$,então$x\nabla y \leq u\nabla v$;

O operador t-conorma ∇: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ estende o operador $\vee$ do conectivo "**ou**".

Exemplos:

- $\vee_1(x,y) = \max\{x,y\} = x \vee y$

  Demonstração: Óbvio.

- $\nabla_3(x,y) = x + y - xy.$

  Demonstração: Considerando as propriedades de soma, subtração e multiplicação usuais:

1) Elemento Neutro: $\nabla(0,x) = 0 + x - 0x = x;$
2) Comutatividade:

   $\nabla(x,y) = x + y - xy = (x+y) - (xy) = (y+x) - (yx) = y + x - yx = \nabla(y,x);$

3) Associatividade: $x\nabla(y\nabla z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) =$

   $x + y + z - yz - xy - xz - xyz =$

   $(x + y - (xy)) + z - (xz + yz + xyz) =$

   $(x + y - yx) + z - (x + y + (xy))z =$

   $(x + y - yx) + z - (x + y - yx)z = (x\nabla y)\nabla z;$

4) Monotonocidade: se $x \leq u \; e \; y \leq v, então \; x\nabla y \leq u\nabla v$:

   $se \; x \leq u \; e \; y \leq v \Rightarrow x + y \leq u + v$ (1)

   $se \; x \leq u \; e \; y \leq v \Rightarrow xy \leq uv$ (2)

   Subtraindo (1) e (2) temos:

   $x + y - xy \leq u + v - uv$

(cqd).

Capítulo 2– Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*

"Há e haverá muitas tarefas que os homens podem cumprir com facilidade, que vão além da capacidade de qualquer computador, qualquer máquina e qualquer sistema lógico que podemos conceber nos dias de hoje."

(Loft A. Zadeh)

Os mais diversos sistemas do mundo real são controlados pelas ações humanas através de informações imprecisas.

Cada indivíduo recebe informações que são interpretadas de acordo com seus parâmetros para mais tarde decidir a atitude a ser tomada. O controle e a execução de tarefas devem seguir uma sequência de "ordens" linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem decodificadas pelo controlador.

As tarefas nos controladores *fuzzy* são comandadas através de termos da linguagem usual, relacionados a alguma variável de interesse, e nesse aspecto variáveis linguísticas desempenham papel fundamental. Tais termos, traduzidos por conjuntos *fuzzy*, são utilizados para transcrever a base de conhecimentos através de uma coleção de regras *fuzzy* (base de regras *fuzzy*). A relação *fuzzy* é obtida a partir dessa base de regras, com a finalidade de produzir a saída (resposta, ação) para cada entrada (estado, condição).

Geralmente, para um sistema *fuzzy* qualquer cada entrada *fuzzy* corresponde a uma saída fuzzy. Essa característica também é encontrada nos controladores *fuzzy*. Porém, se a entrada for crisp (ponto de R^n), espera-se que a saída também seja crisp (ponto de R^m). Neste caso, um sistema *fuzzy* é uma função de $R^n \text{em} R^m$ construída de maneira específica.

Um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF) possui quatro componentes: um processador de entrada (*fuzzyficador*), uma base de regras, um método de inferência e um processador de saída (*defuzzyficador*).

Método de *Fuzzyficação*: Neste estágio as entradas do sistema são modeladas por conjuntos *fuzzy* com seus respectivos domínios. É nele que a importância de especialistas do fenômeno a ser modelado é justificada. Juntamente com esses especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto *fuzzy* envolvido no processo. Mesmo que a entrada seja crisp, ela será *fuzzyficada* por meio de sua função característica.

Base de regras: Faz parte do "núcleo" do controlador *fuzzy*. É composto pelas proposições *fuzzy* e cada uma dessas proposições é descrita de acordo com as informações de um especialista. Neste ponto, as variáveis e suas classificações linguísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos *fuzzy*, ou seja, funções de pertinência. Nos sistemas *fuzzy* cada proposição tem forma

Se "estado" **então** "resposta"

sendo cada "estado" e cada "resposta" valores assumidos por variáveis linguísticas, que por sua vez são modelados por conjuntos *fuzzy*. Os conjuntos *fuzzy* que compõem o "estado" são chamados de antecedentes. Em contrapartida, os conjuntos *fuzzy* que compõem a "resposta" são chamados consequentes. Particularmente, cada regra dos controladores *fuzzy* tem a forma:

Se "condição" **então** "ação".

Em síntese, a base de regras cumpre o papel de "traduzir" matematicamente as informações que formam a base de conhecimentos do sistema *fuzzy*. E, quanto mais precisas forem tais informações, menos *fuzzy* (mais crisp) será a relação *fuzzy* que representa a base de conhecimentos.

Método de inferência *fuzzy*: Cada proposição *fuzzy* é "traduzida" matematicamente por meio das técnicas da lógica *fuzzy*. Basicamente, é dele que depende o sucesso do controlador *fuzzy*, uma vez que ele fornecerá a saída (controle) *fuzzy* a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada *fuzzy*.

De acordo com BARROS e BASSANEZI (2011), Mamdani propôs do ponto de vista teórico, uma relação *fuzzy* binária M entre x e u para modelar matematicamente a base de regras.

Tal relação recebeu o nome de "Método de Mamdani' e tem por base a regra de composição de inferência max-min e segue o seguinte procedimento:

- Em cada regra R_j, da base de regras *fuzzy,* a condicional "**se** *x* é A_j **então** *u* é B_j" é modelada pela aplicação $\wedge$ (mínimo) que, erroneamente, costuma ser denominada por implicação de Mamdani ($\wedge$ não é uma implicação *fuzzy*, pois não preserva a tabela de uma implicação clássica);
- Adota-se a t-conorma $\wedge$ (mínimo) para o conectivo lógico "***e***";
- Para o conectivo lógico "ou" adota-se a t-conorma $\vee$ (máximo) que conecta as regras *fuzzy* da base de regras.

Formalmente, a relação *fuzzy* *M* é o subconjunto *fuzzy* de *X*×*U* cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x,u) = \max_{1 \le i \le r} \left(\varphi_{R_1}(x,u) \right) = \max_{1 \le i \le r} \left[\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u) \right],$$

Sendo *r* o número de regras que compõem a base de regras e, A_j e B_j são os subconjuntos *fuzzy* da regra *j*. Os valores $\varphi_{A_j}(x)$ e $\varphi_{B_j}(u)$ são interpretados como os graus com que *x* e *u* estão nos subconjuntos *fuzzy* A_j e B_j, respectivamente.

Métodode *defuzzyficação*: Processo que permite representar um conjunto *fuzzy* por um valor crisp (número real).Veremos a seguir métodos para *defuzzyficar* a saída a fim de se obter um número real para esses casos.

- **Centro de Gravidade $(G(B))$, Centróide ou Centro de Áreas:** Método semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados. Porém, aqui os valores $\varphi_B(u_i)$ indicam o grau de compatibilidade do valor u_i com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy* B.Este método fornece a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto *fuzzy*. Os domínios discreto e contínuo são representados pelas equações a seguir, respectivamente.

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^{n} u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_B(u_i)} \qquad (1)$$

$$G(B) = \frac{\int u \varphi_B(u)\, du}{\int \varphi_B(u)\, du} \qquad (2)$$

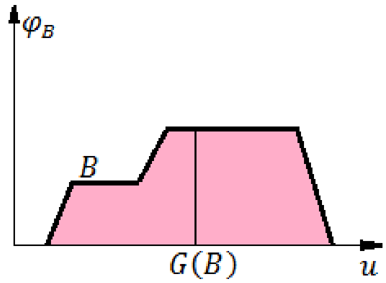

Figura 3: Defuzzificador Centro de Gravidade G(B)

Este é o método utilizado nesse trabalho.

- **Centro de Máximos $(\boldsymbol{C(B)})$:** Neste método são levadas em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito fuzzy em questão. Neste caso, tem-se:

$$C(B) = \frac{i+s}{2} \quad (3)$$

sendo,

$i = inf\left\{u \in \mathbb{R}: \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\right\}$ e $s = sup\left\{u \in \mathbb{R}: \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\right\}$

- **Média dos Máximos $(\boldsymbol{M(B)})$**

É mais utilizado como *defuzzyficador* para domínios discretos. É dado por:

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{\sum i} \quad (4)$$

sendo,

u_i os elementos de maior pertinência ao conjunto *fuzzy* *B*, ou seja, para cada *i* toma-se

$$\varphi_B(u_i) = \max_u \varphi_B(u).$$

A figura 7, a seguir, representa um esquema geral de um controlador *fuzzy*.

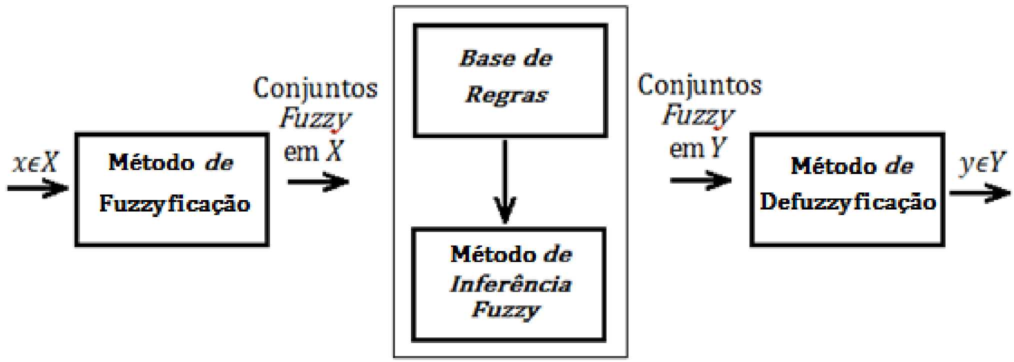

Figura 4: Esquema geral de um controlador *fuzzy*.

Exemplo 9: Um especialista é capaz de lavar roupas a ponto de deixa-las limpas, segundo seu conceito de limpeza.

O esquema abaixo (figura 5) representa de uma maneira simplificada, as ações do especialista (controlador humano) na execução da tarefa de lavar roupas.

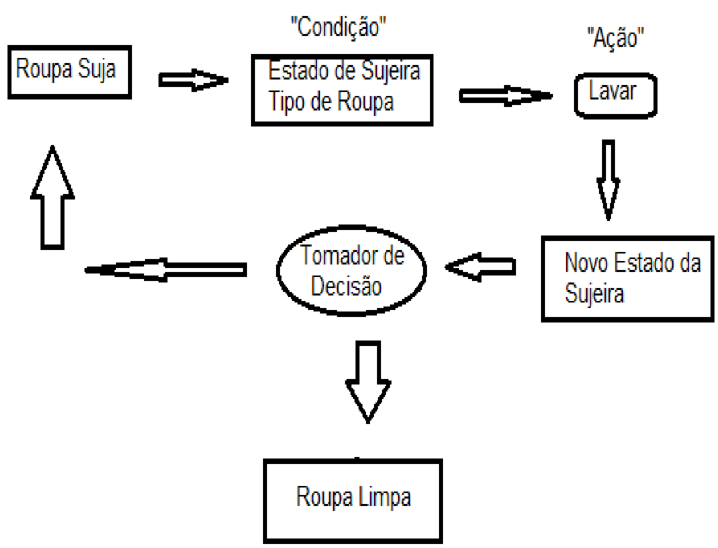

Figura 5: Esquema para um sistema de controle humano na tarefa de lavar roupa.

Nesse exemplo pode-se observar um possível caminho para automação de tarefas. As ordens a serem enunciadas por regras poderiam ser, por exemplo:

Quadro 1 – Regras de um sistema de automação na lavação de roupas.

R_1: *Se a roupa é "grossa" e a sujeira é "difícil", então lava-se "muito tempo".*

Ou

R_2: *Se a roupa é "grossa" e a sujeira é "fácil", então lava-se " em tempo médio".*

Ou

R_3: *Se a roupa é "fina" e a sujeira é "fácil", então lava-se " em pouco tempo".*

Ou

R_4: *Se a roupa é" fina" e a sujeira é difícil, então lava − s "em tempo médio".*

Nesse caso, o sistema baseado em regras *fuzzy* (Figura 6) possui duas variáveis de entrada (tecido e sujeira)e uma variável de saída (tempo de lavagem). A variável de entrada tecido é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {fino, grosso}, a variável de entrada sujeira é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {fácil, difícil} e a variável de saída tempo de lavagem é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {pouco, médio, muito} como ilustrado na Figura 5.

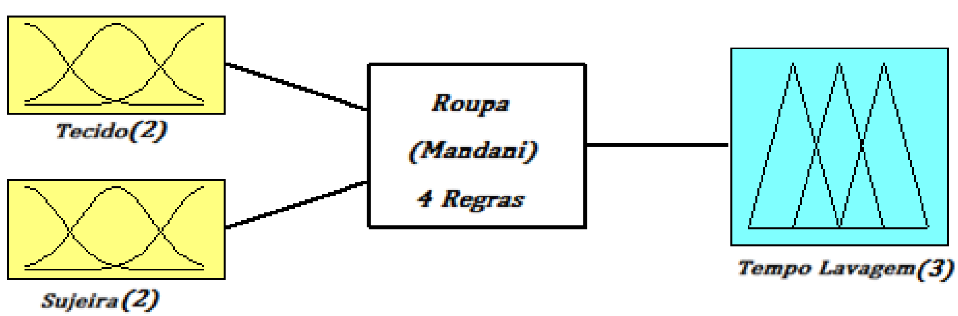

Figura 6: Controlador *Fuzzy*

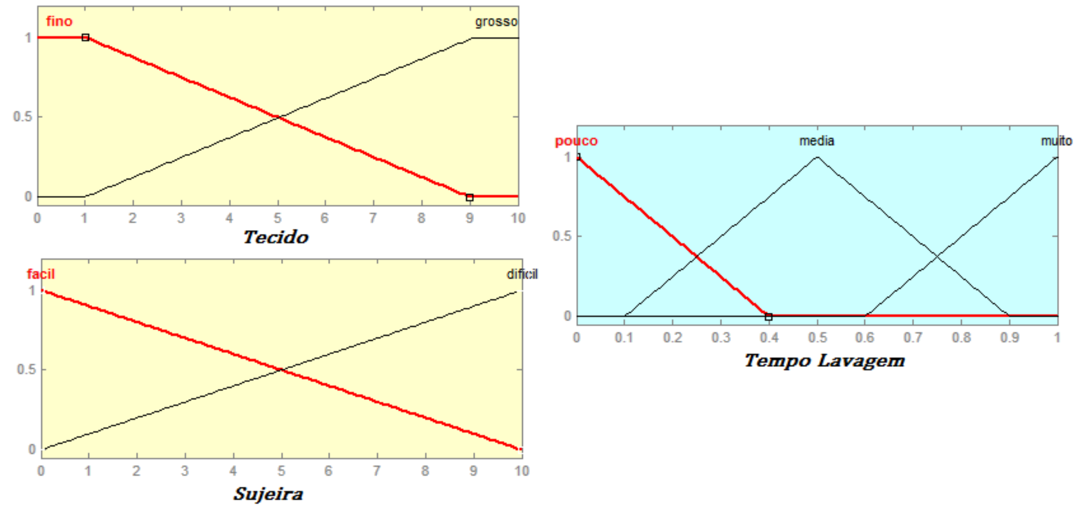

Figura 7: Variáveis de entrada (tecido e sujeira) e variáveis de saída (tempo de lavagem).

A saída obtida pelo sistema *fuzzy* está representada na Figura 6:

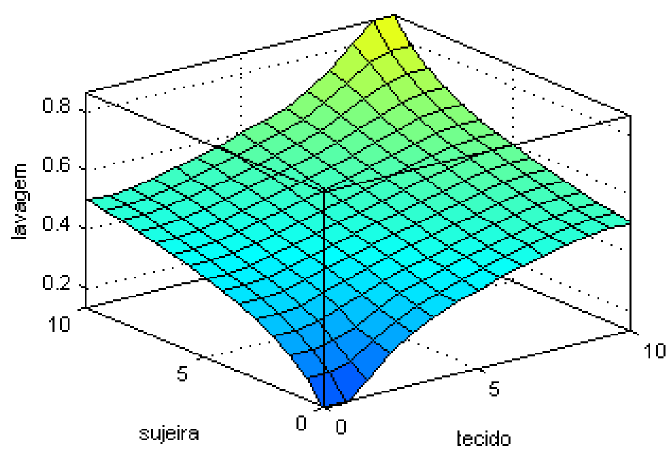

Figura 8: Solução do controlador fuzzy: tempo de lavagem em função do tipo de tecido e tipo de sujeira.

No exemplo 9 supõe-se que cada tarefa seja executada por um ser humano, logo não precisa de qualquer ferramenta matemática. Isso não ocorre com os controladores *fuzzy*. As variáveis em questão são: roupa (r) a ser lavada; sua sujeira (s) e o controle adotado (e), além de cada uma das classificações “grossa” ou “fina”, para a roupa, “fácil” ou “difícil” para a sujeira; “muito tempo”, “pouco tempo” ou “tempo médio”, para a ação de lavar, dever ser modelada por um conjunto *fuzzy*.

Por exemplo, para o tecido classificado como 3 (nota dada entre 0 e 10) e sujeira como 6 (nota entre 0 e 10), tem-se como saída, que representa o tempo de lavagem, o valor 0,469,ou seja, 47% do ciclo todo de lavagem da máquina (Figura 7).

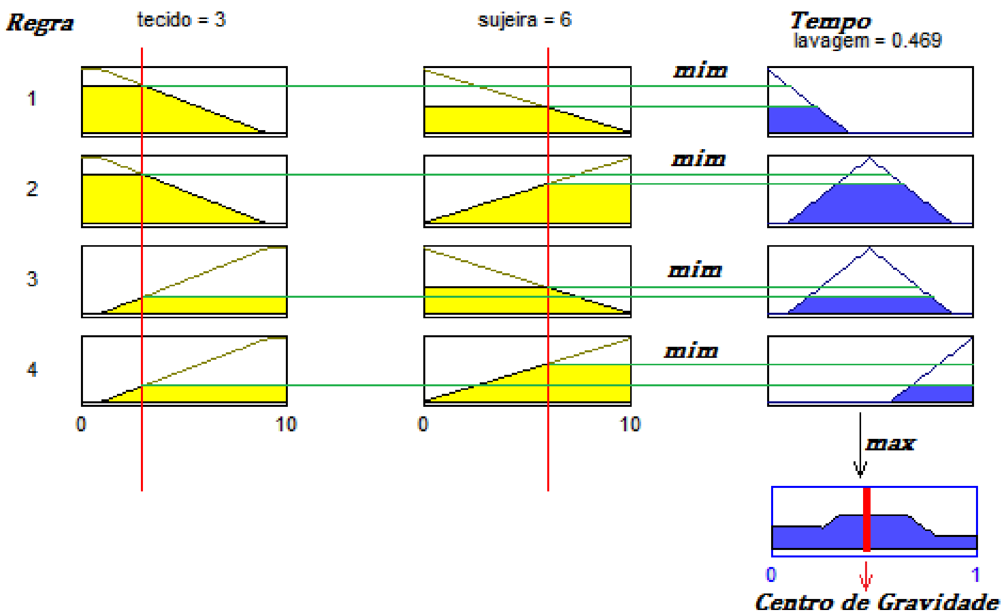

Figura 9: Método de Inferência de Mamdani e Centro de Gravidade

O exemplo "Roupa Suja" é um caso típico de um **SBRF**Tentativas para reproduzir estratégias de um controlador humano são dadas pelos **Controladores *Fuzzy*,** cuja finalidade é apenas de interpretação. Quando entradas e saídas representam respectivamente a "condição" e a "ação" correspondente a essa condição, os SBRF são denominados *Controladores Fuzzy*.

No próximo capítulo apresentamos um modelo matemático através de um sistema *fuzzy* para estimar a quantidade, ao longo do tempo de indivíduos infectados pela bactéria causadora da tuberculose.

Capítulo 3 – Aplicação: um estudo para Tuberculose

Inicialmente, foram estudados os conceitos básicos da Teoria *Fuzzy* visando o aprendizado, o entendimento e a capacitação para a elaboração de um modelo matemático da propagação da tuberculose em uma população de indivíduos suscetíveis utilizando um sistema baseado em regras *fuzzy*.

Tal modelo foi desenvolvido utilizando o software *MatLab*, que possui ferramenta (*Toolbox Fuzzy*) que possibilita trabalhar com sistemas baseados em regras *fuzzy*.

1.1 Introdução ao Problema

Anualmente, 1960 milhões de pessoas são infectadas, aproximadamente, com tuberculose em todo o mundo. Embora hoje esta doença tenha tratamento, ainda mata todos os anos 1,7 milhões de pessoas, principalmente na África e no sudeste da Ásia. Controlada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) e por outras organizações de saúde, e com tratamentos cada vez mais eficazes para doenças imunes, o número de casos mundiais vêm caindo consideravelmente em todos os continentes. No ranking mundial, o Brasil encontra-se na 19ª posição, em relação aos países com maior número de casos da doença.

A tuberculose (antigamente chamada de "peste cinzenta") ou "doença do peito" é uma das doenças infecciosas registradas há tempos e que até os dias de hoje continua a aflingir a humanidade. É causada pelo *Mycobacterium tuberculosis*, também conhecido como *Bacilo de Koch.* Estudos estimam que essa bactéria tenha evoluído a partir de outras bactérias do gênero *Mycobacterium*, há 40.000 anos.

A ocorrência dessa doença está diretamente relacionada à forma como se organizam seus processos de produção e reprodução, por esse motivo pode-se considerar como uma doença socialmente determinada. Tais processos estão associados ao modo de viver e trabalhar do indivíduo.

Tuberculose pulmonar é a forma mais frequente e generalizada da doença. Entretanto, o bacilo causador da tuberculose também pode afetar outros órgãos, como a laringe, os ossos e as articulações, a pele, os intestinos, os rins, os gânglios linfáticos e até o sistema nervoso.

Sua transmissão ocorre através de aerossóis produzidos por um indivíduo contaminado quando este tosse, fala, espirra ou cospe.

O primeiro sucesso genuíno de vacinação contra a tuberculose foi desenvolvido a partir de linhagens atenuadas da tuberculose bovina em 1906. Era a vacina BCG (Bacilo de Calmette e Guerin), que foi usada pela primeira vez em humanos em 18 de julho de 1921 na França.

Provavelmente, é a doença infecto-contagiosa que mais ocasiona mortes no Brasil. Estima-se, ainda, que mais ou menos 30% da população mundial esteja infectada, embora nem todos venham a desenvolver a doença.

Os principais sintomas da tuberculose são tosse por mais de três semanas, produção de catarro, febre, sudorese, cansaço, dor no peito, falta de apetite e emagrecimento.

Contudo, faz-se importante o estudo do comportamento dessa doença transmissível para a sua possível prevenção, controle e esclarecimento. Deste modo, é de grande valia a realização de estudos, como o proposto neste projeto, uma vez que será possível observar o comportamento do espalhamento de uma doença causada por uma bactéria em uma população. É, portanto, uma proposta relevante para saúde pública.

Para PEIXOTO e BARROS (2004)a epidemiologia tem por finalidade estabelecer, a partir dos estudos a cerca do fenômeno epidêmico, hipóteses matemáticas que quantifiquem os conhecimentos biológicos relacionados à transmissão de determinadas infecções, com o objetivo de estudar a evolução de epidemias.Em doenças onde a transmissão é direta, para que uma nova infecção ocorra, é necessário que haja indivíduos infectantes e suscetíveis na população para, então, propiciar condições favoráveis para a transmissão do agente infeccioso.

1.2Formulação do Modelo Fuzzy

Como observado acima, a Tuberculose é uma doença infecto-contagiosa cuja ocorrência está relacionada à forma como se organizam seus processos de produção e reprodução, considerada, dessa forma, como uma doença socialmente determinada, onde sua transmissão ocorre através de aerossóis produzidos por um indivíduo contaminado quando esse tosse, fala, espirra. Essas são características importantes do fenômeno que serão incorporados ao modelo.

Diante dessas características, o primeiro passo para a formulação do modelo foi a coleta de dados dos indivíduos infectados no Brasil, de acordo com a tabela a seguir:

Tabela 4: Taxa de Incidência de Tuberculose no Brasil

Série histórica da Taxa de Incidência de Tuberculose. Brasil, Regiões e Unidades Federadas de residência por ano de diagnóstico (1990 a 2012)

Região e UF	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Região Norte	72,1	69,2	73,0	70,6	66,0	60,8	61,5	58,2	54,0	52,2	51,0	51,2	51,0	50,0	50,6	47,2	45,9	45,3	46,3	47,6	44,5	45,1	45,0
Rondônia	68,6	64,4	94,2	65,9	59,1	57,9	55,9	47,6	42,2	54,1	39,8	39,8	37,4	37,6	35,9	35,3	28,7	29,7	32,2	38,1	29,2	34,5	34,5
Acre	87,6	79,5	88,2	85,5	63,8	67,4	75,9	66,0	34,2	0,6	57,9	56,6	52,0	50,8	45,3	39,9	51,3	40,1	40,3	46,3	42,0	46,2	45,5
Amazonas	94,6	93,7	91,7	93,3	90,9	87,1	84,5	79,9	79,8	79,2	73,8	78,4	71,1	67,1	68,9	64,5	65,4	67,1	71,1	67,0	65,8	60,8	67,3
Roraima	70,6	97,0	96,0	83,8	72,7	78,6	75,3	83,3	79,0	79,8	57,7	38,8	41,8	45,1	50,3	33,2	30,2	29,1	32,9	31,3	29,7	33,0	24,9
Pará	66,7	64,2	65,4	67,8	62,1	53,1	54,9	52,2	50,2	51,6	48,0	47,7	50,8	51,9	52,9	49,9	47,0	46,2	45,6	48,3	46,2	47,7	45,1
Amapá	71,5	65,0	52,3	56,7	63,6	61,3	53,8	51,0	51,1	2,7	47,4	38,9	48,8	39,5	40,5	38,7	37,4	38,3	38,2	35,0	28,1	32,4	29,2
Tocantins	47,0	36,2	39,6	34,0	38,3	38,2	43,1	45,7	32,8	28,5	21,4	22,6	22,3	17,7	17,5	16,2	17,6	15,3	13,4	15,6	13,0	13,0	13,5
Região Nordeste	61,5	59,4	57,4	64,9	64,8	63,3	56,2	53,0	53,3	55,6	47,6	46,0	44,1	46,1	45,9	45,4	40,7	38,8	38,6	38,4	35,1	35,6	35,8
Maranhão	81,6	72,4	68,4	64,5	64,7	69,9	61,7	62,6	57,1	63,3	52,0	46,0	47,0	44,7	44,9	45,2	41,1	39,6	35,1	34,0	30,8	31,8	28,8
Piauí	64,3	63,1	67,5	70,4	68,0	69,5	52,6	49,8	51,5	48,1	43,7	40,7	38,1	35,4	37,4	36,2	32,7	27,7	25,8	27,0	24,5	25,0	23,6
Ceará	74,1	66,2	59,5	68,8	68,2	67,0	58,2	53,3	51,8	55,8	46,0	47,0	46,9	50,5	49,0	49,4	42,9	42,0	45,3	45,0	40,7	40,8	40,3
Rio Grande do Norte	57,2	50,1	55,7	56,1	56,3	48,7	47,9	34,6	47,3	45,1	64,7	37,0	37,9	39,1	40,0	36,1	32,8	30,0	32,9	31,1	27,4	30,1	30,4
Paraíba	44,7	39,6	41,8	50,4	48,3	42,5	40,2	37,8	46,1	67,5	38,8	32,8	32,9	33,7	34,4	33,8	27,4	27,6	28,7	28,2	26,7	27,9	29,8
Pernambuco	53,0	52,1	53,8	62,7	61,4	70,1	58,3	53,5	53,8	54,0	48,1	47,6	50,0	52,8	54,2	52,7	47,8	47,5	48,1	47,3	44,2	45,5	49,8
Alagoas	51,1	56,0	54,5	51,1	48,0	42,6	44,1	41,5	38,1	43,9	40,9	39,9	39,7	41,0	40,1	41,7	37,4	38,2	38,4	37,5	35,0	33,6	34,5
Sergipe	45,6	41,6	41,2	42,2	40,9	42,2	39,4	36,5	36,4	38,1	30,8	23,9	24,8	28,1	25,8	34,4	29,7	24,8	29,4	28,3	24,4	27,0	24,4
Bahia	60,7	64,1	58,7	74,7	77,0	68,8	63,0	61,4	61,1	58,4	49,6	55,4	47,0	51,0	49,6	48,1	43,9	40,7	38,4	39,2	35,7	35,5	35,0
Região Sudeste	48,7	65,5	64,9	41,9	41,5	65,2	61,4	58,4	56,5	55,3	55,1	44,4	48,7	47,3	45,5	42,7	41,3	40,6	42,1	40,7	39,8	40,1	39,3
Minas Gerais	44,0	39,7	41,1	43,1	40,7	40,3	37,0	32,8	34,5	35,4	34,8	6,5	27,4	27,8	27,7	26,2	24,1	23,8	22,9	21,2	19,4	19,8	19,0
Espírito Santo	59,1	54,6	53,8	55,2	55,1	52,4	52,8	49,7	51,7	55,5	43,0	42,3	41,6	40,6	38,7	37,3	34,7	35,8	39,9	36,4	36,8	35,1	35,2
Rio de Janeiro	43,9	123,3	120,5	0,0	0,0	126,8	111,7	112,1	96,6	80,9	98,3	93,9	92,3	89,2	86,1	80,1	74,4	73,4	74,7	72,8	67,8	67,1	67,0
São Paulo	52,2	55,8	55,2	56,8	57,1	54,2	54,3	50,7	52,1	55,1	49,2	43,7	42,8	41,1	39,1	36,8	37,4	36,5	39,0	38,0	38,9	39,7	38,6
Região Sul	36,8	35,6	37,4	36,7	38,1	37,2	37,6	36,1	38,4	39,7	33,5	32,2	34,6	35,4	34,1	32,4	30,4	31,6	32,7	32,8	31,7	31,9	32,3
Paraná	28,4	29,9	32,9	29,2	29,3	26,5	27,2	24,6	27,8	32,7	24,0	27,2	28,6	29,0	26,1	26,1	23,5	24,7	24,0	22,5	22,5	22,0	20,9
Santa Catarina	27,6	25,8	27,3	28,5	31,2	30,0	29,7	28,4	30,7	33,5	25,2	24,8	27,6	28,1	26,7	25,3	25,8	26,1	27,6	26,6	26,8	27,4	29,2
Rio Grande do Sul	49,3	45,9	46,6	47,8	49,6	50,6	51,2	50,8	52,2	49,5	46,7	40,9	44,1	45,3	45,6	42,2	39,5	41,3	44,1	46,4	43,6	44,2	45,4
Região Centro-Oeste	41,7	40,9	44,5	42,2	39,2	38,1	36,0	38,6	35,0	35,0	30,6	28,7	26,3	27,1	24,7	25,3	24,0	23,0	23,2	22,1	22,0	22,3	24,6
Mato Grosso do Sul	55,6	57,1	56,3	60,1	52,2	52,4	46,2	51,0	46,2	47,6	42,6	39,7	35,8	40,6	39,3	39,5	33,9	35,4	37,9	38,4	33,2	36,6	37,7
Mato Grosso	52,6	45,8	73,7	55,9	51,6	47,1	48,0	55,8	52,2	59,2	48,0	47,5	40,5	39,6	35,4	39,9	40,3	34,9	37,2	32,9	37,5	36,2	42,3
Goiás	29,6	28,1	24,2	27,0	26,0	25,1	22,7	24,4	22,2	23,5	21,9	19,8	19,5	19,5	17,3	16,4	15,2	14,7	14,4	15,0	14,3	13,9	15,0
Distrito Federal	43,3	48,7	45,3	42,3	41,6	42,4	43,4	39,7	34,2	21,2	18,5	16,4	16,1	17,0	15,4	15,3	15,9	16,8	13,8	11,0	10,8	11,8	13,5
Brasil	51,8	57,9	57,8	49,8	49,3	58,4	54,7	52,2	51,3	51,4	47,8	42,8	44,4	44,4	43,4	41,5	38,7	37,9	38,8	38,1	36,4	36,8	36,7

Fonte: Ministério da Saúde. (http://portal.saude.gov.br)

Em seguida, utilizamos o *software Excel* para fazer um ajuste da curva do número total de infectados no Brasil nos últimos 22 anos, como mostra a figura 9.

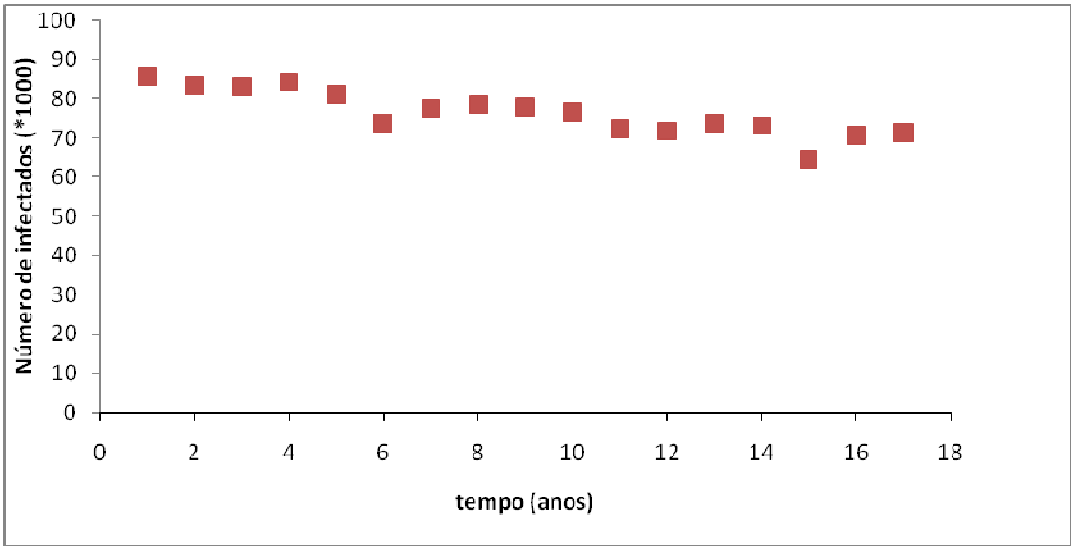

Figura 10: Gráfico número de infectados no Brasil

Inicialmente, podemos observar uma oscilação (sem período constante) associado a uma tendência exponencial e dessa forma ajustamos os dados reais para a função exibida na Figura 11.

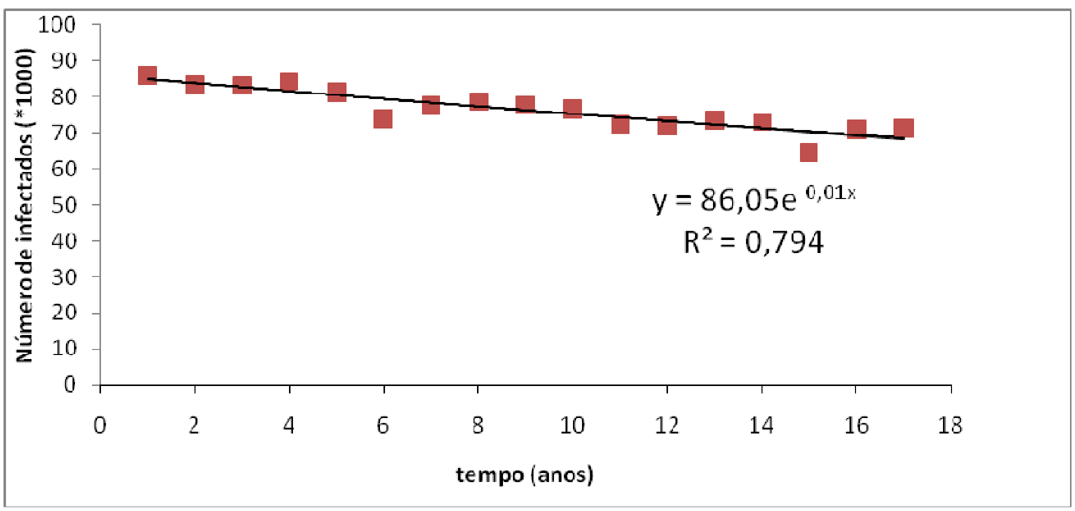

Figura 11: Ajuste da Curva

A partir das informações acima, podemos considerar que o espalhamento da Tuberculose no Brasil apresentou um decrescimento de forma suave ao longo dos últimos anos. A taxa de variação $\propto$ desse decrescimento é definida por $\propto = \frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)}$, sendo $P(n)$ a população infectada, para diferentes intervalos de tempo.

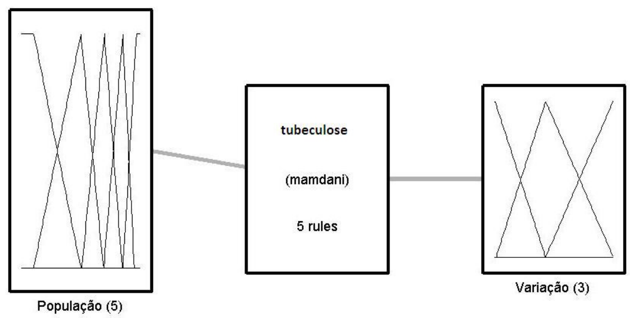

Figura 12: Sistema de Controle *Fuzzy* para o Modelo do Espalhamento da TB.

A população de indivíduos infectados pela Tuberculose foi subdividida em Muito Baixa, Baixa, Média, Alta e Muito Alta, de acordo com o número de infectados.

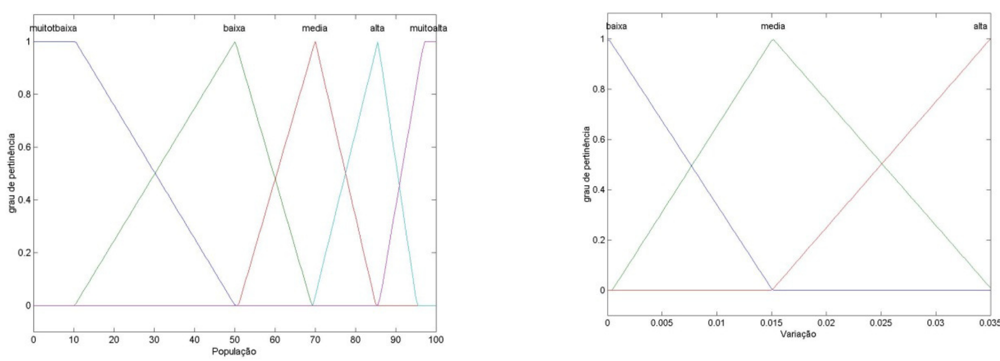

Figura 13: Variáveis do sistema.

O modelo *fuzzy* foi composto por um sistema de base de regras *fuzzy*. As variáveis são População infectada (entrada) e sua Variação (saída). De acordo com os dados obtidos foram propostas 5 regras:

1. SE (População é muito baixa) ENTÃO (Variação é baixa) (1)
2. SE (População é baixa) ENTÃO (Variação é média) (1)
3. SE (População é média) ENTÃO (Variação é média) (1)
4. SE (População é alta) ENTÃO (Variação é média) (1)
5. SE (População é muito alta) ENTÃO (Variação é alta) (1)

Adotamos o método de inferência de Mamdani e a *defuzzyficação* do centro de gravidade, e com isso se obteve a curva dada pela Figura 14.

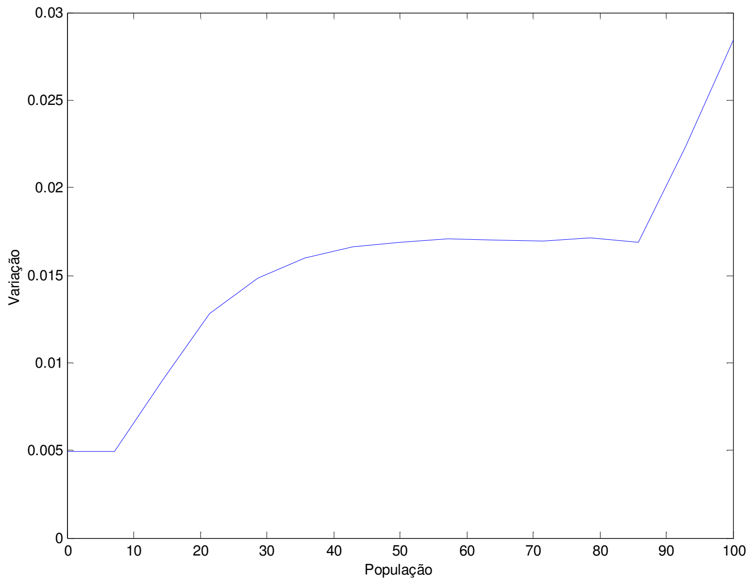

Figura 14: Superfície da variação do espalhamento da Tuberculose

Optamos por trabalhar com uma faixa onde os dados reais estivessem contidos. Dessa forma, a Figura 15 apresenta dois ajustes exponenciais (dados reais contidos numa faixa), dados reais e curva gerada pelo modelo *fuzzy*.

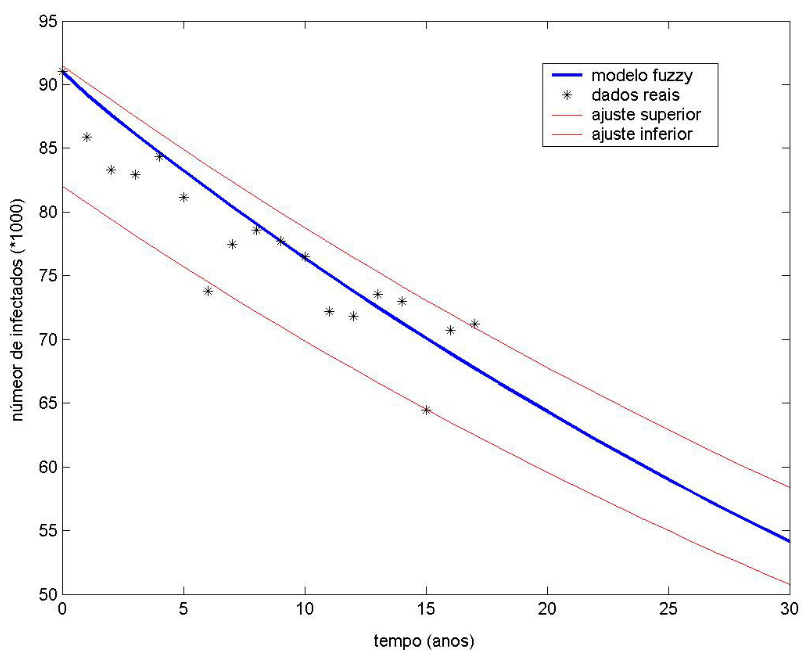

Figura 15: Modelo *fuzzy* comparado ao ajuste da curva com os dados reais

Aumentando o número de simulações, podemos observar que a solução fornecida pelo sistema *fuzzy* encontra-se dentro da faixa de dos reais.

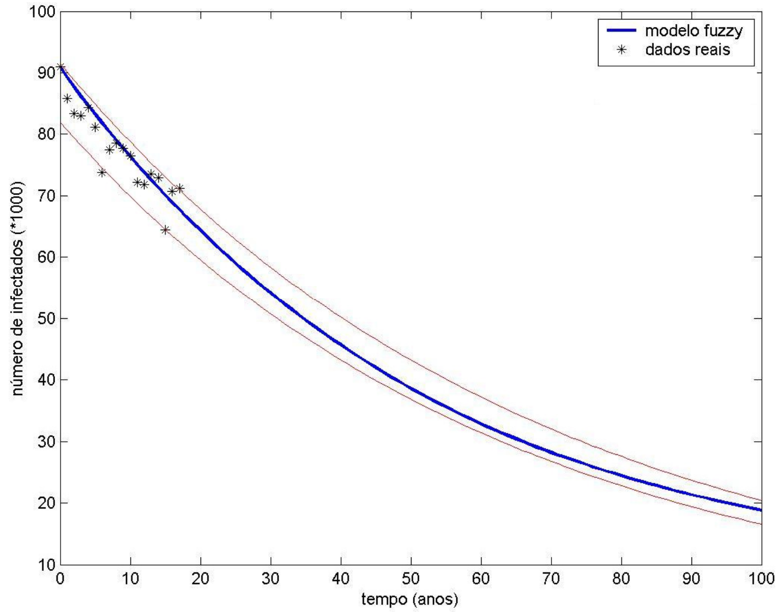

Figura 16: Estimativa para o número de casos

Para finalizar, se considerarmos uma condição inicial sendo um número *fuzzy*, obtemos a solução descrita na Figura 17.

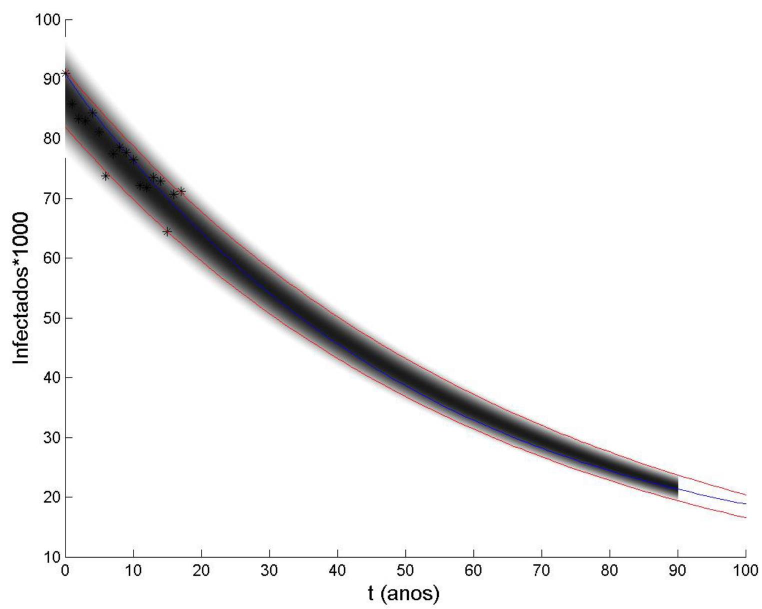

Figura 17 – Solução com condição inicial *fuzzy*

Capítulo 4 – Considerações Finais

Esse trabalho iniciou-se com estudo de conceitos básicos da Teoria *Fuzzy* e de Sistemas *Fuzzy*. A Teoria *Fuzzy* utiliza conceitos e técnicas relativamente novos e seu emprego em estudos imprecisos tem grande potencial, uma vez que tal teoria tem se mostrado eficaz no tratamento de subjetividades características ao fenômeno estudado.

O uso de modelos matemáticos é uma importante ferramenta para predizer fenômenos da realidade. O sistema de regras fuzzy, em especial, facilita a modelagem matemática, uma vez que muitos dados são incertos ou imprecisos, o que dificulta a modelagem através de modelos clássicos com equações. Nos modelos *fuzzy* usam-se base de regras ao invés de equações e as variáveis do modelo podem ser definidas por especialistas da área, juntamente com a base de regras.

E, através do estudo de sistemas baseados em regras *fuzzy* elaboramos um modelo matemático para estimar a quantidade, ao longo do tempo de indivíduos infectados pela bactéria causadora da tuberculose.

A Teoria *Fuzzy* é uma ferramenta muito útil para representar o espalhamento de uma doença, em nosso caso da Tuberculose, em uma população de indivíduos suscetíveis. Utilizando um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* foi possível modelar o espalhamento da Tuberculose na população Brasileira nas últimas décadas sem o uso de equações diferenciais. Neste sentido a Teoria *Fuzzy* traz grande contribuição na construção de modelos matemáticos, ainda mais quando em alguns casos onde os parâmetros das equações diferenciais não são conhecidos. Porém, se houver a necessidade, esses parâmetros podem ser obtidos através do ajuste da curva solução dada pelo modelo baseado em regras *fuzzy* (PEIXOTO et al, 2007).

Além disso, o uso da Teoria *Fuzzy* é interessante e de utilidade para a continuação de pesquisas dessa natureza, por permitir a comparação dos parâmetros com resultados que concordam com as regras estabelecidas por especialistas.

Referências Bibliográficas

BARROS, L.C; BASSANEZI, R.C.; *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 2ª Edição. Editora IMECC, Campinas, 2011.

BASSANEZI, R.C.; *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Editora Contexto, 2002.

BASSANEZI, R.C.; FERREIRA, W.C. *Equações diferenciais com aplicações*.Harbra,1988.

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill, Inc, 1987.

EMMENDORFER, L. R., RODRIGUES L. A. D.; *Um modelo de Autômatos Celulares para o Espalhamento Geográfico de Epidemias,* TEMA, p.73-80, (2001).

KERMACK, W. O., McKENDRICK, A. G.; *A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proceedings of the Royal Society of London* Series A 15 (1927), p. 700-721.

PEIXOTO M.S., BARROS L.C.; *Um Estudo de Autômatos Celulares para o Espalhamento Geográfico de Epidemias com Parâmetros Fuzzy, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional,* 5, (2004), p. 125-133.

PEIXOTO, M. S. ; BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C. *Uma Abordagem Fuzzy para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo*. TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 1, p. 119-128, 2007.

PEIXOTO, M. S. ; BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C. . *Predator prey fuzzy model*. Ecological Modelling, v. 214, p. 39-44, 2008a.

ZADEH, L.A. , Fuzzy Sets, *Informat. Control*, 8, 338-353 (1965).

[1] http://drauziovarella.com.br/doencas-e-sintomas/tuberculose/ (acessado em 17/04/2012)

[2] http://portal.saude.gov.br/portal/saude/profissional/area.cfm?id_area=1527 (acessado em 10/08/2013)

[3] http://www.ime.unicamp.br/~laeciocb/manual_fuzzy_matlab.pdf (acessado em 05/09/2013).