



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
*Campus* SOROCABA

# Um estudo da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* para a Dinâmica do Crescimento Tumoral

---

Trabalho de Conclusão de Curso

**Beatriz Krabbe Laghetto**

Orientadora: Prof.<sup>a</sup>Dr.<sup>a</sup> Magda da Silva Peixoto

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Licenciatura em Matemática

**Sorocaba 2013**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
*Campus* SOROCABA

## Um estudo da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* para a Dinâmica do Crescimento Tumoral

---

**Autora: Beatriz Krabbe Laghetto**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Física, Química e Matemática (DFQM) da UFSCar, *Campus* Sorocaba, como requisito parcial para a obtenção da graduação em Licenciatura em Matemática.

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup>Dr.<sup>a</sup> Magda da Silva Peixoto**

**Licenciatura em Matemática**

**Sorocaba 2013**



Folha de aprovação

**Beatriz Krabbe Laghetto**

Um Estudo da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* para a Dinâmica do Crescimento  
Tumoral

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 20/09/2013.

Orientadora Magda Peixoto  
Profª. Dra. Magda da Silva Peixoto

Membro 2 Wladimir Seixas  
Prof. Dr. Wladimir Seixas

Membro 3 Adilson  
Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão

**Este trabalho é dedicado a todos que acreditam em mim. Principalmente aos queridos Mamãe Cida e Papai Edson que são meus amores. A minha irmã Ingrid, Vovós e Vovôs e meus tios Ana e Dênis que são meus preferidos. E ao meu porto seguro Beto.**

## AGRADECIMENTOS

A Nosso Senhor Jesus Cristo e Sua Mãe Maria por sempre estarem me guiando nos caminhos certos.

A minha orientadora Magda da Silva Peixoto, por ter me escolhido, por ter me orientado, por ter me confiado, por ter me ensinado e principalmente por abrir portas a todas as oportunidades que aproveitei durante a caminhada da graduação e que continuo aproveitando durante a caminhada da vida.

Aos verdadeiros professores Wladimir Seixas, Adilson Brandão e Paulo César Oliveira, que durante esses 5 anos foram fundamentais para minha formação acadêmica, humana e ética e que sempre tiveram disposição para me atender fora dos horários de aula, muitas vezes durante horas.

A todos os professores que tive durante toda minha jornada de desenvolvimento, pela paciência, dedicação e comprometimento em formar profissionais e cidadãos.

Ao CNPq pela bolsa de iniciação científica.

A todos os colegas das turmas de Licenciatura em Matemática da UFSCar – *campus* Sorocaba, que sempre compartilharam conhecimento e deram forças para que tudo acontecesse de forma mais divertida.

A minha grande amiga Juliana Santos Graça que sempre esteve comigo nos momentos mais difíceis e também nos melhores momentos desses 2 anos que passamos juntas. Continuaremos assim por mais uma jornada!

Muito obrigada!

*"Liberdade é uma palavra  
que o sonho Humano alimenta,  
Não há ninguém que explique  
e ninguém que não entenda."*

*Cecília Meireles*

*"Valeu a pena? Tudo vale a pena  
Se a alma não é pequena.  
Quem quer passar além do Bojador  
Tem que passar além da dor.  
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,  
Mas nele é que espelhou o céu."*

*Fernando Pessoa*

## RESUMO

Os principais objetivos desse trabalho são: 1- estudar as formas de modelar matematicamente as incertezas através da Teoria *Fuzzy*, que tem sido a ferramenta com fundamentação teórica para o estudo quantitativo de fenômenos onde aspectos de gradualidades (e, portanto de qualidades) são julgados fundamentais para que ocorra a modelagem matemática; 2- utilizar um sistema baseado em regras *fuzzy* para elaborar um modelo matemático que estima a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele não melanoma. Então, consideramos fototipo, número de horas por dia de exposição solar ocupacional, número de horas por dia de exposição solar não ocupacional, histórico familiar e fotoproteção como variáveis de entrada do sistema *fuzzy*; e 3- apresentar um modelo de simulação computacional do crescimento tumoral, especificamente crescimento bidimensional do câncer de pele, através da capacidade visual dos Autômatos Celulares e tendo como ferramenta a Teoria *Fuzzy*, visando um melhor entendimento da dinâmica de desenvolvimento dessa doença.

Esse estudo gera, então, uma forma de entender como o tumor cresce, tentando ajudar a prever o estágio da doença, ou seja, seria um meio de auxiliar no diagnóstico da evolução da doença.

Acredita-se que esse trabalho seja de suma importância para a saúde pública, pois o estudo das causas e tratamento do câncer vem crescendo ao longo do desenvolvimento da medicina.

Palavras-chave: Teoria *Fuzzy*, Câncer de Pele, Autômatos Celulares.

## ABSTRACT

The main objectives of this work are: 1 -To study ways to model mathematically uncertainties through the *Fuzzy* Theory, which has been a theoretical tool to study quantitative phenomena where gradualness aspects (and therefore qualities aspects) are fundamental to occur mathematical modeling; 2 - to use a system based on *fuzzy* rules to develop a mathematical model to estimate the chance of an individual developing skin cancer non-melanoma. For this, we consider phototype, number of occupational hours per day of sun exposure, number of non-occupational hours per day of sun exposure, family history and photoprotection as input variables of the *fuzzy* system and 3 - to present a model computer simulation of growth tumor, specifically dimensional growth of skin cancer, through the visual capacity of Cellular Automata and having the *Fuzzy*Theory as a tool, seeking a better understanding of the dynamics of development of this disease.

Then this study provides a mean of understanding how the tumor grows, trying to help predict the stage of the disease, in other words, would be a mean to assist in the diagnosis of disease progression.

It is believed that this work is of paramount importance for public health, since the study of cancer has been growing throughout the development of medicine.

Keywords: Fuzzy Theory, Skin Cancer, Cellular Automata.

## Sumário

Introdução.....	1
Capítulo 1– Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy .....	3
1.1. Um pouco da História.....	3
1.2. Conceitos Básicos .....	5
1.3. Operações com Subconjuntos <i>Fuzzy</i> .....	8
1.4. O Conceito de $\alpha$ –nível.....	10
1.5. O Princípio de Extensão de Zadeh.....	11
Capítulo 2– Sistemas Baseados em Regras <i>Fuzzy</i> .....	14
2.1. Relações <i>Fuzzy</i> .....	14
2.2. Conectivos Lógicos .....	15
2.3. Sistemas Baseados em Regras <i>Fuzzy</i> .....	17
2.4. Exemplo da “Roupa Suja” .....	19
Capítulo 3 – Uma Abordagem <i>Fuzzy</i> para Estimar o Desenvolvimento do Câncer de Pele.....	23
3.1. Câncer de Pele .....	23
3.2. Modelagem do problema proposto .....	24
3.2.1. Resultados .....	28
Capítulo 4 – Modelo com Ajuste Logístico para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele .....	30
Capítulo 5 - Modelo de Autômatos Celulares para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele.....	33
5.1. Autômatos Celulares .....	33
5.2. Simulações.....	35
Capítulo 6 - Modelo <i>Fuzzy</i> para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele .....	37
Capítulo 7–Resultados.....	40
Capítulo 8 – Considerações Finais.....	42
Referências.....	44

## Lista de Figuras

Figura 1: Gráfico dos elementos próximos de 2. ....	7
Figura 2 - A: Gráficos que representam os subconjuntos <i>fuzzy</i> <b>A</b> e <b>B</b> de U. ....	9
Figura 2 - B: Gráficos que representam União, Intersecção e Complementar dos subconjuntos <i>fuzzy</i> <b>A</b> e <b>B</b> . ....	9
Figura 3: Imagem de um subconjunto <i>fuzzy</i> a partir do princípio de extensão para uma função <b>f</b> . ....	12
Figura 4: Esquema geral de um controlador <i>Fuzzy</i> . ....	16
Figura 5: <i>Defuzzificador</i> centro de Gravidade <b>G(B)</b> . ....	18
Figura 6: Resumo do Sistema de Controle <i>Fuzzy</i> “Roupa” ....	19
Figura 7: Variáveis de entrada (tecido sujeira) e variáveis de saída (tempo de lavagem)..	19
Figura 8: Solução do controlador <i>fuzzy</i> de lavagem em função do tipo de tecido e tipo de sujeira .....	20
Figura 9: Saída do controlador <i>fuzzy</i> : 0,469, ou seja 47% do ciclo total de lavagem da máquina, quando tecido é igual a 3 e sujeira igual a 6. ....	20
Figura 10: Resumo do modelo de controle <i>fuzzy</i> “Chance de Desenvolver Câncer”. ....	24
Figura 11: Variável fototipo. ....	25
Figura 12: Variável horas ocupacionais. ....	25
Figura 13: Variável horas lazer. ....	26
Figura 14: Variável histórico familiar. ....	26
Figura 15: Variável fotoproteção. ....	26
Figura 16: Variável chance de obter câncer. ....	26
Figura 17: Gráfico de dispersão com dados reais e curva de ajuste Logístico. ....	30
Figura 18: Exemplo de Tipos de Vizinhança. A letra C representa a célula escolhida e a letra X a sua vizinhança. Em (A) temos a vizinhança de von Neumann e em (B) a de Moore. As duas são ditas ser de raio 1. ....	34
Figura 19: Simulação para 13 dias, diâmetro de 0,5 cm (erro: 0,125 cm) ....	35
Figura 20: Simulação para 47 dias, diâmetro de 1,4 cm (erro: 0,04 cm). ....	35
Figura 21: Simulação para 78 dias, diâmetro de 2,8 cm (erro: 0,00 cm). ....	35
Figura 22: Resumo do modelo de controle <i>fuzzy</i> “Câncer”. ....	36
Figura 23: Variável “Tempo x grau de pertinência” . ....	36
Figura 24: Variável “Diâmetro x grau de pertinência” . ....	37

Figura 25: Solução dado pelo SBRF. ....	38
Figura 26: Comparação das curvas dos demais modelos.....	39

## Lista de Tabelas

Tabela 1: Estudantes e grau de estudo. ....	6
Tabela 2: Exemplo de União, Intersecção e complementar no caso de pacientes com febre e mialgia. ....	10
Tabela 3: Variação do Diâmetro (cm) de Tumores ao longo do tempo (dias) .....	29
Tabela 4: Comparação dos dados reais com resultado do Modelo Logístico. ....	30
Tabela 5: Erros gerados pelas simulações (Modelo logístico, Autômato Celular e Modelo <i>Fuzzy</i> ). ....	39

# Introdução

---

É crescente o interesse por processos quantitativos para predizer fenômenos da realidade. Estes processos são, via de regra, obtidos por meio de modelos matemáticos. Nas últimas décadas houve um aumento considerável no número de trabalhos concernentes à abordagens quantitativas de fenômenos biológicos e nesse trabalho tem-se os mesmos interesses [5].

A modelagem matemática, nada mais é do que a tentativa de traduzir problemas reais em problemas matemáticos e uma nova ferramenta científica que além da matemática, utiliza-se, também, da computação para o total aproveitamento de métodos matemáticos avançados, na intenção de solucionar problemas em diversas áreas, tais como, Matemática, Física, Engenharias, Ciências Agrárias, Ecologia, Saúde, etc[1], [20]. Os fenômenos biológicos estudados por meio da modelagem matemática fazem parte do ramo da ciência chamada Biomatemática [5].

Muitas das incertezas que se encontram nos fenômenos da Biomatemática são provenientes apenas da subjetividade da nossa linguagem. Esse é o caso típico de alguns procedimentos adotados em Biomedicina para diagnosticar e controlar alguma doença em paciente. Por exemplo, para se controlar determinada doença, observa-se os sinais ou sintomas apresentados pelo paciente. A gravidade destes sinais indicará o procedimento médico a ser adotado. O termo “gravidade” é subjetivo no sentido de apresentar graduações. Pois bem, incertezas devido à gradualidade são tipicamente tratadas por meio de métodos *Fuzzy*[2].

Os *Sistemas Fuzzy* tem sido a ferramenta com fundamentação teórica para se estudar quantitativamente fenômenos onde aspectos de gradualidades (e, portanto de qualidades) são julgados fundamentais para que ocorra a modelagem matemática.

Os conceitos e técnicas da *Teoria dos Sistemas Fuzzy* são relativamente novos e seu emprego em Biomatemática tem grande potencial, já que tal teoria tem se mostrado capaz de incorporar subjetividades inerentes ao fenômeno estudado. Como já dito antes, os modelos de Biomatemática são carregados de incertezas,

tanto nos parâmetros como nas variáveis de estado. Assim considera-se o tema apropriado para um trabalho de conclusão de curso.

A modelagem computacional com sistemas *fuzzy* mostra-se aplicável a várias áreas distintas do conhecimento, como por exemplo, controle de populações herbívoras ([16],[17],[18],[20]), diagnóstico de defeitos em peças de uma produção [7], processos de decisão [25] e logística de distribuição física [22]. No cenário da logística de distribuição, essa ferramenta possui importante papel em trabalhos de tomada de decisão por especialistas, uma vez que, na maioria dos casos, as decisões sobre distribuição são tomadas utilizando-se critérios qualitativos na escolha, que nem sempre podem ser mensurados.

A principal proposta deste trabalho se refere ao estudo de incertezas e seu tratamento matemático. Para atingir nossos objetivos, foram estudados conceitos básicos da Teoria dos Sistemas *Fuzzy*, em especial, Sistemas baseados em Regras *Fuzzy* ou SBRF, ou seja, as formas de modelar matematicamente as incertezas através dos Sistemas *Fuzzy*, temas encontrados nos capítulos 1 e 2. No capítulo 3 propõe-se um sistema baseado em regras *fuzzy* para elaborar um modelo matemático que estima a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele não melanoma. Em seguida, nos próximos capítulos, apresentamos modelos para estimar o crescimento bidimensional do câncer de pele, no capítulo 4 isto é feito a partir de um modelo de curva logística, no capítulo 5 a partir de modelos com Autômatos Celulares e no capítulo 6 através da Teoria *Fuzzy*. Para finalizar fazemos uma comparação de resultados no capítulo 7 e trabalhamos as considerações finais no capítulo 8.

# Capítulo 1 - Conceitos Básicos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

---

## 1.1. Um pouco da História

Nessa seção utilizamos [9] e [10] para um breve relato sobre o surgimento da Teoria *Fuzzy*.

De acordo com [9] e [10] em 1965 um renomado professor da Universidade da Califórnia Berkeley, chamado Loft A. Zadeh introduziu o conceito dos Conjuntos *Fuzzy*, sendo que em meados dos anos 1960, após observar que os recursos tecnológicos disponíveis na época eram incapazes de automatizar as atividades de natureza industrial, biológica ou química, que resultassem em situações ambíguas, cujo processamento não era possível através do uso da lógica computacional clássica. O professor Zadeh, em um artigo publicado em 1965[24], resumiu os conceitos dos Conjuntos *Fuzzy*, solucionando e revolucionando o assunto com a criação de Sistemas *Fuzzy*.

A aplicação do raciocínio *fuzzy* foi observada em 1974, quando o professor Mandani da Queen Mary College (Universidade de Londres) conseguiu controlar uma máquina a vapor usando a Teoria de Zadeh.

Mesmo sucesso foi observado em outras situações, como em 1980, no controle *fuzzy* de operações de um forno de cimento, bem como, com outras aplicações, por exemplo, os controladores *fuzzy* de plantas nucleares, refinarias, processos biológicos e químicos, trocador de calor, máquina diesel, tratamento de água e sistema de operação automática de trens.

Em 1984, foi criada a sociedade Internacional de Sistemas *Fuzzy*, formada principalmente por pesquisadores de países avançados tecnologicamente.

Ainda de acordo com [9] e [10], mais de 30% dos artigos publicados sobre Sistema *Fuzzy* são de origem japonesa. Os pesquisadores japoneses, Seiji Yasunobu e Soji Miyamoto da Hitachi, em 1985, demonstraram a superioridade de sistemas de controle *fuzzy*, quando apresentaram simulações para a estrada de ferro de Sendai, sendo suas ideias adotadas para o controle de aceleração, frenagem e

parada, quando a linha foi inaugurada em 1987. Já os Estados Unidos ignoraram a Teoria *Fuzzy* por que à associaram com inteligência artificial, um campo obscurecido e de pouca credibilidade por parte da indústria americana.

Durante um encontro internacional de *fuzzy* em Tokyo, Takeshi Yamakawa, realizou um experimento com um pêndulo invertido, demonstrando o uso do Controle *Fuzzy*: um problema clássico de controle em que um veículo tenta manter um poste montado no seu topo por uma dobradiça vertical com movimentos de ida e volta. Yamakawa impressionou os observadores com a sua demonstração, onde obteve estabilidade do sistema, também em outras situações. Suas experiências permitiram que ele organizasse seu próprio laboratório de pesquisas de Sistemas *Fuzzy*, ajudando a explorar suas patentes no campo.

Os japoneses desenvolveram tanto aplicações industriais como aplicações para consumo, criando em 1988 o Laboratório Internacional de Engenharia *Fuzzy* (LIFE), composto por 48 companhias para pesquisa em Sistema *Fuzzy*, segundo [9] e [10].

Uma máquina de lavar pratos "inteligente" baseado em um Controlador *Fuzzy* e um "*one-stop sensing module*" que combina um termistor (para medida da temperatura), um sensor condutivo (para medir o nível de detergente através dos íons presentes na água), um sensor de turbacão que difundi a medida e transmite luz para medir a sujeira na lavagem, e um sensor magnético para ler a taxa de giro, foi criada em 1995 por Maytag. O sistema aperfeiçoa o ciclo de lavagem para qualquer carga obter os melhores resultados com o mínimo de energia, detergente, e água.

Varias pesquisas são realizadas com aplicações *Fuzzy*: um projeto de *software*, incluindo Sistemas *FuzzyExpert* e Integração de Lógica *Fuzzy* com redes neurais, os denominados algoritmos genéticos, com o objetivo de construção de um Sistema *Fuzzy* capaz de aprender.

O desenvolvimento de técnicas de Inteligência Artificial (IA) vem ocupando posição de destaque em pesquisas na área de controle de processos industriais e começam a ser implantadas em plantas industriais com enorme sucesso.

Os japoneses consideram como as mais promissoras técnicas para o século XXI, as técnicas do Controle *Fuzzy* e a de redes neurais aplicadas a sistemas de controle, que estão atualmente em grande evidência[9][10].

## 1.2. Conceitos Básicos

Para obter a formalização matemática de um conjunto *fuzzy*, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico (ou conjunto *crisp*) pode ser representado pela sua função característica, definida de tal forma: Seja  $U$  um conjunto universo e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Essa função tem objetivo de indicar quando um elemento  $x \in U$  pertence ou não a  $A$ , dependendo da sua imagem em  $\{0,1\}$ . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto  $A$ , uma vez que indica quais elementos do conjunto  $U$  são elementos de  $A$ [3].

Por exemplo, de acordo com a lógica clássica pode-se dizer que um homem que possui altura superior a 1,80m é alto. Logo um homem com 1,79m não é alto. A Teoria *Fuzzy* vem resolver essa discrepância, fazendo a essa classificação de forma gradual.

- *Definição 1:* Seja  $U$  um conjunto (clássico); um subconjunto *fuzzy*  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função

$$\varphi_F: U \rightarrow [0,1] \quad (2)$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto *fuzzy*  $F$ .

O valor de  $\varphi_F \in [0,1]$  indica o grau com que o elemento  $x$  de  $U$  está no conjunto *fuzzy*  $F$ ;  $\varphi_F(x) = 0$  e  $\varphi_F(x) = 1$  indicam, respectivamente, a não

pertinência e a pertinência completa de  $x$  ao conjunto *fuzzy*  $F$ . Um subconjunto *fuzzy*  $F$  é composto de elementos  $x$  de um conjunto clássico  $U$ , providos de um valor de pertinência a  $F$ , dado por  $\varphi_F(x)$ . [13][23]

- *Definição 2:* Podemos dizer que um subconjunto *fuzzy*  $F$  de  $U$  é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{com } x \in U\} \quad (3)$$

Neste sentido pode-se dizer que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto *fuzzy*[3][20].

Agora dentro da lógica *fuzzy*, pessoas de 1,80m e 1,79m possuem um grau de pertinência em relação à altura, que quanto mais próximo de 1, mais próximas de serem consideradas altas elas serão. Neste caso ocorre uma transição gradual[8].

O subconjunto clássico de  $U$  definido por

$$\text{supp } F = \{x \in U: \varphi_F(x) > 0\} \quad (4)$$

é denominado suporte de  $F$  que nada mais são do que os elementos de  $U$  que tem grau de pertinência maior que zero em  $F$ . Tem papel fundamental na inter-relação entre as teorias de conjuntos clássica e *fuzzy*[3].

### Exemplo 1:

Tabela 1: Estudantes e grau de estudo.

Estudantes	Grau de estudo
Alberto	0,5
Beatriz	0,8
Camila	0,8
Maria	0,3
Cristina	0,1
Tiemi	0,4

Esta forma tabular pode ser escrita da seguinte maneira [3]:

$$F = \frac{0,5}{\text{Alberto}} + \frac{0,8}{\text{Beatriz}} + \frac{0,8}{\text{Camila}} + \frac{0,3}{\text{Maria}} + \frac{0,1}{\text{Cristina}} + \frac{0,4}{\text{Tiemí}}$$

O sinal + serve apenas para conectar os elementos do conjunto *fuzzy*  $F$  quando  $U$  é finito e tem forma:

$$F = \sum \varphi_F(x)/x \quad (5)$$

**Exemplo 2:**(Números próximos de 2). Considere o conjunto  $F$  dos números reais próximos de 2:

$$F = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ é próximo de } 2\}.$$

Se definirmos a função  $\varphi_F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ , que associa cada  $x$  real ao valor de proximidade ao número 2 pela expressão

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} (1 - |x - 2|) & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x \notin [1,3] \end{cases}$$

Então o subconjunto *fuzzy*  $F$  dos pontos próximos de 2, caracterizado por  $\varphi_F$ , é tal que  $\varphi_F(2,001) = 0,999$  e  $\varphi_F(7) = 0$ . Neste caso, dizemos que  $x = 2,001$  é um ponto próximo de 2 com grau de proximidade  $0,999$  e  $x = 7$  não é próximo de 2. A Figura 1 ilustra o exemplo.

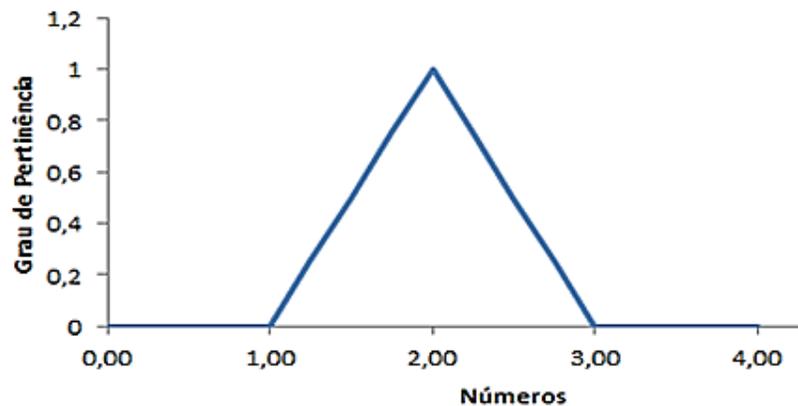


Figura 1: Gráfico dos elementos próximos de 2.

Podemos definir também a cardinalidade de um conjunto *fuzzy* como sendo a soma dos graus de pertinência do conjunto, representamos da seguinte forma:

$$card(F) = \sum_{i=1}^n F(x_i) \quad (6)$$

**Exemplo 3:** Seja o conjunto  $U = \{1,2,3,4,5,6\}$  e a seguir o subconjunto  $F$  de  $U$ :

$$F = \frac{0,1}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,6}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,4}{5} + \frac{0,0}{6}$$

$$card(F) = 0,1 + 0,3 + 0,6 + 1,0 + 0,4 + 0,0 = 2,4$$

### 1.3. Operações com Subconjuntos *Fuzzy*

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos *fuzzy* de  $U$ , com funções de pertinência dadas por  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , respectivamente.

Dizemos que  $A$  é subconjunto *fuzzy* de  $B$ , e escrevemos  $A \subset B$ , se  $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$  para todo  $x \in U$ .

Note que o conjunto vazio ( $\emptyset$ ) tem função de pertinência  $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$  enquanto que o conjunto universo ( $U$ ) tem função de pertinência  $\varphi_U(x) = 1$  para todo  $x \in U$ . Assim, podemos dizer que  $\emptyset \subset A$  e que  $A \subset U$  para todo  $A$  ([3],[8], [15], [20]).

- *Definição 3:* (União) A união entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto *fuzzy* de  $U$  cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \quad (7)$$

Observe que esta é uma extensão do caso clássico. Quando  $A$  e  $B$  são subconjuntos clássicos de  $U$  temos:

$$\max_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cup B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases}$$

$$= X_{A \cup B}(x).$$

- *Definição 4:*(Intersecção) A Intersecção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto *fuzzy* de  $U$  cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} \quad (8)$$

Que também é uma extensão do caso clássico:

$$\min_{x \in U} \{X_A(x), X_B(x)\} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cap B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases}$$

$$= X_{A \cap B}(x).$$

- *Definição 5:*(Complementar de Subconjunto *Fuzzy*) O Complementar de  $A$  é o subconjunto *fuzzy*  $A'$  de  $U$  cuja a função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U \quad (9)$$

Graficamente podemos representar a união, intersecção e complementar:

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos *fuzzy* de  $U$ , com as funções de pertinência representadas abaixo:

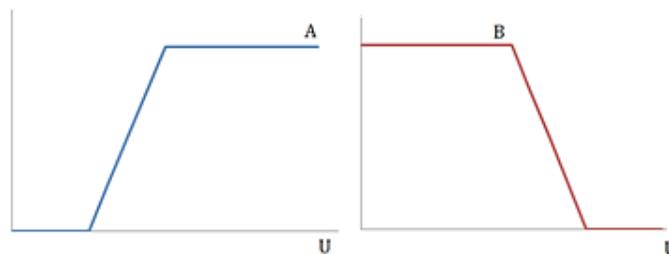


Figura 2 - A: Gráficos que representam os subconjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$  de  $U$ .

Podemos representar a união e intersecção entre os subconjuntos  $A$  e  $B$  e o complementar de  $A$ , respectivamente como segue:

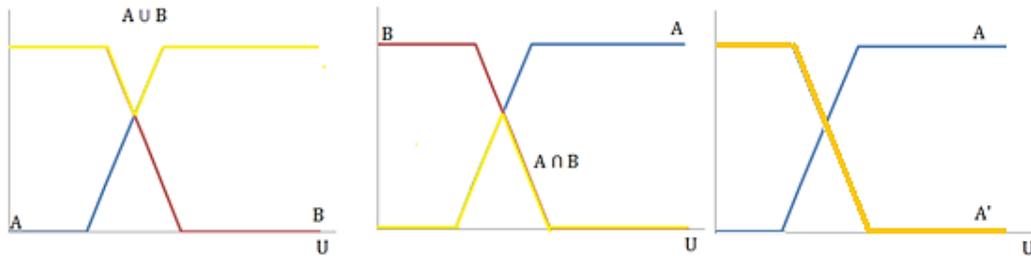


Figura 2 - B: Gráficos que representam União, Intersecção e Complementar dos subconjuntos *fuzzy*  $A$  e  $B$

#### Exemplo 4:

Tabela 2: Exemplo de União, Intersecção e complementar no caso de pacientes com febre e mialgia.

Paciente	Febre: $A$	Mialgia: $B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A'$	$A \cup A'$	$A \cap A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,7	0,3
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,6	0,4
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	1,0	0,0

### 1.4. O Conceito de $\alpha$ –nível

Os elementos  $U$  de um subconjunto *fuzzy*  $A$  em  $U$  estão classificados em graus obedecendo a certa hierarquia (ordem), sendo que um elemento  $x$  de  $U$  está em determinado grau se seu grau de pertinência é maior que determinado  $\alpha \in [0,1]$  que define aquela classe. Esse conjunto é denominado  $\alpha$ -nível de  $A$  denotado por  $[A]^\alpha$  ([3], [8]).

- *Definição 6:*( $\alpha$  –nível) Seja  $A$  um subconjunto *fuzzy* de  $U$  e  $\alpha \in [0,1]$ . O  $\alpha$  –nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1. \quad (10)$$

O nível 0 de um subconjunto *fuzzy* que é definido como sendo o menor subconjunto fechado de  $U$  é indicado por  $\overline{\text{supp}A}$ , que é o fecho do suporte de  $A$ . [3][8]

**Exemplo 5:**

$$A = \frac{0,12}{1} + \frac{0,34}{2} + \frac{0,62}{3} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,47}{5} + \frac{0,07}{6}$$

$$[A]^{0,5} = \{3,4\}$$

$$[A]^{0,15} = \{2,3,4,5\}$$

## 1.5. O Princípio de Extensão de Zadeh

O método de extensão proposto por Zadeh é uma das idéias básicas que permite a extensão de conceitos matemáticos clássicos em *fuzzy*. O Princípio de Extensão de Zadeh para uma função  $f: X \rightarrow Z$  indica como deve ser a imagem de um subconjunto *fuzzy*  $A$  de  $X$  por meio de  $f$ . É de se esperar que esta imagem seja um subconjunto *fuzzy* de  $Z$ [3].

- *Definição 7:* Seja a função  $f: X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto *fuzzy* de  $X$ . A extensão de Zadeh de  $f$  é uma função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto *fuzzy*  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{\{x: f(x)=z\}} \varphi_A(x) & \text{se } \{x: f(x)=z\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \{x: f(x)=z\} = \emptyset \end{cases} \quad (11)$$

Seja  $f: X \rightarrow Z$  uma função injetora e  $A$  um subconjunto *fuzzy* de  $X$ , enumerável (ou finito), e dado por

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i \quad (12)$$

Então, o Princípio de Extensão de Zadeh garante que  $\hat{f}(A)$  é um subconjunto *fuzzy* de  $Z$ , dado por

$$\hat{f}(A) = \hat{f}(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_A(x_i)/f(x_i) \quad (13)$$

Portanto, a imagem de  $A$  por  $f$  pode ser deduzida do conhecimento das imagens de  $x_i$  por  $f$ . O grau de pertinência de  $z_i = f(x_i)$  em  $\hat{f}(A)$  é o mesmo de  $x_i$  em  $A$ .

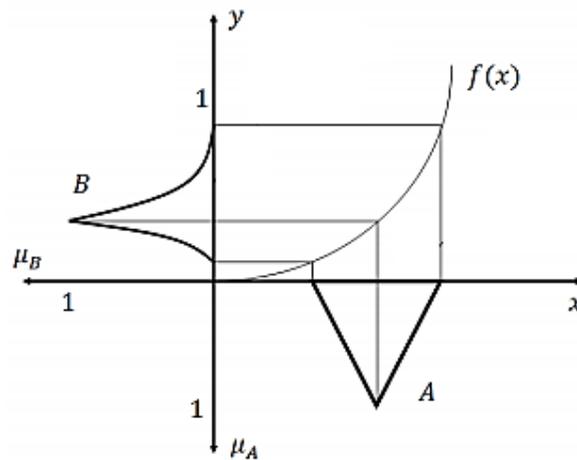


Figura 3: Imagem de um subconjunto *fuzzy* a partir do princípio de extensão para uma função  $f$ .

**Exemplo 6:**

$$X = \{1,2,3,4,5\}$$

$$Y = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$y = f(x) = x^2$$

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,8}{4} + \frac{1,0}{5}$$

$$B = f(A)?$$

Solução:

$$B(y) = \sup A(x) \text{ para } x \text{ em } A \text{ e } y = f(x)$$

$$B(1) = \max(A(1)) = 0,2$$

$$B(4) = \max(A(2)) = 0,4$$

$$B(9) = \max(A(3)) = 0,3$$

$$B = f(x) = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,3}{9}$$

# Capítulo 2– Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*

---

## 2.1. Relações *Fuzzy*

Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica descreve a inter-relação entre dois ou mais objetos e, sendo um conjunto, é representada por sua função característica. Uma relação de amizade entre duas pessoas, por exemplo, designada como *amigos* considera que, nas relações humanas, ou alguém é seu amigo ou não é, o que é uma simplificação da realidade. Por outro lado uma relação de amizade *fuzzy* entre duas pessoas pode considerar o grau de amizade entre elas. Sendo assim, dois ou mais indivíduos podem se relacionar com diferentes graus de amizade. Podemos dizer então que uma relação será *fuzzy* se optarmos pela teoria *fuzzy*, e será clássica se optarmos por esta teoria [20].

Uma relação *fuzzy*  $R$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto *fuzzy* dado pelo produto cartesiano  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Assim, uma relação *fuzzy*  $R$  é definida por uma função de pertinência  $\varphi_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$ .

Diferentemente da relação clássica, a relação *fuzzy* indica o grau de relação entre os objetos dos universos dados, através de uma função de pertinência do produto cartesiano dos subconjuntos *fuzzy*  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , dada por [3], [8], [20].

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n) \quad (14)$$

Onde  $\wedge$  representa o mínimo.

A composição entre relações *fuzzy* mais tradicional chama-se [max-mim]. Considere  $R$  e  $S$  duas relações *fuzzy* binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente. A composição  $R \circ S$  é uma relação *fuzzy* binária em  $U \times W$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \max [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))] \quad (15)$$

## 2.2. Conectivos Lógicos

Para avaliar logicamente uma expressão, admitimos que a mesma só poderia assumir valores 0 ou 1 dentro da lógica clássica. Agora, e se considerarmos a lógica *fuzzy*?

Devemos atribuir um valor que indique o quanto a proposição “ $a$  está em  $A$ ” é verdadeira, sendo  $A$  um conjunto *fuzzy* e sabendo que o elemento  $a$  esta no intervalo  $[0,1]$  ([3], [8], [15], [20]). Para isso usam-se as *normas* e *conormas* triangulares:

- **Definição *t-norma*:** O operador  $\Delta: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1], \Delta(x,y) = x\Delta y$ , é uma *t-norma*, se satisfaz as seguintes condições:
  - 1- Elemento Neutro:  $\Delta(1,x) = 1\Delta x = x$ ;
  - 2- Comutatividade:  $\Delta(x,y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y,x)$ ;
  - 3- Associatividade:  $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ ;
  - 4- Monotonicidade: Se  $x < u$  e  $y < v$  então  $x\Delta y < u\Delta v$ ;

A expressão *t-norma* estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo “e”.

Exemplos de *t-norma*:

✓  $\Delta_1(x,y): [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] = \min\{x,y\} = x\Delta y$ .

Demonstração: Óbvio.

✓  $\Delta_2(x,y) = xy$ ;

Demonstração: É imediato pelas propriedades da multiplicação usual.

1- Elemento Neutro:  $\Delta_2(1,x) = 1x = x$ ;

2- Comutatividade:  $\Delta_2(x,y) = xy = yx = \Delta_2(y,x)$ ;

3- Associatividade:

$$x\Delta_2(y\Delta_2 z) = x\Delta_2(yz) = xyz = (xy)z = (x\Delta_2 y)z = (x\Delta_2 y)\Delta_2 z;$$

- 4- Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então se multiplicarmos ambas teremos que  $xy \leq uv = x\Delta_2 y \leq u\Delta_2 v$ . (CQD)

- **Definição t-conorma:** O operador  $\nabla: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1], \nabla(x,y) = x\nabla y$ , é uma *t-conorma*, se satisfaz as seguintes condições:

- 1- Elemento Neutro:  $\nabla(0,x) = 0\nabla x = x$ ;
- 2- Comutatividade:  $\nabla(x,y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y,x)$ ;
- 3- Associatividade:  $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$ ;
- 4- Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x\nabla y \leq u\nabla v$ ;

A expressão *t-conorma* estende o operador  $\vee$  que modela o conectivo “ou”.

Exemplos de t-conorma:

✓  $\nabla_1(x,y): [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] = \max = x\nabla y$ .

Demonstração: Óbvio.

✓  $\nabla_2(x,y) = x + y - xy$ ;

Demonstração: É imediato pelas propriedades da soma, subtração e multiplicação usuais.

1- Elemento Neutro:  $\nabla_2(0,x) = 0 + x - 0x = x$ ;

2- Comutatividade:  $\nabla_2(x,y) = x + y - xy =$

$$(x + y) - (xy) =$$

$$(y + x) - (yx) =$$

$$y + x - yx = \nabla_2(y,x);$$

3- Associatividade:  $x\nabla_2(y\nabla_2 z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) =$

$$x + y + z - yz - xy - xz - xyz =$$

$$(x + y - (xy)) + z - (xz + yz + xyz) =$$

$$(x + y - yx) + z - (x + y + (xy))z =$$

$$(x + y - yx) + z - (x + y + yx)z = (x\nabla_2 y)\nabla_2 z;$$

4- Monotonicidade: Se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x\nabla_2 y \leq u\nabla_2 v$ :

$$\text{se } x \leq u \text{ e } y \leq v \rightarrow x + y \leq u + v \quad (1)$$

$$\text{se } x \leq u \text{ e } y \leq v \rightarrow xy \leq uv \quad (2)$$

Subtraindo (1) e (2) temos que  $x + y - xy \leq u + v - uv$ . (CQD)

### 2.3. Sistemas Baseados em Regras *Fuzzy*

As ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo recebe informações que são interpretadas de acordo seus parâmetros e então decide que atitudes tomar. O controle e execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem codificadas por um controlador. E baseado nisso, são esses componentes que um sistema baseado em regras *fuzzy* possui: um processador de entrada (ou *fuzzyficador*), um conjunto de regras linguística, um método de inferência *fuzzy* e um processador de saída (ou *defuzzyficador*), gerando um número real como saída ([3], [8], [20]).

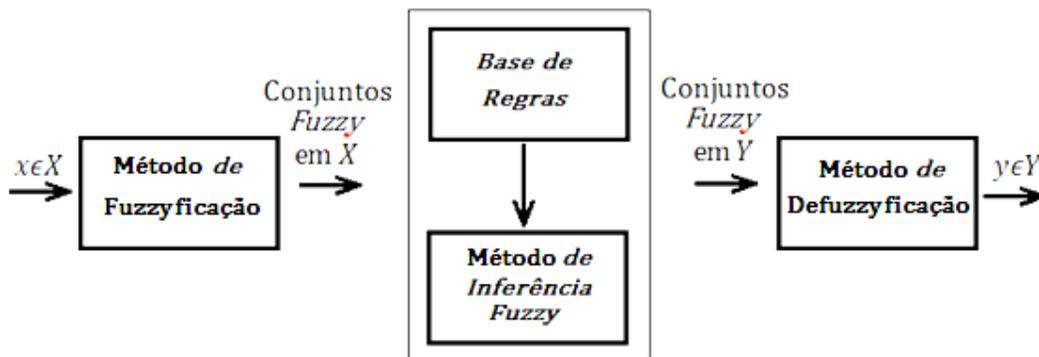


Figura 4: Esquema geral de um controlador *Fuzzy*. [20]

Essa estrutura de controlador representa a transformação que ocorre do domínio do mundo real, que usa números reais, para o domínio *fuzzy*, que usa números *fuzzy*. Nessa transformação, um conjunto de inferências *fuzzy* é usado para as tomadas de decisões, e, por fim, há uma transformação inversa do domínio *fuzzy* para o domínio do mundo real, para que ocorra o acoplamento entre a saída do algoritmo *fuzzy* e as variáveis de atuação[20].

- O método de Fuzzyficação corresponde à tradução dos componentes de entrada do sistema por conjuntos *fuzzy*. É nele que justifica-se a grande

importância de especialistas do fenômeno a ser modelado. Juntamente com os especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto *fuzzy* envolvido no processo. Mesmo quando a entrada pertença a um conjunto clássico, essa será *fuzzyficada* por meio de sua função característica ([3], [8], [20]).

- A base de regras pode ser considerada como um conjunto de proposições linguísticas do tipo, “Se... então...”. Ainda com o auxílio do especialista, as regras serão importantes no estabelecimento das relações entre as variáveis linguísticas.
- É no método de Inferência Fuzzy que cada proposição será “traduzida” matematicamente por meio das técnicas da lógica *fuzzy*. É onde se define quais *t-normas*, *t-conormas* e regras de inferência serão utilizadas para se obter a relação *fuzzy* que modela a base de regras. É basicamente do método de inferência que depende o sucesso do controlador *fuzzy*, já que ele fornecerá a saída (controle) *fuzzy* a ser adotado pelo controlador, a partir e cada entrada *fuzzy*. Nesse trabalho é utilizado o método de inferência *fuzzy* de Mamdani.

O método de Mamdani é baseado na regra de composição de inferência [max-mim] e segue o procedimento:

- ✓ Em cada regra  $R_j$ , da base de regras *fuzzy*, a condicional “se  $x$  é  $A_j$  então  $u$  é  $B_j$ ” é modelada pela proposição  $\wedge$  (mínimo);
- ✓ Adote-se a *t-norma*  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo lógico “e”;
- ✓ Para o conectivo lógico “ou” adota-se a *t-conorma*  $\vee$  (máximo) que conecta as regras fuzzy da base de regras.
- O método de defuzzyficação consiste em um processo que permite representar um conjunto *fuzzy* por um número real. O método utilizado nesse trabalho é o Centro de gravidade. Este método de *defuzzyficação* é semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados, com a diferença que os passos aqui são os valores  $\varphi_B(u_i)$ , que indicam o grau de compatibilidade do valor  $u_i$  com o conceito modelado pelo conjunto *fuzzy*  $B$  ([3], [8], [15], [20]).

O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto *fuzzy*. As equações (16) e (17) referem-se ao domínio discreto e contínuo, respectivamente. A figura 5 mostra o gráfico do *defuzzyficador* e centro de gravidade  $G(B)$ [3].

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)} \quad (16)$$

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du} \quad (17)$$

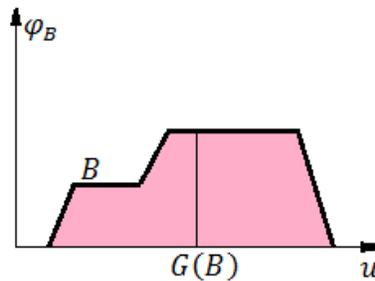


Figura 5: *Defuzzyficador* centro de Gravidade  $G(B)$ . [3]

Para ilustrar o método vamos usar o exemplo da “roupa suja” onde ocorrem apenas quatro bases de regras genéricas, cada uma com duas entradas e uma saída:

#### 2.4. Exemplo da “Roupa Suja”

O exemplo foi retirado de [3]. Todos os gráficos desta seção foram feitos no *ToolboxFuzzy* do *softwareMatLab*<sup>®</sup>:

Uma pessoa é capaz de lavar roupas sujas a ponto de deixá-las limpas, segundo seu conceito de limpeza. As ordens e conceitos de limpeza poderiam ser enunciados de acordo com o tipo de tecido e tipo da sujeira (grau) de acordo com as regras dadas no quadro abaixo:

- 1 - Se o tecido é “fino” e a sujeira é “fácil” então lava-se “pouco tempo”.
- 2- Se o tecido é “fino” e a sujeira é “difícil” então lava-se “em tempo médio”.
- 3- Se o tecido é “grosso” e a sujeira é “fácil” então lava-se “em tempo médio”.
- 4- Se o tecido é “grosso” e a sujeira é “difícil” então lava-se “muito tempo”.

Nesse caso, o sistema baseado em regras *fuzzy*(Figura 6) possui duas variáveis de entrada (tecido e sujeira)e uma variável de saída (tempo de lavagem). A variável de entrada *tecido* é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {*fino, grosso*}, a variável de entrada *sujeira* é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {*fácil, difícil*} e a variável de saída *tempo de lavagem* é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {*pouco, médio, muito*}como ilustrado na Figura 7.

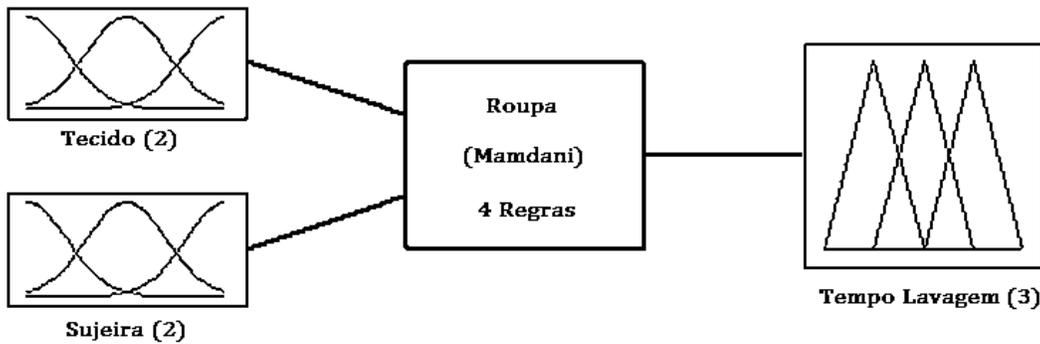


Figura 6: Resumo do Sistema de controle *Fuzzy* “Roupa”.

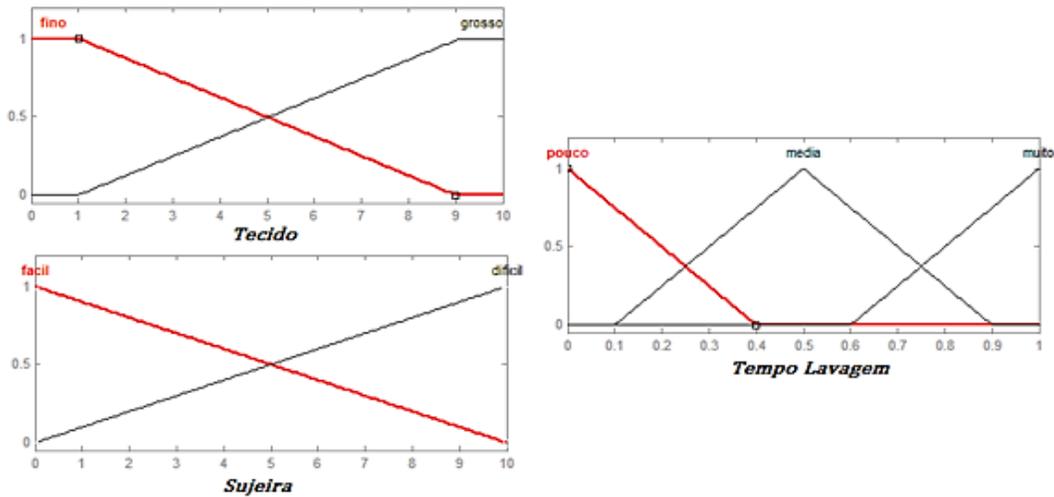


Figura 7: Variáveis de entrada (tecido e sujeira) e variáveis de saída (tempo de lavagem).

A saída obtida pelo processamento das regras *fuzzy* está representada na Figura 8.

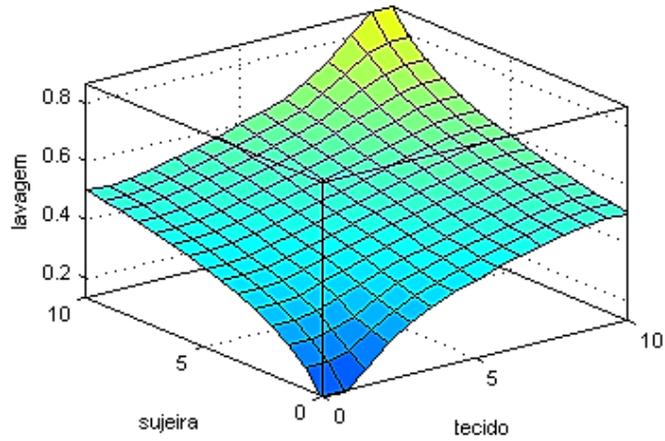


Figura 8: Solução do controlador *fuzzy*: tempo de lavagem em função do tipo de tecido e tipo de sujeira.

Por exemplo, para o tecido classificado como 3 (nota dada entre 0 e 10) e sujeira como 6 (nota entre 0 e 10), tem-se como saída, que representa o tempo de lavagem, o valor 0,469, ou seja, 47% do ciclo todo de lavagem da máquina (Figura 9).

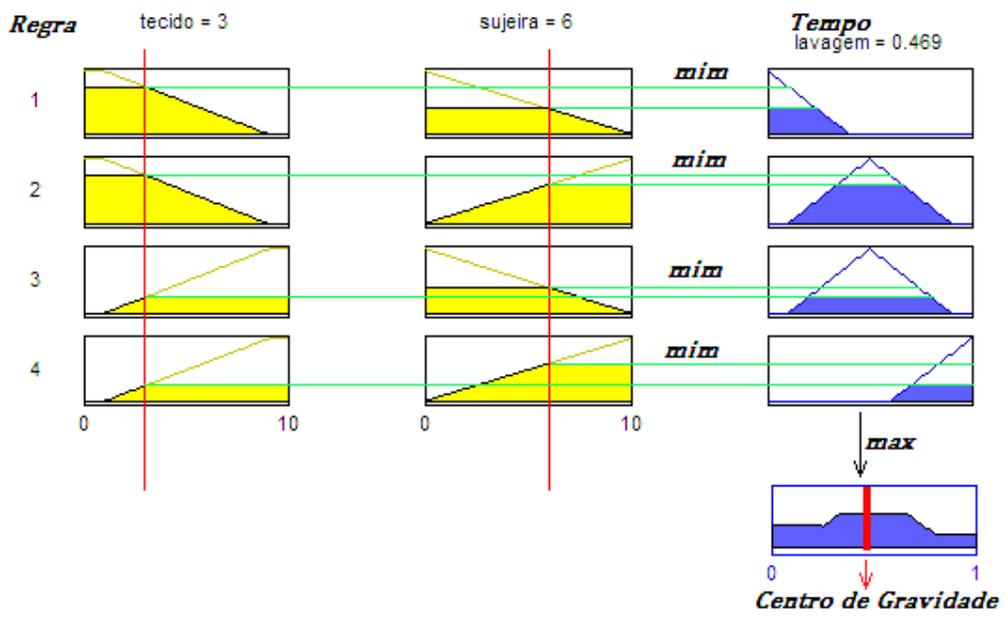


Figura 9: Saída do controlador *fuzzy*: 0,469, ou seja, 47% do ciclo total de lavagem da máquina, quando tecido é igual a 3 e sujeira igual a 6.

Nos próximos capítulos utilizam-se sistemas *fuzzy* para prever a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele não melanoma.

## Capítulo 3 – Uma Abordagem *Fuzzy* para Estimar o Desenvolvimento do Câncer de Pele

---

### 3.1. Câncer de Pele

O câncer é uma doença que resulta, principalmente, de alterações genéticas, fatores ambientais e do estilo de vida. Dentre os muitos tipos de câncer, propomos um estudo do câncer de pele que pode se apresentar de duas formas, câncer de pele melanoma e câncer de pele não melanoma.

Segundo [6], a expressão “epidemia de câncer da pele” tem sido muito utilizada, devido ao aumento da incidência dessa doença, que chega a atingir de 900.000 a 1.200.000 pessoas ao ano nos EUA, chegando a custar às seguradoras de saúde, nos anos de 1994 e 1995, cerca de 500 milhões de dólares. No Brasil a situação não é diferente, especialmente no estado de São Paulo e na região Sul.

Dados epidemiológicos nacionais mostram que em 2012, estimou-se, para o Brasil, 62680 casos novos de câncer de pele do tipo *não melanoma* entre homens e 71490 em mulheres. Esses valores correspondem a um risco estimado de 65 casos novos a cada 100 mil homens e 71 para cada 100 mil mulheres ([11], [12]).

O outro tipo de Câncer é menos comum e mais grave, o tipo melanoma, tendo incidência de 3170 novos casos em homens e 3060 novos casos em mulheres para o ano de 2012 ([11], [12]).

O câncer da pele não melanoma é uma doença que acomete mais as populações de pele clara, do tipo que queima e não bronzeia. Hispânicos, asiáticos e negros desenvolvem menos esse tipo de câncer. São tumores de crescimento lento, localmente invasivos e raramente resultam em metástase a distância. Em uma pequena proporção torna-se letal e o número de óbitos resultante desse câncer é muito baixo. É, portanto, uma neoplasia de bom prognóstico, com altas taxas de cura se tratado de forma adequada e oportuna. Contudo, em alguns casos em que há demora no diagnóstico, esse câncer pode levar a ulcerações e deformidades físicas graves ([11], [12]).

O melanoma da pele é menos freqüente do que os outros tumores da pele, porém sua letalidade é mais elevada. Acomete principalmente os caucasianos que moram em países com alta intensidade de radiação ultravioleta. No entanto, esse tipo de câncer afeta todos os grupos étnicos em alguma proporção. A Austrália, onde a população é predominantemente branca e tem em média seis horas de exposição diária ao sol, é o país com a maior ocorrência de melanoma da pele. Se detectados em estágios iniciais, os melanomas são curáveis e seu prognóstico é considerado bom([11], [12]).

A despeito de seu impacto para saúde pública e das altas taxas de incidência, o câncer da pele não melanoma permanece subnotificado pela maioria dos registros de câncer no mundo. No Brasil, figura como o tumor mais incidente em ambos os sexos e é bastante provável que exista um sub-registro devido ao sub-diagnóstico ([11], [12]).

Na próxima seção utilizamos um sistema baseado em regras *fuzzy* para elaborar um modelo matemático para estimar a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele não melanoma.

### 3.2. Modelagem do problema proposto

Para a elaboração do modelo *fuzzy*, utilizou-se os dados de [6] e [21] que identificam fatores de risco associados ao câncer de pele não melanoma na cidade de Taubaté – SP, através de um estudo de caso com diversos pacientes e dealgumas variáveis possíveis da causa da doença, tais como as escolhidas para nosso modelo:

- ✓ Fototipo (Segundo Fitzpatrick) – até 2 = RISCO, 3 em diante = NÃO RISCO;
- ✓ Número de horas (por dia) de exposição solar ocupacional – até 5h = NÃO RISCO, 6h em diante = RISCO;
- ✓ Número de horas (por dia) de exposição solar não ocupacional – até 2h = NÃO RISCO, 3h em diante = RISCO;
- ✓ Histórico Familiar – Sim = RISCO, Não = NÃO RISCO;
- ✓ Fotoproteção – Sim = NÃO RISCO, Não = RISCO;

A proposta deste modelo é definir os fatores acima como conjuntos *fuzzy*, ou seja, de forma mais gradual. Informações qualitativas de especialistas, em particular ecologistas, permitem propor regras que relacionem os fatores acima com a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele.

O sistema *fuzzy* aqui proposto possui cinco variáveis de entrada (fototipo, número de horas (por dia) de exposição solar ocupacional, número de horas (por dia) de exposição solar não ocupacional, histórico familiar e fotoproteção) e uma variável de saída (chance de um indivíduo desenvolver um câncer de pele). Veja o resumo do modelo na figura 10:

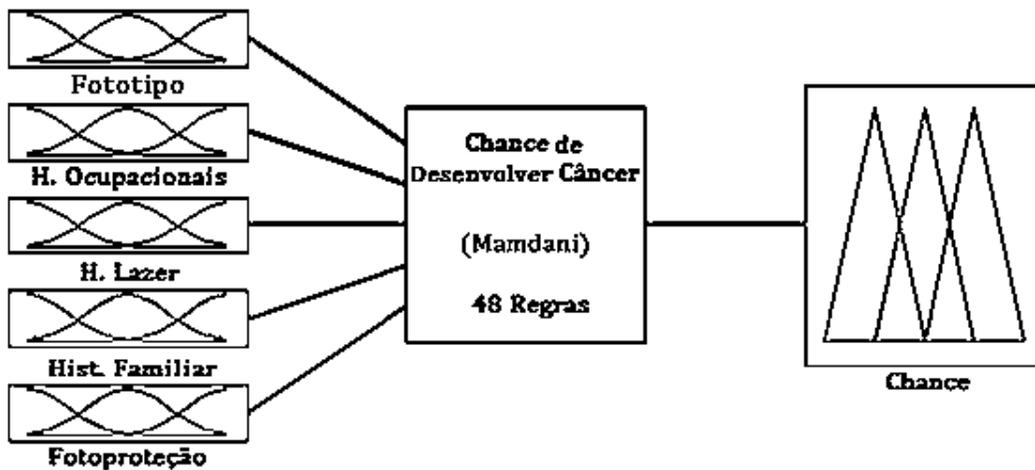


Figura 10: Resumo do modelo de controle *fuzzy* “Chance de Desenvolver Câncer”.

- A variável *fuzzy* fototipo:

Segundo Fitzpatrick, a classificação baseada na reação de queimadura solar se divide em seis tipos de pele:

Fototipo I. Pele muito branca, cor do cabelo é avermelhada, são pessoas ruivas. A pele queima muito facilmente e dificilmente se bronzeia;

Fototipo II. Pele branca, geralmente são pessoas loiras de olhos claros. A pele queima facilmente e bronzeia moderada e uniformemente;

Fototipo III. Pele branca, cabelos castanhos escuros ou pretos. A pele queima e bronzeia moderada e uniformemente;

Fototipo IV. Pele clara ou bege e inclui as pessoas orientais também. A pele queima muito pouco, mas bronzeia fácil e moderadamente;

Fototipo V. Pele parda escura ou marrom médio. São as pessoas mulatas, queimam raramente e bronzeiam muito;

Fototipo VI. São as pessoas negras. Nunca queimam e bronzeiam muito.

Dentro da classificação étnica, a pele branca está dentro do fototipo I ao III; a raça amarela está nos fototipos III ao V, com preponderância no IV; e a pele negra nos fototipos V e VI.

Então, a variável *fuzzy* fototipo é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {branca, amarela, negra} como indicado na figura 11.

- A variável *fuzzy* número de horas (por dia) de exposição solar ocupacional é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {poucas, muitas} como na figura 12.
- A variável *fuzzy* número de horas (por dia) de exposição solar não ocupacional é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {poucas, muitas} como na figura 13.
- A variável *fuzzy* histórico familiar é definida pelos subconjuntos *crisp* {sim, não} como na figura 14.
- A variável *fuzzy* fotoproteção é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {leve, alta} como na figura 15.
- A variável *fuzzy* chance de obter câncer é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {baixa, média, alta} como na figura 16.

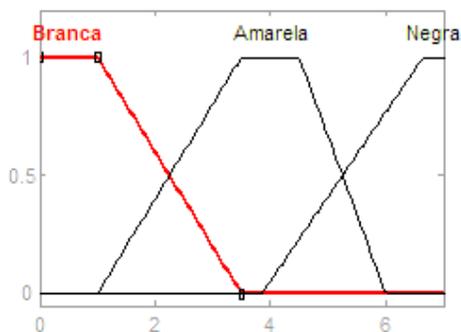


Figura 11: Variável fototipo.

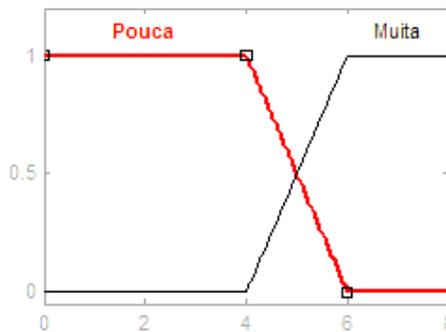


Figura 12: Variável horas ocupacionais



Figura 13: Variável horaslazer.

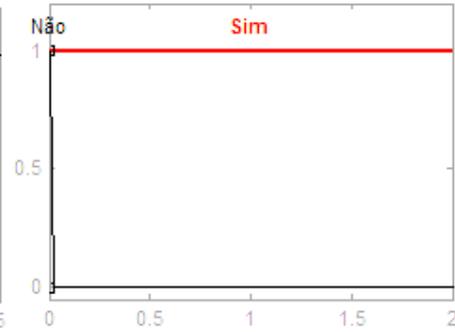


Figura 14: Variável histórico familiar.

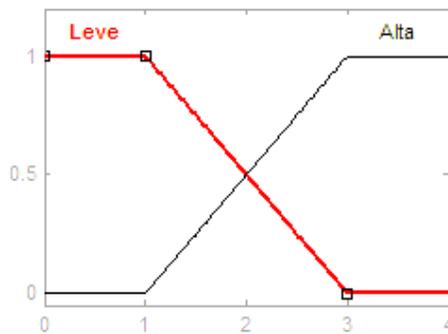


Figura 15: Variável fotoproteção.

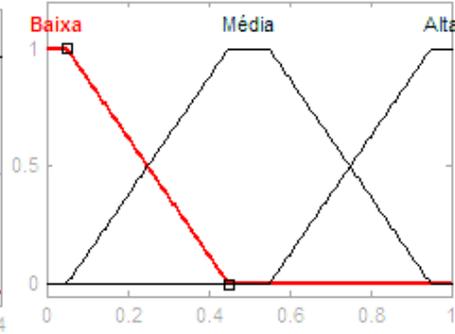


Figura 16: Variável chance de obter câncer.

Foi elaborada uma base de regras, num total de 48 regras, do tipo:

- 1- “Se (fototipo é branca) e (hocup são poucas) e (hlazer são poucas) e (HF é não) e (fotoprotecao é leve), então (chance é M)”;
- 2- “Se (fototipo é branca) e (hocup são poucas) e (hlazer são muita) e (HF é não) e (fotoprotecao é alta), então (chance é M)”;
- 3- “Se (fototipo é amarela) e (hocup são poucas) e (hlazer são poucas) e (HF é não) e (fotoprotecao é alta), então (chance é B)”;
- 4- “Se (fototipo é amarela) e (hocup são poucas) e (hlazer são poucas) e (HF é sim) e (fotoprotecao é leve), então (chance é M)”;
- 5- “Se (fototipo é negra) e (hocup são poucas) e (hlazer são poucas) e (HF é não) e (fotoprotecao é alta), então (chance é B)”;
- 6- “Se (fototipo é negra) e (hocup são poucas) e (hlazer são muitas) e (HF é não) e (fotoprotecao é alta), então (chance é B)”;

Adotou-se o método de inferência de Mamdani e a *defuzzyficação* do centro de gravidade.

### 3.2.1. Resultados

O modelo matemático foi desenvolvido utilizando-se ferramenta *Toolbox Fuzzy* do software *Matlab*<sup>®</sup>. Por exemplo, suponha que um indivíduo:

- Possui fototipo I;
- Não trabalha ao Sol;
- Em suas horas de lazer permanece ao máximo uma hora (por dia) ao sol;
- Não utiliza fotoproteção;
- Não possui histórico familiar de câncer de pele;

Como o programa é auto-explicativo, deve digitar os seguintes comandos:

*Considerando a classificação segundo Fitzpatrick,*  
- *Fototipo1. Pele muito branca, cor do cabelo é avermelhada, são as pessoas ruivas. A pele queima muito facilmente e dificilmente se bronzeia;*  
- *Fototipo2. Pele branca, geralmente são pessoas loiras de olhos claros. A pele queima facilmente e bronzeia moderada e uniformemente;*  
- *Fototipo3. Pele branca, cabelos castanhos escuros ou pretos. A pele queima e bronzeia moderada e uniformemente;*  
- *Fototipo4. Pele clara ou bege e inclui as pessoas orientais também. A pele queima muito pouco, mas bronzeia fácil e moderadamente;*  
- *Fototipo5. Pele parda escura ou marrom médio. São as pessoas mulatas, queimam raramente e bronzeiam muito;*  
- *Fototipo6. São as pessoas negras. Nunca queimam e bronzeiam muito;*

*Digite seu fototipo: 1*

*Digite a quantidade de horas (por dia) de exposição solar ocupacional: 0*

*Digite a quantidade de horas (por dia) de exposição solar não ocupacional: 1*

*De 0 a 4, digite o nível de proteção solar que utiliza: 0*

*Possui histórico familiar de câncer de pele: Se sim, digite 1, se não, digite 0: 0*

*Chance de desenvolver câncer de pele:*  
*0.5986*

Nas condições citadas acima, o indivíduo possui aproximadamente 60% de chance de desenvolver um câncer de pele não melanoma, isto é, estimativa gerada pelo sistema *fuzzy* proposto.

Esse estudo gerou o artigo “*Uma Abordagem Fuzzy para Estimar o desenvolvimento de Câncer de Pele a partir de Fatores de Risco*” publicado na revista Biomatemática [14].

Considerando pessoas que venham a desenvolver um câncer de pele, nos próximos capítulos apresentamos modelos para estimar o crescimento bidimensional do câncer de pele.

## Capítulo 4 – Modelo com Ajuste Logístico para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele

---

Para a elaboração deste modelo foram usados os dados reais extraídos de [15], onde constam resultados de estudos de análises clínicas ao longo do tempo em 12 pacientes que continham 13 tumores na pele (um paciente possuía dois tumores na pele). O estudo consistia, principalmente, de uma análise do diâmetro do tumor ao longo de determinado tempo, ou seja, uma análise da variação do tumor em decorrer do tempo; esse segundo modo de avaliar possibilita uma melhor organização e uso dos dados. A partir dos dados do estudo citado, em [15] elaborou-se uma tabela que contém a variação de dias e a variação do diâmetro, como segue adiante na tabela 3:

Tabela 3: Variação do Diâmetro (cm) de Tumores ao longo do tempo (dias) [15].

	Dias	Diâmetro (cm)
Até 10 dias	4,5	0,35
10 a 19 dias	13,5	0,375
20 a 29 dias	24,8	0,7
30 a 39 dias	36,25	1,18
40 a 49 dias	47,1	1,45
50 a 59 dias	54	2,33
60 a 69 dias	61	2,4
70 a 89 dias	77,9	2,8

Em [15] propõe-se um ajuste de curva exponencial devido à taxa de duplicação constante. Neste trabalho propomos um ajuste pela curva Logística, que tem como características fundamentais, um crescimento exponencial da variável dependente num estágio inicial e por fim a tendência à estabilidade quando ocorre a capacidade de suporte, ou seja, quando ocorre um ponto de inflexão.

A partir dessas explicações, e utilizando-se do *software Excel*<sup>®</sup>, os dados reais foram colocados em um gráfico de dispersão e então o Modelo que representa a curva Logística foi feito a partir do método Ford-Walfrod, o que implica em considerar, no nosso caso, que a estabilidade do diâmetro ( $d$ ) acontece

quando a variação diâmetro em uma variação de dias (**D**) permanece próximo a da variação de dias anterior, ou seja,  $d_{n+1} \approx d_n$ .

Como resultado, temos a tabela 4 que indica os valores obtidos para o modelo Logístico, além de compará-los com os dados reais e a Figura 17, que ilustra o gráfico com os resultados dos dados reais e a curva do ajuste:

Tabela 4: Comparação dos dados reais com resultado do Modelo Logístico.

	Dias (D)	Diâmetro(d) (cm)	Modelo Logístico
Até 10 dias	4,5	0,35	0,405
10 a 19 dias	13,5	0,375	0,584
20 a 29 dias	24,8	0,7	0,892
30 a 39 dias	36,25	1,18	1,298
40 a 49 dias	47,1	1,45	1,743
50 a 59 dias	54	2,33	2,033
60 a 69 dias	61	2,4	2,315
70 a 89 dias	77,9	2,8	2,877

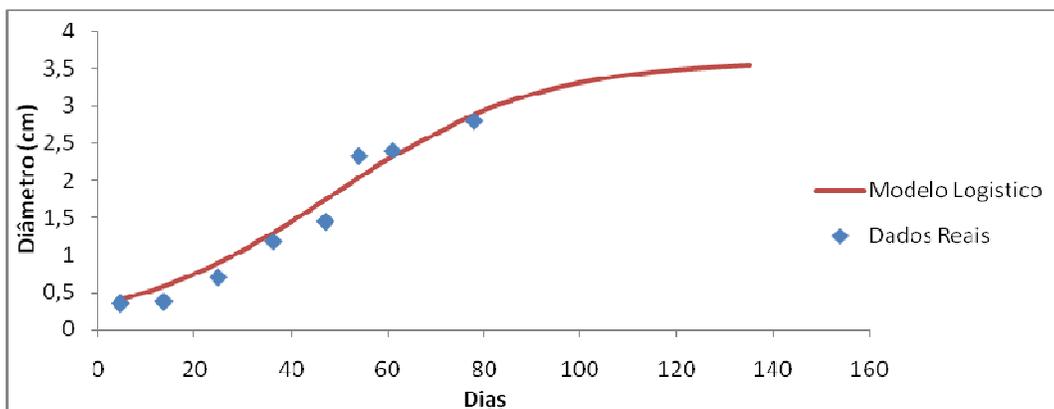


Figura 17: Gráfico de dispersão com dados reais e curva logística.

O gráfico resultante traz informações do quanto o diâmetro do tumor variou em relação ao tempo. Dada uma medida inicial, pode-se através da curva ter uma estimativa do seu crescimento posterior a um espaço de tempo.

Consideramos o ajuste bom, uma vez que se sabe que o tumor não pode crescer para sempre (exponencialmente), se não ocuparia toda superfície da pele de uma pessoa; em determinado momento ocorre à estabilização.

No capítulo 5, apresentamos um modelo de simulação computacional do crescimento tumoral, especificamente crescimento bidimensional do câncer de pele, através da capacidade visual dos Autômatos Celulares, visando um melhor entendimento da dinâmica de desenvolvimento dessa doença.

## Capítulo 5 - Modelo de Autômatos Celulares para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele

---

Os Autômatos Celulares foram propostos para modelar o crescimento do câncer pelo fato de possibilitar uma visualização privilegiada do que ocorre, além de oferecer flexibilidade na adaptação em diversos modelos matemáticos inseridos em diferentes campos de pesquisa. Sendo assim, é possível chegar a uma estimativa do tamanho do diâmetro, além de enxergar esse crescimento.

Uma característica marcante dos autômatos celulares é a facilidade com que podem ser implementados, devido à simplicidade de sua formulação e o surpreendente retorno visual capaz de demonstrar equilíbrio, órbitas, padrões complexos e estruturas organizadas como formação de ondas, entre outros [4], [20].

### 5.1. Autômatos Celulares

Na década de 1940, John Von Neumann trabalhava com sistemas replicativos, mas não conseguia construir um robô auto-replicativo (robô que fosse capaz de autocopiar a partir de peças separadas). Neumann resolveu então seguir os conselhos de Stanislaw Ulam, seu colega de trabalho, solucionando o problema distribuindo todo o sistema num universo discreto de tempo, composto por células. Cada célula é caracterizada por um estado interno, definido por um número inteiro. O sistema então evolui de acordo com uma regra, que é a mesma para todas as células sendo função dos estados da vizinhança. Esse sistema era conhecido como espaço celular e hoje é conhecido como Autômato Celular (AC). Com esse AC, Neumann conseguiu criar uma máquina que podia se clonar, criando uma réplica com nível de complexidade menor ou igual o original [19].

No final da década de 1950, pesquisadores notaram que os AC poderiam ser utilizados como computadores paralelos e na década seguinte alguns trabalhos foram publicados provando formalmente o poder de computação paralela que os

AC possuem. Hoje a computação paralela já virou moda entre os pesquisadores [19].

Em 1969, Konrad Zuse publicou um livro, propondo que as leis físicas do universo são discretas e que o universo é apenas um gigantesco autômato celular. Em 1970, o AC conhecido como *jogo da vida* se tornou famoso, ele foi criado por John Conway e simula os estados de vida e morte (1 e 0, respectivamente) de células em um AC com duas dimensões. A regra diz que se uma célula preta (estado 1, viva) tem 2 ou 3 vizinhos pretos, ela continua preta, se tem menos que 2 ou mais que 3 vizinhos pretos, ela se torna branca (estado 0, morta). Se uma célula branca tem 3 vizinhos pretos, se torna preta. Essas regras foram obtidas através de interações de bactérias em uma colônia. Mesmo o sistema sendo simples, ele é capaz de apresentar uma variedade enorme de comportamentos.

Na década de 1980, Stephen Wolfram publicou uma série de artigos onde investigou uma classe simples de AC, que nomeou de autômato celular elementar. Em 2002, com o aprofundamento de suas pesquisas, publicou outros trabalhos, onde apresenta alguns modelos físicos baseados em autômatos celulares. Até hoje, os AC vem sendo estudados e uma teoria curiosa deve ser enfatizada, Automatismo Universal, que diz que tudo o que existe no universo (formato de folhas, montanhas, continentes, o clima, chuvas, ventos, migração de animais, movimento de estrelas, processos da mente, etc.) é gerido por algoritmos básicos que são capazes de originar a complexidade que vemos na física, biologia, na sociedade, cultura e até na psicologia.

Os AC consistem de simulações discretas no tempo, espaço e no estado em que o sistema se encontra. O sistema é representado espacialmente através de um retículo de células que interagem obedecendo a algumas regras de mudança de estado. A dinâmica do sistema como um todo depende desta interação local entre células de acordo com a figura 18.

Para facilitar os cálculos, considera-se que quando um indivíduo morre nasce outro em seu lugar, mantendo assim a população constante e igualmente distribuída no espaço em que se encontra.

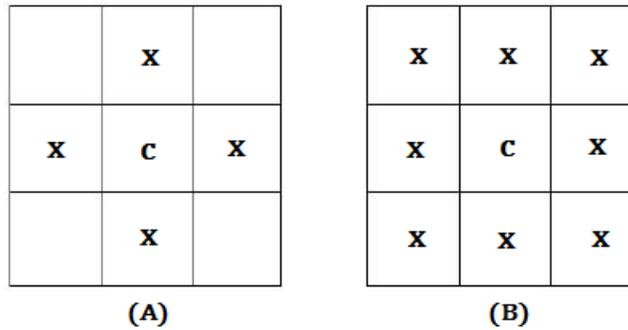


Figura 18: Exemplo de Tipos de Vizinhança. A letra C representa a célula escolhida e a letra X a sua vizinhança. Em (A) temos a vizinhança de von Neumann e em (B) a de Moore. As duas são ditas ser de raio 1. [20]

O objetivo final dos AC é uma descrição do comportamento macroscópico do fenômeno e não uma representação literal e fiel do processo microscópico, por isso não devem ser adotado como instrumento de previsão, e sim como um meio de experimentação. Deve-se considerá-los como um primeiro passo para a formulação de modelos matemáticos e não como uma substituição destes. Os resultados obtidos dos autômatos celulares podem comprovar hipóteses para depois a elaboração de um modelo final [20].

## 5.2. Simulações

Para elaborar o autômato foram utilizadas matrizes no *software Matlab*<sup>®</sup>, que geram crescimento direcionado do centro da matriz para o meio externo, respeitando as devidas fronteiras.

Adotou-se que cada célula do autômato tem tamanho de (1x1)mm e tem dois estados possíveis, saudável ou doente. A porcentagem de mortes das células (nem toda célula tumoral sobrevive, existe uma taxa de perda considerável [15]) é considerada nas regras do AC.

Os dados obtidos através da simulação se tornaram muito próximos aos dados reais de [15]. Exemplos de simulações seguem abaixo:

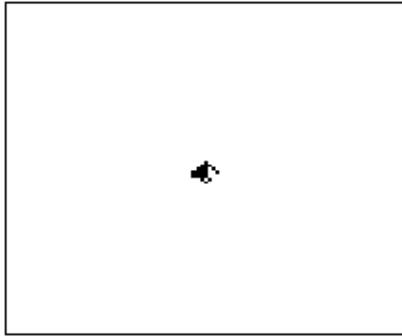


Figura 19: Simulação para 13 dias, diâmetro de 0,5 cm (erro: 0,125 cm) .

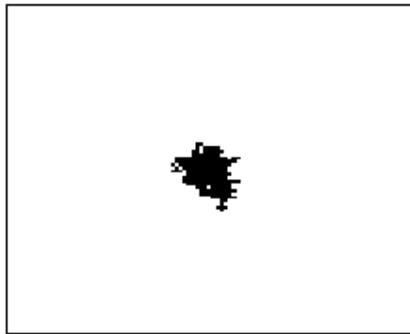


Figura 20: Simulação para 47 dias, diâmetro de 1,4 cm (erro: 0,04 cm).

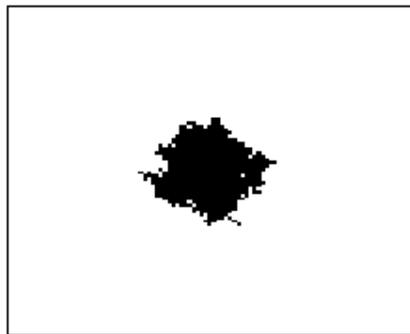


Figura 21: Simulação para 78 dias, diâmetro de 2,8cm (erro: 0,00 cm).

## Capitulo 6 - Modelo *Fuzzy* para Estimar o Diâmetro do Câncer de Pele

Finalmente, foi elaborado um sistema *fuzzy* para estimar o crescimento bidimensional do câncer. [14]

O sistema *fuzzy* aqui proposto possui uma variável de entrada (tempo em dias do tumor) e uma variável de saída (diâmetro do tumor). Veja o resumo do modelo na figura 22:

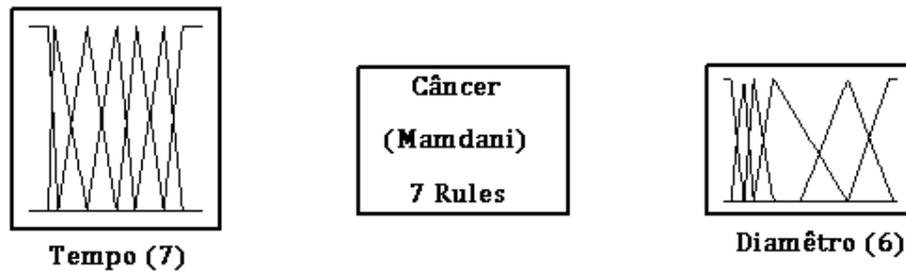


Figura 22: Resumo do modelo de controle *fuzzy* "Câncer".

- A variável *fuzzy* Tempo é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {muito baixo, baixo, médio baixo, médio, médio alto, alto e altíssimo} como na figura 23.
- A variável *fuzzy* Diâmetro é definida pelos subconjuntos *fuzzy* {muito baixo, baixo, médio baixo, médio, alto e muito alto} como na figura 24.

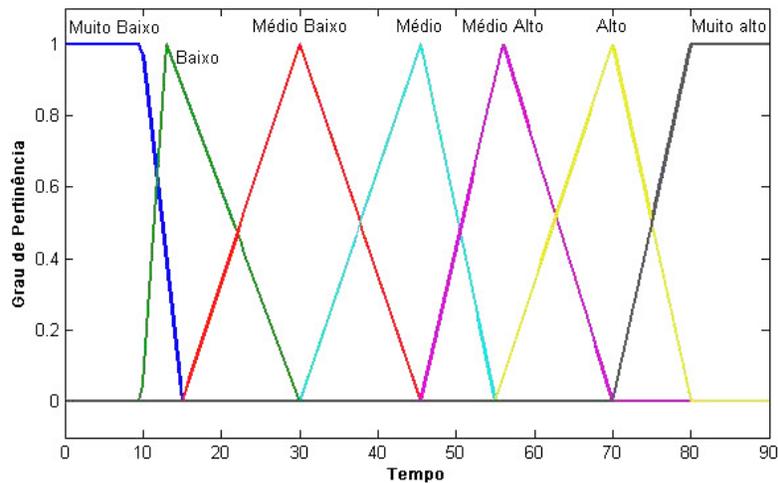


Figura 23: Variável "Tempo x grau de pertinência".

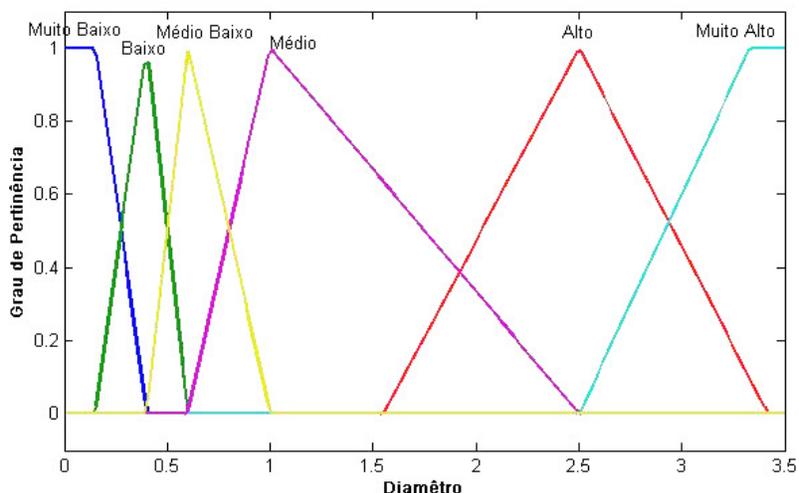


Figura 24: Variável “Diâmetro x grau de pertinência”.

A base de regras do sistema é composta por sete regras, enumeradas abaixo:

- 1 - Se o tempo é (muito baixo) então a variação no diâmetro será (baixo);
- 2 - Se o tempo é (baixo) então a variação no diâmetro será (baixo);
- 3 - Se o tempo é (médio baixo) então a variação no diâmetro será (médio baixo);
- 4 - Se o tempo é (médio) então a variação no diâmetro será (médio);
- 5 - Se o tempo é (médio alto) então a variação no diâmetro será (alto);
- 6 - Se o tempo é (alto) então a variação no diâmetro será (alto);
- 7 - Se o tempo é (muito alto) então a variação no diâmetro será (muito alto);

Adotou-se o método de inferência de Mamdani e a *defuzzyficação* do centro de gravidade, e com isso se obteve a curva dada pela figura 25:

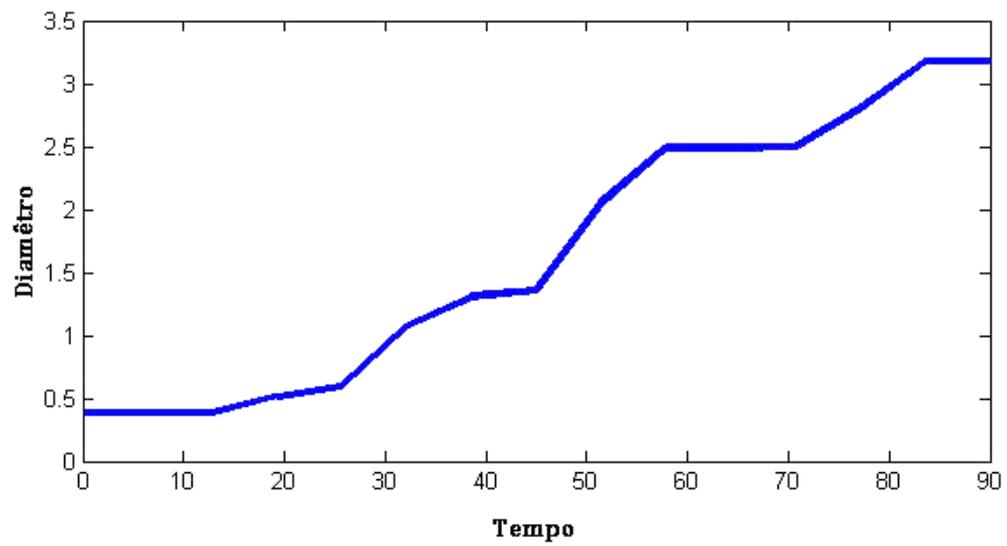


Figura 25: Solução dado pelo SBRF.

## Capítulo 7-Resultados

O objetivo nesse capítulo é comparar os resultados obtidos pelos três modelos propostos (curva logística, autômato celular e modelo *fuzzy*) com os dados reais: o ajuste de curva logística (curva em vermelho), os pontos resultantes do modelo com autômato (bolinhas em verde), a curva do modelo *fuzzy* (curva em azul) os dados reais dos pacientes (pontos em preto) estão dispostos na figura 26, e comparados na Tabela 5.

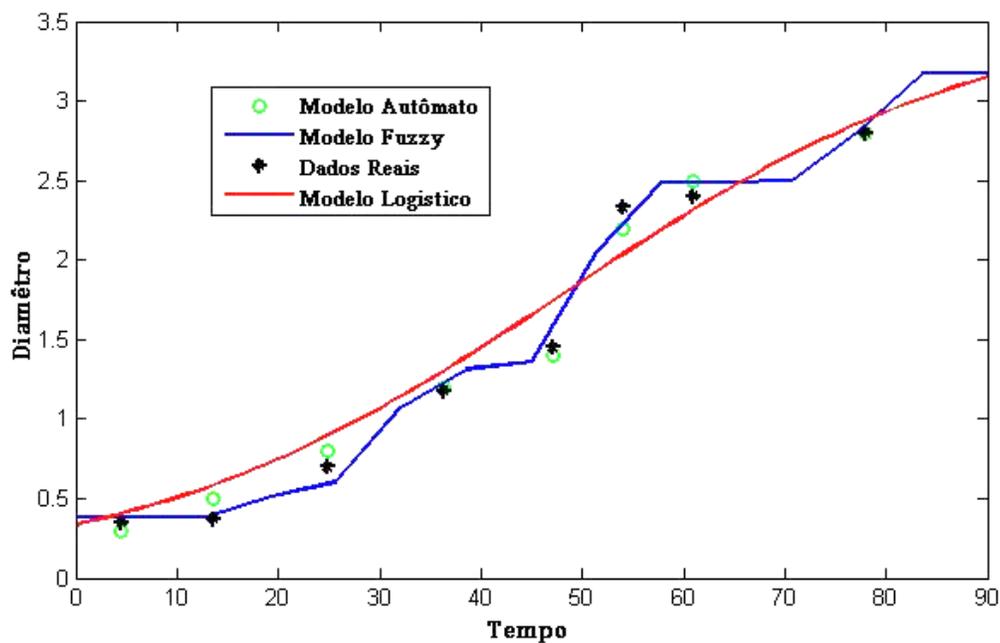


Figura 26: Comparação das curvas dos demais modelos

Tabela 5: Erros gerados pelas simulações (Modelo logístico, Autômato Celular e Modelo *Fuzzy*).

Dados Reais (Diâmetro) (cm)	Modelo Logístico		Modelo Autômato		Modelo <i>Fuzzy</i>	
	Resultado	Erro	Resultado	Erro	Resultado	Erro
0,35	0,405	-0,055	0,3	0,05	0,383	-0,033
0,375	0,584	-0,209	0,5	-0,125	0,383	-0,008
0,7	0,892	-0,192	0,8	-0,1	0,593	0,106
1,18	1,298	-0,118	1,2	-0,02	1,28	-0,096
1,45	1,743	-0,293	1,4	0,05	1,58	-0,130
2,33	2,033	0,296	2,2	0,13	2,35	-0,018
2,4	2,315	0,084	2,5	-0,1	2,49	-0,089

2,8	2,877	-0,077	2,8	0	2,87	-0,073
	<b>Erro Total</b>	1,326	<b>Erro Total</b>	0,575	<b>Erro Total</b>	0,555

---

## Capítulo 8 – Considerações Finais

---

Esse trabalho iniciou-se com estudo de conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e de Sistemas *Fuzzy*.

Posteriormente, utilizamos um sistema baseado em regras *fuzzy* para elaborar um modelo matemático para estimar a chance de um indivíduo desenvolver câncer de pele não melanoma. Para isso, consideramos fototipo, número de horas por dia de exposição solar ocupacional, número de horas por dia de exposição solar não ocupacional, histórico familiar e fotoproteção como variáveis de entrada do sistema *fuzzy*. Esse modelo foi publicado na Revista Biomatemática (2013).

A partir daí nossa preocupação foi modelar o desenvolvimento câncernão melanoma de pele, ou seja, estimar seu diâmetro em função do tempo. Inicialmente, fizemos um ajuste logístico para alguns dados reais encontrados na literatura. Depois, elaboramos um modelo de simulação computacional do crescimento tumoral, especificamente crescimento bidimensional do câncer de pele, através de Autômatos Celulares. E finalmente, propomos um sistema *fuzzy* para encontrar esse diâmetro.

Os Autômatos Celulares se mostram como uma boa ferramenta de visualização do crescimento tumoral bidimensional, visto que, a variação do diâmetro obtido com as simulações computacionais corresponde aproximadamente as encontradas nas pesquisas com pacientes reais, dentro de uma margem de erro de 1mm.

O modelo *fuzzy* obteve melhores resultados quando comparado com os outros dois modelos. Além do mais, a característica mais importante deste modelo consiste na propriedade do modelo em variar a taxa de crescimento, mostrando sua flexibilidade e contemplando as características incertas da doença.

Nos modelos *fuzzy* usam-se base de regras ao invés de equações e os conjuntos, tanto de entrada quanto de saída juntamente com a base de regras, podem ser definidos por especialistas da área indicando a participação direta do especialista no modelo matemático.

Podemos dizer também que, esse trabalho sugere a utilização da Teoria *Fuzzy* em Medicina. Tanto pelo estudo do crescimento do tumor de câncer, quanto pelo sistema *fuzzy* feito para estimar a chance de um indivíduo desenvolver a doença.

## Referências

---

- [1] BASSANEZI, R. C.; Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática, Editora Contexto, (2002).
- [2] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C., Introdução à teoria *Fuzzy*: Aplicações em Biomatemática, UNICAMP (2001).
- [3] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; Tópicos de Lógica *Fuzzy* e Biomatemática. IMECC - Unicamp, 2ªed., Campinas-SP, p.9-144, (2011).
- [4] EMMENDORFER, L. R., RODRIGUES L. A. D.; Um modelo de Autômatos Celulares para o Espalhamento Geográfico de Epidemias, TEMA, p.73-80, (2001).
- [5] ERMENTROUT, G. B. E EDELSTEIN-KESHET, L.; *Cellular automata approaches to biological modeling*. Theor. Biol., 160:97–133, (1993).
- [6] FERREIRA, F. R.; NASCIMENTO, L. F. C.; ROTTA, O.; *Fatores de risco para câncer da pele não melanoma em Taubaté, SP: um estudo caso-controle*. Rev. Ass. Med. Bras., 57(4): p.431–437, (2011).
- [7] FUJIMOTO, R. Y.; *Diagnóstico automático de defeitos em rolamentos baseado em Lógica Fuzzy*. 158 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia)-Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2005).
- [8] GARCIA, A. G., PEIXOTO, M. S.; Bovinocultura de corte: uma avaliação dos recursos exigidos pelos diferentes sistemas de produção através de modelagem matemática *fuzzy*; Biomatemática, volume 21, 141-152, (2011).
- [9] <http://periodicos.unifacef.com.br> (Acessado em 10/02/13, às 15h 30min.)
- [10] <http://www.teoriadacomplexidade.com.br> (Acessado em 10/02/13, às 16h 00min.)
- [11] INCA. Pele não Melanoma URL: <http://www.inca.gov.brctan.org/model.EcologicalModelling>, 214: p.39-44. (2012).

- [12] Instituto Nacional de Câncer José de Alencar Gomes da Silva. Coordenação Geral de Ações Estratégicas. Coordenação de Prevenção e Vigilância; Estimativa 2012; Incidência de Câncer no Brasil; Rio de Janeiro; INCA; (2011).
- [13] KLIR, G. E YUAN, B.; *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Application*. Prentice Hall, (1995).
- [14] LAGHETTO, B. K.; PEIXOTO, M. S.; *Uma Abordagem Fuzzy para Estimar o desenvolvimento de Câncer de Pele a partir de Fatores de Risco*; In: Revista de Biomatemática; 23 ed.; UNICAMP; Campinas,; p. 165 – 172, (2013).
- [15] MARZULLI, B. R.; PEIXOTO, M. S.; Um estudo de autômatos celulares para a simulação do crescimento tumoral. In: Congresso da Sociedade Latino Americana de Biologia Matemática XIV CLAB, Campinas, (2007).
- [16] PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C.; *A model of Cellular Automata for the spatial and temporal analysis of Citrus Sudden Death with the fuzzy parameter*. Ecological Modelling, v. 214, p. 45-52, (2008b).
- [17] PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; *Predator prey fuzzy model*. Ecological Modelling, v. 214, p. 39-44, (2008a).
- [18] PEIXOTO, M. S.; BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C.; Uma Abordagem *Fuzzy* para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo. TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 1, p. 119-128, (2007).
- [19] PEIXOTO M. S., BARROS L. C.; Um Estudo de Autômatos Celulares para o Espalhamento Geográfico de Epidemias com Parâmetros *Fuzzy*, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 5, p. 125-133, (2004).
- [20] PEIXOTO, M. S.; Sistemas Dinâmicos e Controladores *Fuzzy*: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo; Tese de Doutorado, IMECCUNICAMP, Campinas/SP, Brasil, (2005).
- [21] POPIM, R. C. et. al.; *Câncer de Pele: uso de medidas e preventivas e perfil demográfico de um grupo de risco* na cidade de Botucatu. Ciência e Saúde Coletiva, 13(4): p.1331-1338, (2008).

- [22] SANTOS, A. V. N.; FELIX, L. B.; VIEIRA, J. G. V.; *Estudo da logística de distribuição física de um laticínio utilizando lógica fuzzy*. Revista Produção, volume 22, número 4, (2012).
- [23] SHAW, I. S. E SIMÕES, M. G.; *Controle e Modelagem Fuzzy*. Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, (1999).
- [24] ZADEH, L. A. *Fuzzy sets*. Informat. Control, 8:338–353, (1965).
- [25] ZADEH, L. A.; *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, v.3:29, n.1, 28-44, (1973).