



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Campus SOROCABA

Panorama das Produções Acadêmicas na
Anped e ENEM: a Geometria na Escola
Básica via Registros de Representação
Semiótica

Trabalho de Conclusão de Curso

Alberto Miranda Jorge

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Licenciatura em Matemática

Sorocaba 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Campus SOROCABA

Panorama das Produções Acadêmicas na Anped e ENEM: a Geometria na Escola Básica via Registros de Representação Semiótica

Autor: Alberto Miranda Jorge

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Física, Química e Matemática (DFQM) da UFSCar, *Campus* Sorocaba, como requisito parcial para a obtenção da graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

**Licenciatura em Matemática
Sorocaba 2014**

Folha de aprovação

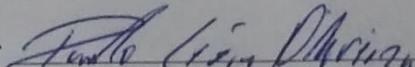
Alberto Miranda Jorge

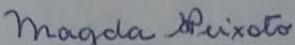
*Panorama das Produções Acadêmicas na Anped e ENEM: a geometria na
Escola Básica via registros de representação semiótica*

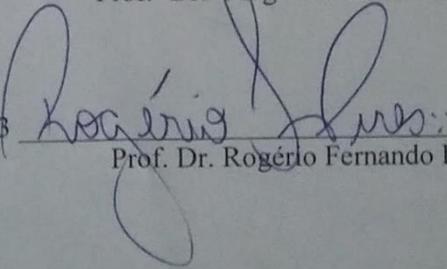
Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – *Campus Sorocaba*

Sorocaba, 19/09/2014.

Orientador 
Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Membro 2 
Prof.^a Dr.^a Magda da Silva Peixoto

Membro 3 
Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

**Este trabalho é dedicado a insistente Beatriz,
principal incentivadora dos meus estudos.**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente e principalmente a Deus por sempre estar me guiando nos caminhos certos.

Ao meu Mestre orientador Paulo Cesar Oliveira, pela paciência, pelo pulso firme e por não ter desistido de me orientar durante a caminhada desses cinco anos.

A todos os professores da graduação, que durante todo esse tempo foram fundamentais para minha formação acadêmica, humana e ética e que sempre tiveram disposição para me atender, tirar minhas dúvidas e principalmente pela paciência.

A banca examinadora, por ceder seu tempo para escutar um pouco sobre o meu trabalho.

A todos os colegas das turmas de Licenciatura em Matemática da UFSCar – *campus* Sorocaba, que sempre compartilharam conhecimento e deram forças para que tudo acontecesse de forma mais divertida.

A minha linda namorada Beatriz Krabbe Laghetto que sempre esteve comigo nos momentos mais difíceis e também nos melhores momentos dos cinco anos que estamos juntos na mesma caminhada. Continuaremos juntos na caminhada da vida!

Aos meus familiares, mãe, pai, irmã, pelo apoio e dedicação durante a vida.

Muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho descreve, analisa e discute o que tem sido produzido sobre o processo de ensino-aprendizagem de geometria, na forma de artigos e pôsteres, na Anped (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação) no período de 2000 à 2013 e nos ENEMs (Encontros Nacionais de Educação Matemática – edições de 2001, 2004, 2007 e 2010). O referencial teórico escolhido para o desenvolvimento desta pesquisa foi a teoria dos Registros de Representação Semiótica, criado e difundido por Raymond Duval. Sua escolha foi fundamentada no fato de que um objeto matemático se faz perceptível por meio de suas múltiplas representações semióticas. A questão de investigação foi formulada do seguinte modo: *quais as contribuições deste referencial teórico para o processo de ensino-aprendizagem da geometria na Educação Básica?* Para responder esta questão, a produção de informações foi obtida pela análise de 15 comunicações orais e pôsteres. Como um dos resultados de pesquisa, constatamos a valorização da transformação de registros e a coordenação dos mesmos.

Palavras-chave: Geometria, Registros de Representação Semiótica, ENEM, ANPED.

ABSTRACT

This paper describes, analyzes and discusses what has been produced on the process of teaching and learning of geometry, in the form of papers and posters in Anped (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação) from 2000 to 2013 and in ENEMs (Encontros Nacionais de Educação Matemática – editions of 2001, 2004, 2007 e 2010). The theoretical framework chosen for this research was the development of Representation Semiotics Registers theory, created and spread by Raymond Duval. His choice was based on the fact that a mathematical object becomes visible through its multiple semiotic representations. The research question was formulated as follows: what are the contributions of this theoretical framework for the teaching and learning of geometry in Elementary Education? To answer this question, the production of information was obtained by analysis of 15 oral presentations and posters. As one of the search results, we found the enhancement of processing of records and the coordination thereof.

Keywords: Geometry, Representation Semiotics Registers, ENEMs, ANPED.

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1 – Registros de Representação Semiótica.....	3
1.1. O conceito	3
1.2. O fenômeno da Congruência e da Não-Congruência	3
Capítulo 2 – A seleção de trabalhos da ANPED e ENEM	6
2.1. Percurso metodológico da pesquisa.....	6
2.2. Descrição quantitativa dos trabalhos	6
Capítulo 3 – Produção de informações	9
3.1. Comunicações e pôsteres da ANPED.....	9
3.1.1. Iniciação à Demonstração Aprendendo Conceitos Geométricos.....	9
3.1.2. A Geometria no Ensino Fundamental: Concepções de Professores e de Alunos.....	11
3.1.3. Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental.....	15
3.1.4. Registros Semióticos e sua Importância para a Compreensão de Conceitos Matemáticos: o Estudo de Caso de uma Professora Frente à Resolução de um Problema Introdutório às Geometrias Não-Euclidianas.....	18
3.2. Comunicações e pôsteres dos ENEM's	20
3.2.1. Teorema de Thales: Análise das variáveis de situação didática e adidática	20
3.2.2. Semelhanças de Figuras Planas: uma Proposta de Ensino.....	22
3.2.3. O Papel Heurístico de uma Figura Geométrica: o caso da operação de reconfiguração.	24
3.2.4. Uma Abordagem de Ensino-Aprendizagem do Conceito de Área.....	26
3.2.5. Possíveis Mudanças de Postura em Professores do Ensino Fundamental Trabalhando com Geometria.....	28
3.2.6. Composição de Figuras Geométricas Planas por Alunos do Ensino Médio	30
3.2.7. O Ensino de Semelhança: Uma Proposta de Ensino	33
3.2.8. A Validação de Conjecturas como Parte do Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática.....	35
3.2.9. Uma Análise dos Conteúdos de Geometria de uma das Coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio mais Solicitadas pelas Escolas Públicas Brasileiras ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.	37
3.2.10. O Estudo das Noções de Área e Perímetro Considerando os Níveis de Conhecimento Esperado dos Educadores como Ferramenta Didática.	38
3.2.11. Crivo-Geométrico: Conservação Única de Partes de Superfícies Reunidas que Formam o Contorno do Sólido Enquanto Objeto Geométrico Fechado	40
3.2.12. As Funções da Demonstração em um Trabalho com Construções Geométricas....	43

Capítulo 4 – Análise dos Trabalhos Seleccionados.....	45
Considerações finais	49
Referências.....	50

Lista de Figuras

Figura 1: Termômetro.	5
Figura 2: Construção Geométrica, seção 3.2.8.	36

Lista de Tabelas

Quadro 1 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentados na Anped.	7
Quadro 2 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentados nos ANEMs.	7

Introdução

Atualmente, há uma grande preocupação com os aspectos ligados não somente à aprendizagem e ao ensino, mas também relacionados à forma de como o saber pode ser estruturado para ser ensinado e aprendido. Assim, dentro deste ponto de vista, encontramos os estudos de Raymond Duval¹ que, ao tomar a questão dos registros de representação semiótica como premissa para suas investigações, discute a especificidade da aprendizagem e do ensino da matemática ligada aos aspectos semióticos das representações matemáticas.

A base do pensamento matemático, durante a Antiguidade grega e Idade Média, era a da intuição geométrica, cuja retórica era a linguagem que se usava para demonstrar, explicar, representar o conhecimento. Já durante a Idade Clássica, uma nova forma de linguagem matemática, a escritura simbólica, ou seja, algébrica, possibilitou a construção de um pensamento caracterizado como racional e estruturado. Quanto às figuras geométricas, estas ganharam um novo modo de representação, a partir da instauração de uma nova forma de olhar e de representar o espaço, um espaço em perspectiva (Flores, 2006).

O que se percebe, enfim, é que as representações tornaram-se centrais para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Isso significa que para a aquisição de conhecimentos se faz importante a criação e a diferenciação de registros de representação que se constituem dentro de sistemas semióticos: linguagem natural, sistemas de numeração, códigos iconográficos, etc. Daí, muitos registros são inventados: registros de linguagem que vão desde a linguagem natural até aquelas do tipo formal; registros de imagens como as figuras geométricas, as representações gráficas, os esquemas. Portanto, registros de representação semiótica são produzidos segundo um sistema semiótico, isto é, a partir de regras, convenções e códigos. (Flores, 2006)

Competências de caráter geométrico como o entendimento das maneiras de ocupação do espaço, localização e visualização, bem como o deslocamento de objetos, são competências que o ser humano precisa utilizar cotidianamente. A convivência dos seres no espaço bem como sua interpretação, é facilitada pelo

¹ Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação e investiga sobre a aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Côte d'Opale, França.

desenvolvimento de competências que incorporam os saberes relacionados à geometria. Sendo assim, se faz importante entender o aspecto cognitivo referente a matemática, devido a complexidade do conhecimento geométrico. Neste sentido, avaliamos a influência da Teoria de Raymond Duval sobre Registros de Representações Semióticas, descrita neste trabalho nas produções acadêmicas no período de 2000 a 2013 que trataram do ensino de geometria.

Para cumprir este objetivo, optamos por uma investigação qualitativa na modalidade de pesquisa bibliográfica, a qual culminou no estudo sobre os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) de 2001, 2004, 2007 e 2010 e as Reuniões Anuais da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED) de 2000 a 2013.

No que diz respeito ao cenário acadêmico utilizamos os anais referentes aos ENEMs (2001, 2004, 2007, 2010) por ser um evento promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) desde 1987, com o objetivo de difusão das produções acadêmicas da referida área; na forma de mini-cursos, pôsteres, relatos de experiência, comunicações científicas e palestras. Em relação aos relatos das Reuniões Anuais publicados pela Anped, utilizamos aqueles referentes ao período de 2000 a 2013, devido à criação de um Grupo de Trabalho em Educação Matemática (GT) no ano 2000 que, no ano posterior, ganhou a sigla GT-19. Além disso, a escolha desta instituição refere-se ao fato de ser o meio mais importante de divulgação da pesquisa brasileira em Educação.

O desenvolvimento dessa pesquisa foi norteado pela seguinte questão de investigação: *quais as contribuições deste referencial teórico para o processo de ensino-aprendizagem da geometria na Educação Básica?*

A redação deste trabalho acadêmico foi organizada nos seguintes capítulos:

Capítulo 1 – Registros de Representação Semiótica

Capítulo 2 – A seleção de trabalhos da ANPED e ENEM

Capítulo 3 – Produção de informações

Capítulo 4 – Análise dos Trabalhos Selecionados

Considerações finais

Capítulo 1 – Registros de Representação Semiótica

1.1. O conceito

A noção de representação semiótica, segundo Duval (2009), pode ser descrita como uma “mudança de forma”; por exemplo, planificar um sólido geométrico. Os registros de representações semióticas são, então, as “diferentes formas” em que certo conteúdo matemático pode ser apresentado.

O que caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo e a diferencia das demais ciências tem haver com a importância fundamental das representações semióticas e na enorme variedade dessas representações que se apresentam nessa ciência como, por exemplo, os sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural (Duval 2009).

Há quatro tipos diferentes de registros de representação mobilizáveis no funcionamento matemático: registros multifuncionais (o seu processo interno de transformação não utiliza algoritmos) e monofuncionais (algoritmizáveis) na representação discursiva e não-discursiva. Como exemplo de representação discursiva, podemos citar o processo de dedução como forma de validar um teorema. Em termos de representação não-discursiva podemos citar as construções geométricas com régua e compasso (Duval, 2003).

Na medida em que a atividade matemática consiste na transformação de representações, podemos classificar essas transformações em dois tipos de processos de transformação: tratamentos e conversões. O tratamento é um tipo de transformação de representação que ocorre dentro de um mesmo registro, por exemplo, a construção de triângulos semelhantes. A conversão é uma transformação de representação que consiste em mudar um registro sem alterar os objetos denotados, por exemplo, calcular a área de um polígono a partir de sua figura (Duval, 2009).

1.2. O fenômeno da Congruência e da Não-Congruência

Duval (2009) destaca que a grande dificuldade dos estudantes reside nas conversões não-congruentes. Esse é um fator que explica, mas não justifica o mau desempenho dos alunos em tais atividades, porque a dificuldade não é

necessariamente a mesma nos dois sentidos de conversão. Para as atividades de não-congruência não é necessário apenas dispor dos diversos registros de representação semiótica, mas também focalizar a aprendizagem dos conceitos envolvidos no enunciado das questões.

Para determinar se duas conversões são congruentes ou não, é preciso começar por segmentá-la em suas unidades significantes respectivas, de tal modo que elas possam ser colocadas em correspondência. Ao final dessa comparação, podemos ver se as unidades significantes são, em cada um dos registros, unidades significantes simples ou combinações de unidades simples (Duval 2009).

Vamos recorrer a um dos itens da prova do SARESP (2009) apresentado por Oliveira et al (2011:20) para aprofundar sobre a análise do fenômeno de congruência:

Uma parede de uma escola, com formato retangular, tem 4 m de comprimento e 3 m de altura. A diretora quer pintá-la utilizando duas cores de tinta acrílica. A cinza será utilizada ao longo de todo seu comprimento, mas até a altura de 2 m. O restante da parede será pintado com tinta branca. A medida da área, em m^2 , a ser pintada de branco é

A partir da leitura da questão, é desejável que o aluno tenha o conhecimento de figuras geométricas planas, em particular o retângulo, suas relações de comprimento, altura e unidade de medida. Para o início da resolução desta tarefa, em termos de registros de representação semiótica, é possível converter o registro na língua natural para o figural (desenho ilustrativo para o enunciado), ambos qualificados de registros multifuncionais (não-algoritmizáveis). Se observarmos os dois sentidos da conversão há um fenômeno de congruência, pois é imediata e direta a transição entre as unidades significantes desenho e o texto escrito e, vice-versa.

Na continuidade da resolução, o aluno deverá observar que o muro de formato retangular está subdividido em outros dois retângulos, onde um deles vai ser pintado de cinza e o outro de branco. Novamente é necessário uma transformação de registros, do figural para um registro monofuncional (algoritmizável), na forma numérica (cálculo de área); porém, em todo o processo mantém-se o fenômeno de congruência na correspondência de unidades significantes.

Como exemplo de um fenômeno de não-congruência recorreremos novamente a outro item do SARESP (2009) apresentado em Oliveira et al (2011:24):

Kátia encontrou um termômetro com marcação numa escala desconhecida. Havia apenas dois números com marcação legível. Para encontrar a temperatura marcada naquele momento, Kátia achou uma boa idéia fazer medições com sua régua, em cm, conforme a figura a seguir.

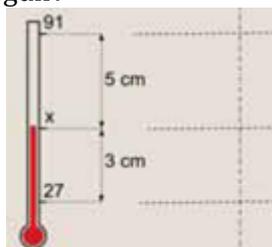


Figura 1: Termômetro.

Qual o valor que Katia encontrou para a temperatura x ?

Este enunciado contempla o registro na língua natural e o figural. Na resolução o desenho é o registro de partida para a conversão de registro, no caso, o simbólico algébrico e numérico.

O tratamento na mobilização de representações semióticas ocorre na produção de equações equivalentes para determinar o valor desconhecido (x) da temperatura.

O fenômeno de não-congruência ocorre no duplo sentido da conversão. Quando a conversão ocorre no sentido da escrita simbólica (algébrica e numérica) da equação, não se reconhece o conceito de paralelismo e proporcionalidade aplicado ao contexto das marcações no termômetro, devido ao fato de que no cotidiano escolar as atividades habituais desse tema são relacionadas à figura geométrica do triângulo e/ou trapézio.

O sentido inverso da conversão, ou seja, partir do registro simbólico numérico ($x = 51\text{cm}$) e chegar a identificar e reconhecer a constante de proporcionalidade (k) no registro figural (desenho da escala do termômetro) também é um fenômeno de não-congruência; devido a necessidade de calcular a distância entre duas marcações no termômetro e relacioná-la com a respectiva medição na régua, ou seja, $k = 8$.

Capítulo 2 – A seleção de trabalhos da ANPED e ENEM

2.1. Percurso metodológico da pesquisa

Esta investigação contemplou as características do método de pesquisa qualitativa bibliográfica, que consiste em uma linha de investigação linguística. Nesta perspectiva, a produção de informações foi obtida pela análise das produções acadêmicas no período de 2000 a 2013 que trataram do ensino de geometria, segundo os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e as Reuniões Anuais da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED).

A escolha dos anais referentes aos ENEMs justifica-se por ser um evento promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) desde 1987, com o objetivo de difusão das produções acadêmicas da referida área; na forma de mini-cursos, pôsteres, relatos de experiência, comunicações científicas e palestras. Em relação aos relatos das Reuniões Anuais publicados pela Anped, utilizamos aqueles referentes ao período de 2000 a 2013, devido à criação de um Grupo de Trabalho em Educação Matemática (GT) no ano 2000 que, no ano posterior, ganhou a sigla GT-19.

Os trabalhos selecionados foram comunicações orais e pôsteres, cuja análise constou de duas fases. Primeiramente consideramos as seguintes categorias de análise: ano de publicação, título e autor. Numa segunda fase, informações mais específicas, como o problema de pesquisa, objetivos do estudo, procedimentos metodológicos, resultados obtidos, contribuições e implicações no âmbito educacional, especificamente, no Ensino Fundamental II e Médio.

2.2. Descrição quantitativa dos trabalhos

Apresentamos a seguir duas tabulações (quadro 1 e 2) relativas à quantidade de trabalhos publicados nos referidos eventos:

Quadro 1 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentados na Anped.

TRABALHOS APRESENTADOS NA ANPED – GT 19 ENTRE 2000 E 2013				
ANO	COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA	POSTER	REFERENCIAS EM GEOMETRIA	REFERENCIAIS EM SEMIÓTICA/ GEOMETRIA
2000	17	3	5	1
2001	13	2	2	1
2002	10	3	3	1
2003	11	1	2	0
2004	13	3	3	0
2005	19	4	2	1
2006	20	1	2	0
2007	15	0	1	0
2008	16	3	3	0
2009	10	1	0	0
2010	18	2	1	0
2011	15	0	2	0
2012	12	1	0	0
2013	20	4	1	0
TOTAL	209	28	27	4

Fonte: arquivo do pesquisador.

Quadro 2 - Descrição quantitativa de trabalhos apresentados nos ENEMs.

ANO	COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA	POSTER	GEOMETRIA (Comunicação e Poster)	REFERENCIAIS EM SEMIÓTICA/ GEOMETRIA
2001	91	3	15	1
2004	166	58	39	4
2007	239	131	54	2
2010	460	150	50	5
TOTAL	1725	342	234	12

Fonte: arquivo do pesquisador.

No ENEM de 2007 identificamos o trabalho de Farias (2007) intitulado “Estudo do Papel Reciproco entre os Domínios Numérico-Algébrico e Geométrico no Ensino Secundário: Caso dos Sistemas Educativos Brasileiros e Francês”, o qual citou a obra “*Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*” de Duval (1993); como uma de suas referências bibliográficas. No entanto, Farias (2007), não menciona em seu texto nenhum assunto relativo aos registros de representação semiótica. Neste sentido, excluímos esta produção do levantamento quantitativo apresentado no Quadro 2.

A mesma situação ocorreu com o trabalho de Farias e Farias (2007) intitulado “Construção de Situações de Aprendizagem em Geometria Plana

Utilizando o Software *Cabri-Géomètre*: O Deslocamento no Ambiente Computacional Cabri-Géomètre”, os quais citaram a obra “*Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence*” de Duval (1988); como uma de suas referências.

Levando em conta os dois quadros, temos 1934 comunicações científicas e 370 pôsteres, num total de 2304 trabalhos. Em relação ao tema geometria há 261 produções nas referidas categorias, perfazendo aproximadamente 11,33% do total. Quando observamos a associação da teoria dos registros de representação semiótica com a geometria, identificamos 16 produções, ou seja, 6,13% dos trabalhos relativos ao tema geometria.

No próximo capítulo, apresentamos a resenha de cada um desses trabalhos selecionados, bem como a relação estabelecida entre a referida teoria e o processo de ensino-aprendizagem da geometria na escola básica.

Capítulo 3 – Produção de informações

Neste capítulo dedicamos à apresentação da descrição das comunicações científicas e pôsteres selecionados nos ENEM e Anped.

3.1. Comunicações e pôsteres da ANPED

A seguir estão as descrições das comunicações científicas e pôsteres selecionados da Anped.

3.1.1. Iniciação à Demonstração Aprendendo Conceitos Geométricos

Almouloud e Mello (2000) apontaram como um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino brasileiro o baixo desempenho dos alunos do Ensino Fundamental, em Matemática. A análise das avaliações externas aplicadas mostrou que o desempenho dos alunos tornava-se ainda mais baixo quando o tema abordado era a Geometria. Os autores destacaram alguns fatos que justificam esse nível de desempenho:

- Grande parte dos professores recebeu uma formação de base muito precária em Geometria, devido à própria influência que o movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 60/70;
- Os cursos de formação inicial de professores - tanto os cursos de magistério como os de licenciatura - continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de Geometria;
- Também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido, igualmente, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria. (Almouloud e Mello, 2000, p. 2)

Partindo dessas premissas o objetivo do trabalho em questão foi propor uma reflexão didática sobre os problemas de ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos nos 3º e 4º ciclos básicos do Ensino Fundamental da época, e uma apresentação dos principais resultados de uma sequencia didática tendo por intuito a iniciação à demonstração no ensino da Geometria.

Os autores utilizaram como referencial teórico os Registros de Representação Semiótica para análise das causas do fracasso no ensino-aprendizagem da demonstração em geometria. O processo dedutivo envolve uma

atividade cognitiva específica cuja aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto.

Para os autores, a aprendizagem da demonstração, segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica, consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. Os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos. A demonstração tem por objetivo explicar validando, isto é, levando à convicção, a partir de uma sequência de enunciados organizados, numa regra de dedução que interfere nas capacidades cognitivas, metodológicas e linguísticas.

Almouloud e Mello (2000) organizaram uma sequência didática aplicada em uma classe de 14 alunos de um nono ano do Ensino Fundamental. O desenvolvimento das atividades transcorreu num processo de aprendizado através de discussão, distinção entre definição e propriedade, associação dos registros de representação e estabelecimento de um conceito usando uma definição ou uma propriedade. Como resultado de pesquisa, constatou-se uma nova postura crítica dos alunos sobre a veracidade das propriedades geométricas e discussões entre eles frente às definições dos objetos matemáticos da Geometria Euclidiana.

Almouloud e Mello (2000) observaram dificuldades frente às atividades propostas, quanto ao desenvolvimento das seguintes habilidades geométricas: distinção entre definições e teorema, reconhecimento de hipóteses e conclusão de uma propriedade; entendimento da figura geométrica associada a um teorema como “âncora das hipóteses”; compreensão das mudanças de registro de representação; organização da prova e redação da demonstração.

Como previsto na reflexão teórica, a passagem da geometria empírica à geometria dedutiva constitui um obstáculo no início da sequência didática, pois os alunos estavam acostumados a uma geometria de medidas e construção, envolvendo aplicações de fórmulas e cálculos.

Outro aspecto importante destacado por Almouloud e Mello (2000) foi a falta de compromisso do aluno com as atividades desenvolvidas, pois não teria uma nota no final da sequência, além das atividades não contemplarem o planejamento de matemática da referida escola. Neste sentido, os autores

ratificaram à necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar a demonstração em Geometria desde o Ensino Fundamental.

3.1.2. A Geometria no Ensino Fundamental: Concepções de Professores e de Alunos.

Este trabalho de autoria de Almouloud e Manrique (2001) é fruto de reflexões do projeto “Estudo de fenômenos de ensino-aprendizagem de noções geométricas”, que foi desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) no período de 2000 a 2001, o que teve por objetivo buscar respostas para questões como: que fenômenos estão ligados à formação de conceitos geométricos dos alunos de 5^a à 8^a série? Quais as representações dos professores dessas séries em relação ao papel da Geometria na formação do aluno e em relação ao ensino e à aprendizagem de conceitos/habilidades geométricas? De que forma o computador pode atuar na formação e no desenvolvimento de conceitos geométricos?

Como relato de pesquisa, Almouloud e Manrique (2001) decidiram apresentar os fundamentos metodológicos da investigação e os resultados de um estudo diagnóstico cujo objetivo foi a identificação de fatores que influenciavam no ensino e na aprendizagem da Geometria.

No intuito de buscar respostas para as questões formuladas, os autores empregaram duas ações:

- a) diagnosticar por meio de testes, entrevistas individuais e observação, os fatores que influenciavam o ensino-aprendizagem da Geometria e elaboraram atividades a serem trabalhadas com alunos do Ensino Fundamental de escolas estaduais de Guarulhos e Caieiras, com o objetivo de desenvolver conceitos e habilidades geométricas (conceito, construção geométrica, demonstração, raciocínio...);
- b) oferecer aos professores de escolas públicas, envolvidos no projeto uma oportunidade de se capacitarem em conteúdos geométricos, métodos ativos e recursos didáticos por meio de discussões em grupo a respeito do ensino-aprendizagem da Geometria;
- c) permear todo o trabalho com atividades desenvolvidas no computador a partir de programas educacionais.

O processo metodológico da pesquisa iniciou-se com a aplicação de um questionário que teve por objetivo diagnosticar a concepção que 24 professores da rede pública e particular do Ensino Fundamental paulista tinham tanto de conceitos geométricos, quanto de sua postura em sala de aula. Em seguida, foi elaborado tarefas em que o professor pudesse rever seus conhecimentos sobre o assunto manipulando materiais concretos, instrumentos de desenho, construindo novos materiais e utilizando os programas Cabri Géomètre II e Logo.

Paralelamente, Almouloud e Manrique (2001) aplicaram um teste diagnóstico em alunos de 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio da Rede Estadual, num total de 489 estudantes, nas escolas em que esses professores lecionavam com o intuito de verificar a concepção dos alunos a respeito de conceitos geométricos e dificuldades que apresentam em relação a esses conceitos.

Outra atividade metodológica foi a organização de algumas visitas aos professores das escolas da região citada, no intuito de acompanhar as práticas docentes a fim de compará-las às práticas que se forjaram no decurso do projeto.

A capacitação dos professores foi feita sob três aspectos: conteúdo no que diz respeito à Geometria, formação didática e uma análise crítica da prática de ensino, observando, orientando e analisando as ações perante seus alunos.

Após a análise das concepções dos professores do Ensino Fundamental e de seus alunos, Almouloud e Manrique (2001) desenvolveram uma série de atividades no intuito de proporcionar a esses professores condições favoráveis a uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

A fundamentação teórica para o trabalho desenvolvido junto aos professores, por um lado, baseou-se nos cinco níveis de compreensão da Geometria de Van Hiele: Nível básico ou visualização (as figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo); Nível de análise (iniciar uma análise dos conceitos geométricos, a partir de observações e experiências, começar a diferenciar as características das figuras); Nível de dedução formal (estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático) e Nível do rigor (tornar os professores capazes de trabalhar em vários sistemas axiomáticos). Por outro

lado, levou em consideração, a teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2009), enfatizando os seguintes aspectos:

- a) a coordenação de diferentes registros de representação (a escrita algébrica, as figuras geométricas, o discurso na língua natural) ligados ao tratamento dos conhecimentos;
- b) as figuras como um suporte intuitivo importante na resolução de um problema de Geometria, pois elas dão uma visão maior do que o enunciado, e permitem explorar, antecipar, conjecturar;
- c) leitura e interpretação das definições e propriedades matemáticas, enfatizando o fato de que as informações contidas no enunciado obedecem às regras matemáticas precisas. Ao compreender seu senso global, o aluno será capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações entre elas;
- d) constituição de uma rede semântica dos objetos matemáticos e dos teoremas solicitados por uma demonstração associada ao registro de representação em uma rede de propriedades lógicas.

Como resultado da análise do questionário paralelo aplicado aos alunos foi evidenciado que a grande maioria dos alunos deixou de responder as questões propostas.

Outro fato que mereceu uma reflexão posterior sobre o ensino da Geometria, foi o desconhecimento por parte dos alunos de alguns termos matemáticos como: hipotenusa, cateto, argumento, aresta, triângulo retângulo e outros.

Pode-se concluir também, que nas questões de múltiplas escolhas grande parte dos alunos assinalou uma das alternativas, mas não apresentou indícios de qualquer raciocínio.

Questões envolvendo uma situação-problema foram melhores aceitas, provocando uma tentativa de solução por parte dos alunos. Segundo Almouloud e Manrique (2001), porque a linguagem utilizada não tem o rigor tradicional formal e propõe uma situação de sala de aula do dia-a-dia do aluno, deixando-o sentir-se se à vontade em dar a sua opinião para tentar resolver o problema.

A aplicação desses questionários permitiu obter uma visão da realidade dos alunos sob a responsabilidade dos professores participantes da formação em Geometria, e revelou a necessidade de uma formação em Matemática para esses alunos, dando mais ênfase à Geometria.

O questionário aplicado aos professores participantes do projeto teve por objetivo analisar as representações dos professores em relação ao papel da Geometria na formação do aluno, ao ensino e à aprendizagem de conceitos/habilidades geométricos. Foi dividido em cinco partes: a primeira parte, contendo dados do entrevistado, procurou verificar a formação acadêmica. A segunda parte levou em conta o acesso à informação por parte do professor. A terceira parte versou sobre a metodologia e a prática desses professores em que se apoiam para trabalhar. A quarta parte tratou da opinião dos professores sobre a importância da Geometria e sobre as dificuldades percebidas por parte de seus alunos e as estratégias a usar para saná-las. A quinta parte tratou de resolução de problemas em Geometria e da análise didática dos erros dos alunos.

Neste questionário, Almouloud e Manrique (2001) estavam interessados em verificar o que os professores pensavam sobre o seu próprio desempenho profissional, no intuito de subsidiarem o seu trabalho em classe e conhecer suas fontes de pesquisa em relação à Geometria.

Os dados obtidos nesses questionários revelaram certa visão da realidade dos alunos sob a responsabilidade dos professores pesquisados, e revelou também a necessidade de uma formação em Geometria para esses professores. Esses resultados nortearam as hipóteses quanto às escolhas de conteúdos geométricos e quanto às variáveis didáticas a levar em consideração na capacitação dos professores do Ensino Fundamental envolvidos no projeto, e na construção de situações-problema para o ensino-aprendizagem de conceitos geométricos.

Após a análise das concepções dos professores do Ensino Fundamental e de seus alunos, foi desenvolvida uma série de atividades no intuito de proporcionar a esses professores condições favoráveis a uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria. Os resultados desta parte da pesquisa estavam em andamento e foram publicados em trabalhos posteriores, como o que apresentamos a seguir.

3.1.3. Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental

Este texto apresenta resultados parciais de um projeto maior que envolve a evolução das concepções dos professores a respeito da matemática e seu ensino, conforme o texto anterior (Almouloud e Manrique, 2001). Mais especificamente, este trabalho teve como objetivo estudar os fatores e as estratégias suscetíveis de influenciar o ensino e a aprendizagem de noções geométricas nas séries finais do Ensino Fundamental.

A análise do sistema educativo, do discurso dos professores e dos jogos que envolvem a própria geometria, permitiu aos autores identificar certos fatores que poderão ser considerados como origem das dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e aprendizagem de saberes e de conhecimentos geométricos.

Em relação à formação dos professores, Manrique, Silva e Almouloud (2002) discutiram o conteúdo de expressões como: “possuem uma formação muito precária em Geometria”, “os cursos de formação inicial não integram suficientemente uma reflexão profunda a respeito do ensino de Geometria”.

Nesta pesquisa, o estudo dos livros didáticos, dos Parâmetros Curriculares Nacionais e das informações obtidas a partir dos questionários aplicados revelaram certa realidade do ensino de Geometria e a necessidade de uma formação contínua dos professores. Estes resultados guiaram Manrique, Silva e Almouloud (2002) nas escolhas das hipóteses de trabalho quanto aos conteúdos geométricos e as variáveis colocadas em jogo na formação dos professores, e também, nas escolhas das situações de ensino-aprendizagem.

Neste artigo foi analisado, essencialmente, os fundamentos metodológicos e teóricos da pesquisa e os resultados de atividades de formação que foram realizados com professores de matemática que participavam do projeto.

O percurso metodológico desta pesquisa foi permeado pelas seguintes etapas:

- a) realização de um estudo diagnóstico: testes, entrevistas individuais e observações;

- b) elaboração de situações didáticas que envolviam conceitos, construções geométricas, raciocínio, demonstrações, estudo no grupo pesquisado visando sua formação para a Geometria. Tais situações eram compostas de atividades que foram tratadas com a ajuda de papel e lápis ou do ambiente informático, com o software Cabri Géomètre II e a linguagem Logo;
- c) reuniões semanais para análise das atividades dos professores em formação; experimentação e análise *a posteriori* de situações didáticas em salas de aula desses professores;
- d) Experimentação e análise *a posteriori* de situações didáticas em salas de aula desses professores;
- e) observação e estudo das possíveis mudanças na prática e no discurso desses professores.

O processo de formação apoiou-se em três aspectos: os conteúdos geométricos, a formação didática e a análise crítica da prática de sala de aula. As práticas de sala de aula designaram a relação entre o que o professor diz e faz em classe, considerando sua preparação, as concepções e conhecimentos de Matemática que tem e de suas decisões instantâneas, conscientes ou não.

O trabalho de formação em curso teve apoio nos níveis de desenvolvimento da Geometria de Van Hiele e na teoria dos registros de representação semiótica, colocando em jogo a importância da coordenação de diferentes registros de representação semiótica, do papel da figura na resolução de problemas geométricos, da leitura e interpretação de textos matemáticos, da constituição de uma rede semântica de objetos matemáticos e de teoremas (e/ou definições) que podem ser utilizados na demonstração.

No decorrer do trabalho, Manrique, Silva e Almouloud (2002) perceberam que os professores pesquisados preferiam e reivindicavam um trabalho voltado para a Geometria métrica, alegando ser um conteúdo necessário para sua prática de sala de aula e com utilização no cotidiano. No entanto, notou-se que uma das dificuldades desses professores estava relacionada ao conceito de distância, pois nos momentos em que esse conhecimento foi necessário para que a atividade fosse

realizada com sucesso, os professores o apresentavam de forma incompleta e errônea.

Avaliamos que no trabalho de Manrique, Silva e Almouloud (2002), implicitamente os registros de representação semiótica foram relevantes nesta pesquisa, pelo fato de que a mobilização de diversos registros está associado à apreensão conceitual. O *déficit* por parte destes professores quanto à definição do conceito de distância prejudica este processo de mobilização.

Outro resultado de pesquisa, apontado por Manrique, Silva e Almouloud (2002) é que professores participantes do projeto, embora tenham mudado de postura perante algumas situações, tiveram mais facilidade em lidar com o concreto. Conseqüentemente, isto poderá se tornar um entrave para atingir e conduzir seus alunos a um pensamento mais genérico e mais formal.

A dificuldade em fazer relações provavelmente foi o que fez com que os professores tratassem o conceito de distância em sala de aula, distinguindo o que era relativo ao cotidiano e o que pertencia ao contexto matemático. O fato dos sujeitos de pesquisa serem adultos, não implica que os mesmos tenham raciocínios abstratos. Manrique, Silva e Almouloud (2002) observaram que os professores não enfatizaram nas situações-problemas propostas em sala de aula o desenvolvimento da compreensão de enunciados, vocabulário próprio, tratamento de informações. Em diversos momentos, esta postura impossibilitou os alunos de solucionar um problema com sucesso.

No que diz respeito à contribuição das novas tecnologias na construção dos conhecimentos pode-se perceber que, de fato, o uso do computador facilita a visualização e a percepção de propriedades que com outros recursos poderiam não ser descobertas. No entanto, Manrique, Silva e Almouloud (2002), afirmaram que a maioria dos professores não teve acesso a uma formação adequada em Geometria, assim o uso dessas tecnologias se tornou um problema a mais para resolver .

3.1.4 Registros Semióticos e sua Importância para a Compreensão de Conceitos Matemáticos: o Estudo de Caso de uma Professora Frente à Resolução de um Problema Introdutório às Geometrias Não-Euclidianas

Este trabalho de autoria de Kaleff (2005), contribuiu para uma reflexão sobre o comportamento de uma professora quanto ao papel dos registros de representação semiótica e sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos.

O estudo de caso aqui considerado, o da professora Lara, faz parte de uma pesquisa mais ampla envolvendo um grupo de discentes de curso de formação continuada para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, no nível de pós-graduação Lato sensu.

Kaleff (2005, p.3) investigou o comportamento dos participantes diante de atividades ligadas à situação de resolução de um problema de Matemática Discreta, designado como problema-objeto, o qual também é adotado como atividade introdutória às Geometrias não-Euclidianas:

Considere um jogo cujas regras são estabelecidas por um sistema de proposições afirmativas relativamente a um conjunto qualquer de elementos, isto é, considere um sistema de afirmações sobre um conjunto qualquer S com as características descritas a seguir.

S é um conjunto de elementos quaisquer chamados “pontos”.

Convenciona-se também chamar de “retas” a subconjuntos contidos em S , mas que não coincidem com ele, que contenham exatamente três pontos. Além disso, considere que neste jogo, existe uma relação entre os pontos e as retas de S a qual satisfaz às seguintes afirmações.

A1: Existe pelo menos um ponto em S .

A2: Por cada ponto de S passam exatamente duas retas.

A3: Por dois pontos distintos quaisquer de S passa, no máximo, uma reta.

Saiba que, em S , pontos diferentes e retas diferentes são sempre denotados por letras diferentes, sendo que os pontos são denotados por letras maiúsculas e as retas por minúsculas.

Qual é o número mínimo de pontos de S que admite uma solução para o jogo?

Kaleff (2005) observou a análise cognitiva da conversão de registros semióticos de uma atividade matemática, por meio de um conjunto de anotações, realizadas pelo sujeito entrevistador, visando à construção do instrumento de análise denominado de Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos, o qual permitiu o acompanhamento da evolução dos traçados gráficos utilizados

pela entrevistada no transcorrer da resolução do problema-objeto. Este instrumento apresentou as múltiplas transformações das representações semióticas, não discursivas e discursivas, estabelecidas pela entrevistada, com exceção daquelas na língua natural.

Como resultado de pesquisa, Kaleff (2005) confirmou a importância das observações de Duval sobre a compreensão integrativa de um objeto matemático, a qual está relacionada com suas representações semióticas na forma de registros gráficos, discursivos e não discursivos, pois tal

compreensão integrativa é a articulação dos registros, a qual constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática [...] e não o inverso, qual seja o 'enclausuramento' em cada registro. [... Assim,] a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Esta é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto. [Além do que, a conversão entre tais registros é fundamental porque] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento [em um mesmo registro, porém], é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto [... Porque] duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo (Duval, 2003, p.22).

As dimensões advindas da observação da longa caminhada percorrida pela prof.^a Lara durante a entrevista, ao realizar as diversas conversões de registros e desconstruir as dificuldades cognitivas apresentadas, bem como as manifestações explícitas da entrevistada, confirmaram um aspecto da cognição observado por Duval (2003), ou seja, a coordenação entre registros não pode ser somente consequência da apreensão conceitual, ao contrário é uma condição essencial. Portanto, o sujeito que tenha desenvolvido suficientemente a coordenação de registros, e, realiza um processo mental de compreensão integrativa, na realidade, dispõe potencialmente de representações que provém de outros registros, as quais, de maneira latente, permanecem associadas àquela a qual o sujeito se utiliza.

É este tipo de coordenação que lhes permite estabelecer procedimentos heurísticos, finalizar com sucesso os tratamentos realizados e controlar sua pertinência em atividades matemáticas.

Kaleff (2005) observou que mesmo no caso de professores que possuem uma longa experiência docente, como a de Lara, apresentaram dificuldades na realização de conversões de registros. Além disso, como a entrevistada enfatizou, ela necessitou realizar uma coordenação articulando uma ampla variedade de conversões entre registros para atingir a solução do problema, com vistas à suplantação das dificuldades encontradas.

Os resultados apresentados por Kaleff (2005) apontam a necessidade de ampliar as discussões sobre as formas pelas quais os adultos se confrontam com novos conhecimentos geométricos, discretos e não-euclidianos, com o fim de se contribuir para que tais saberes possam ser efetivamente introduzidos na escola.

3.2. Comunicações e pôsteres dos ENEM's

A seguir estão as descrições das comunicações científicas e pôsteres selecionados do ENEM's.

3.2.1. Teorema de Thales: Análise das variáveis de situação didática e adidática

A comunicação científica apresentada por Haruna e Almouloud (2001) foi embasada numa parte dos resultados da pesquisa de Dissertação de Mestrado da primeira autora, cujo processo de investigação foi norteado pela seguinte questão: “como produzir uma seqüência de ensino, que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales, observando os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto?” Para fazer essa análise, os autores recorreram ao estudo das variáveis de situação didática e adidática propostas por Guy Brousseau e ao trabalho de Raymond Duval que associa a semiótica com os aspectos da percepção e cognição.

Segundo Haruna e Almouloud (2001, p.3), *uma situação é dita adidática quando o aluno busca resolver sem procurar utilizar o conhecimento das intenções didáticas do professor.*

No entanto, neste trabalho não houve menção tanto no texto quanto nas referências bibliográficas das produções de Duval que foram utilizadas para a fundamentação teórica-metodológica da pesquisa. Neste sentido, recorreremos ao texto da Dissertação de Mestrado defendida por Haruna, em 2000, para complementar informações necessárias para a transcrição desta resenha.

Nessa comunicação foram apresentadas as variáveis de situação didática e adidática propostas por Guy Brousseau referentes ao teorema de Thales observando os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto, uma vez que os autores verificaram que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem estão relacionados com esses três aspectos.

No âmbito da percepção visual, Haruna e Almouloud (2001, p.2) refere-se

às possíveis configurações que se pode obter para representar essa propriedade. Nesse sentido deve-se levar em conta as variáveis da figura analisando nas situações propostas às dimensões do espaço (R^2 ou R^3), o número de paralelas (retas ou planos), a disposição da intersecção das transversais (acima das paralelas ou entre as paralelas), o número de secantes, se as secantes são ou não concorrentes, a diferença de tamanho entre imagem/objeto, se a figura é típica ou não, a complexidade da figura (somente figura os elementos úteis ou a figura está mergulhada numa configuração complexa), a posição das paralelas (horizontal, vertical ou inclinada), a dimensão em jogo na apreensão perceptiva.

O aspecto das significações está relacionado com a forma de se enunciar ao Teorema de Thales em que se destacam três maneiras como as mais pertinentes, segundo a teoria de Duval (2009), por induzirem processos diferentes de compreensão para montar a proporção. O primeiro, quando compara as razões entre um segmento e sua projeção; o segundo, quando compara as razões formadas por segmentos de uma mesma reta com a razão respectiva de segmentos formados em outra reta; e o terceiro, quando se pensa em semelhança de triângulos ou de polígonos.

No aspecto contextual, Haruna e Almouloud (2001) analisaram todos os conceitos implícitos e explícitos nessa propriedade, bem como suas aplicações e possíveis redes semânticas, no caso, as noções de semelhança, homotetia e o Teorema de Thales sob a perspectiva de sua evolução histórica.

Em termos metodológicos, o trabalho de campo contou com a aplicação de atividades experimentais em que os alunos utilizaram tanto o *software Cabri-Géomètre* I quanto os instrumentos de desenho (régua e compasso) para fazer as construções, levantar dados pela observação, tecer conjecturas para posterior validação e conclusão de aspectos relativos à aprendizagem das noções de semelhança e do Teorema de Thales.

Após dois meses do término da aplicação Haruna e Almouloud (2001) realizaram um pós-teste em duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental de uma mesma escola e período. Designou-se o grupo experimental a turma que foi submetida às atividades experimentais aqui descritas e de grupo de referência a turma que estudou o Teorema de Thales de forma tradicional.

De forma geral, após análise quantitativa e qualitativa dos dados, os autores notaram que o grupo experimental o Cabri-géomètre I parece ter contribuído para se trabalhar as variabilidades perceptivas fazendo com que a posição das paralelas e intersecção das transversais agissem pouco, se comparado ao cálculo do segmento formado na paralela ou na transversal, e aos problemas em que não se fornecia a configuração ou que se pedia para justificar, ou seja, problemas não usuais. Já no grupo de referência, em que as implicações de acertos se restringiram aos problemas usuais de aplicação direta nos quais a configuração é fornecida. No que diz respeito à configuração, o aumento de acertos foi decrescente, das retas paralelas na posição horizontal, depois na inclinada e por último na posição vertical; e também na configuração em que os triângulos se apresentavam sobrepostos.

Quanto às significações, Haruna e Almouloud (2001), observaram que tanto no grupo experimental quanto no de referência houve procedimentos na resolução das questões envolvendo os três pontos de vista, o que implicou avanços de conhecimentos em relação ao Teorema de Thales e nas atitudes e autonomia dos alunos no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões, justificar, dar opiniões sem medo de errar e escrever. No grupo experimental poucos fundamentaram suas respostas pela apreensão perceptiva e os alunos em geral apresentaram diversas estratégias de resolução das questões. Em contrapartida, no grupo de referência, vários alunos responderam as questões com base na apreensão perceptiva, além de apresentarem muita dificuldade em fazer justificativas.

3.2.2. Semelhanças de Figuras Planas: uma Proposta de Ensino

A pesquisa de Maciel e Almouloud (2004), teve o objetivo de verificar as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança em alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com base na seguinte questão de pesquisa: *como produzir uma sequência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do*

conceito de semelhança, integrando esse com o de Ótica geométrica a fim de que haja um aprendizado mais significativo?

Para responder a questão, os autores utilizaram os seguintes procedimentos metodológicos: elaboraram uma sequência didática com atividades experimentais em que os alunos trabalhariam com atividades práticas no contexto de Ciências, atividades que iriam necessitar de instrumentos de desenho como régua, compasso e transferidor para realizar construções e medições no contexto matemático. No entanto, este relato de pesquisa não contém os resultados do trabalho de campo, pois ainda não houve a aplicação da sequência didática.

Para a elaboração da sequência didática Maciel e Almouloud (2004) utilizaram como parte do referencial teórico os registros de representação semiótica, sob os seguintes aspectos:

- a) o desenvolvimento de um conceito não pode ser formado com base em um único registro. É necessário que sejam trabalhadas a diversidade e a relação entre diferentes registros, visando a uma melhor compreensão do objeto em relação as suas representações;
- b) conversão de registros e tratamentos.

Durante a aplicação da sequência, a proposta foi que os alunos relacionassem os vários registros figurais com suas respectivas representações numéricas no que tange a questão da proporcionalidade.

Na elaboração da sequência, Maciel e Almouloud (2004) partiram de situações reais de formação de sombra e imagem em câmara escura. Essas situações apresentaram-se dentro de uma noção homotética espacial. Com a definição do conceito homotético espacial, partiram para as situações homotéticas planas. Outro passo para a sequência foi a introdução do conceito de semelhança em função de figuras homotéticas.

O conteúdo desta sequência vai ao encontro à Geometria almejada na escola básica que, segundo Maciel e Almouloud (2004), deveria ter como objetivo desenvolver a atividade intelectual do aluno. No entanto, tem-se percebido a utilização de regras prontas, acabadas, em que são exigidas somente a memorização de regras, algoritmos e definições.

3.2.3. O Papel Heurístico de uma Figura Geométrica: o caso da operação de reconfiguração.

Flores e Moretti (2004) apresentaram um estudo teórico sobre o papel intuitivo e heurístico que as figuras têm na representação geométrica. Como toda figura pode ser modificada de muitas maneiras, Duval (2009) distinguiu três tipos de modificação: mereológica, ótica e posicional. Em particular, neste trabalho, foi tratado principalmente da modificação mereológica por possibilitar o uso da operação de reconfiguração e, sobretudo, por possibilitar o uso de figuras com sua função heurística na resolução de problemas matemáticos.

Segundo os autores, para analisarmos uma figura geométrica quanto às possibilidades heurísticas é preciso entender e determinar as unidades figurais elementares que semioticamente constituem uma figura, bem como as sub-figuras que a compõem. Isso porque são justamente sobre estas unidades figurais que são realizados tratamentos específicos, ou seja, tratamentos figurais.

As unidades figurais elementares são formas identificáveis que não podem ser decompostas em formas mais simples, a menos que mudem de dimensão, nem podem ser distinguidas sobre critérios de tamanho.

Daí surgiram as seguintes constatações:

- a) Uma figura geométrica é sempre uma configuração de pelo menos duas destas unidades figurais elementares. Por exemplo, um quadrado com suas diagonais, uma reta e um ponto marcado sobre esta reta ou ao redor desta reta, um círculo e seu centro, são configurações de duas unidades figurais elementares, formando, assim, uma figura geométrica.
- b) As unidades figurais elementares de dimensão 2 (contorno fechado de uma zona) são estudadas, em geometria, como configurações de unidades figurais de dimensão 1 (forma “linha”).
- c) Um mesmo “objeto” matemático pode ser representado por unidades figurais diferentes.

A modificação mereológica, estudada neste trabalho, segundo Flores e Moretti (2004), consiste na divisão de uma figura em partes, para em seguida combiná-las em outra figura. É uma modificação que mostra a figura como um todo fracionado, ou seja, ela se faz em função da relação entre parte e todo.

A operação de reconfiguração consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, as partes obtidas pelo fracionamento podem ser reagrupadas em sub-figuras incluídas na figura inicial. Consiste, portanto, em reorganizar uma ou muitas sub-figuras diferentes de uma figura dada, em outra figura.

Flores e Moretti(2004) mostraram exemplos para ilustrar o recurso à operação de reconfiguração na resolução de problemas em Matemática.

A modificação realizada numa figura para fins heurísticos deverá, obviamente, estar de acordo com o que é dado e pedido no enunciado, ou seja, a modificação pertinente é dependente daquilo que é solicitado e descrito no texto do problema. Isso porque deve haver uma interação entre os tratamentos figurais, que por sua vez possibilitam a função heurística da figura, e o discurso dado no problema que, neste caso, solicita definições, teoremas, objetos específicos ao texto.

Enfim, o sucesso da exploração de uma figura no quadro de um problema dado, vai então depender da articulação entre essa apreensão operatória da figura e um jogo discursivo de inferências o qual mobilizou uma malha de definições e de teoremas. Daí o aparecimento de fenômenos de não congruência. O que significa no encontro adequado de sub-figuras, seu reagrupamento pertinente, que estejam ainda atreladas às definições e, possivelmente a teoremas mobilizados para chegar à solução matemática do problema.

A operação de reconfiguração, de acordo com Flores (2004), é importante já que é a prática dos movimentos realizados numa figura que permite seu destaque heurístico. Além disso, habilidades tais como visualizar uma figura em diferentes posições, prever consequências da aplicação de determinados movimentos sobre figuras geométricas, tratar de diferentes formas as informações visuais, podem ser desenvolvidas mediante a aprendizagem desta operação figural.

Por fim, Flores e Moretti (2004) considerou que a operação de reconfiguração é evidente, tampouco de maneira simples, para muitas das figuras que usamos no ensino. Fatores diversos podem inibir, e até mesmo dificultar ao invés de auxiliar, o uso desta operação. Contudo, esta proposta de busca por caminhos heurísticos, para a resolução de problemas, possibilita lidar com as

figuras para além da função estritamente perceptiva, ou seja, com a apreensão operatória.

3.2.4. Uma Abordagem de Ensino-Aprendizagem do Conceito de Área

Nesta comunicação científica, Facco e Almouloud (2004) tiveram por objetivo apresentar um estudo dos fenômenos de ensino e aprendizagem da construção do conceito de superfície e de área no Ensino Fundamental. Dessa forma explicitaram uma proposta de ensino, validada por meio de sua aplicação tanto a um grupo de alunos do 6º ano de uma escola da rede pública, como um grupo de professores participantes do projeto Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas, sediado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Elaborar e aplicar uma proposta de trabalho a fim de subsidiar o processo ensino-aprendizagem desse conceito, foram os objetivos fundamentais de Facco e Almouloud (2004); que foi exposto por meio de uma sequência de atividades constituída por três eixos: superfície como conjunto de pontos, área como grandeza e medida de área como número positivo.

A teoria de registros de representação semiótica foi aplicada nas situações-problemas envolvendo a (re)configuração de figuras planas. Facco e Almouloud (2004) procuraram ainda comparar superfícies das figuras, em especial, dos polígonos, por recorte-colagem, ladrilhamento, decomposição e composição. Esta proposta didática justificou-se tendo em vista à preocupação com a prática do professor em sala e à apreensão do aluno quanto a esses conceitos.

Primeiramente os pesquisadores aplicaram um teste-piloto da sequência de atividades a um grupo de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental para direcionar os propósitos quanto à fundamentação da proposta. Paralelamente buscou-se resultados de pesquisas acadêmicas e análise de livros didáticos para verificar situações de uso da reconfiguração (decomposição e composição) de figuras planas com e sem o auxílio do Tangram e do ladrilhamento.

Os alunos participantes da pesquisa tiveram momentos de reflexão e discussão com e sem orientações do professor nos momentos de dúvidas e na socialização das resoluções dos exercícios e conceitos. Em alguns casos, no final da atividade, o professor sistematizou o conteúdo trabalhado.

As observações durante a aplicação das atividades centraram-se nas possíveis dificuldades apresentadas na resolução das atividades relacionadas à assimilação dos alunos do conteúdo exposto, na postura do professor mediante a técnica e validação da proposta didática.

As análises das produções dos alunos nas fichas de resolução e nas anotações das observações de sala permitiram que ocorresse a discussão, o entendimento do conteúdo e as estratégias de resolução.

Nessa proposta, Facco e Almouloud (2004) utilizaram a decomposição e composição de figuras planas como recurso à diferenciação entre superfície, perímetro e área como também o jogo de quadros geométricos e numéricos para o cálculo da medida de área.

Os obstáculos didáticos observados durante a aplicação das atividades da sequência foram: confundir as unidades de medidas, área e perímetro; utilizar o mesmo cálculo para perímetro e área; explicar o conteúdo por parte do professor, denotando falta de preparo e de fundamentação, principalmente no desenvolvimento da etapa institucionalização, que trata da explanação do trabalho com discussões no grande grupo, calcadas nas opiniões, soluções e dificuldades encontradas nas resoluções das questões.

De acordo com as análises, feitas nas respostas do teste-piloto, nos resultados proporcionados durante e após a aplicação da sequência de atividades, foi constatado pelos pesquisadores, um grau de dificuldade relevante nos alunos para diferenciarem perímetro e área, o qual evoluía à proporção que os exercícios exigiam mais conhecimento sobre o assunto tratado.

Com essas análises foi confirmada a hipótese de que uma sequência de atividades do conceito de área como grandeza, trabalhada com a decomposição e composição de figuras planas, facilitou o processo de aprendizado do aluno como também instigou o professor a variar sua metodologia.

Durante as resoluções, muitas vezes os alunos ficavam à espera do professor para receberem orientações quanto ao procedimento a ser adotado ou aguardando uma explicação sobre alguma dúvida. Alguns alunos chegaram a desenvolver com autonomia as atividades para posteriormente discutirem com o grupo.

Facco e almouloud (2004) observaram nas análises dos resultados dos alunos, que eles procuraram resolver as questões, visto que a porcentagem de questões não resolvidas foi baixa em relação ao número de alunos participantes das atividades. Em todas as atividades, o índice de acertos foi significativo, otimizando a proposta quanto a sua viabilidade.

Por fim, Facco e Almouloud (2004) atestaram que a proposta didática ainda tinha muito a ser reformulada, mas já como se apresentava, conforme resultados e discussões, seria ao professor um bom subsídio para trazer ao aprendiz do conceito de área, superfície, perímetro e medida de área facilidades à compreensão e possível apreensão desse complexo conteúdo geométrico-matemático.

3.2.5. Possíveis Mudanças de Postura em Professores do Ensino Fundamental Trabalhando com Geometria.

Silva, Manrique e Almouloud (2004) retrataram uma parte de um projeto de pesquisa que teve como objetivo estudar os fatores e as estratégias suscetíveis de influenciar o ensino e a aprendizagem de noções geométricas, por parte dos professores, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Como motivação, os autores observaram a análise do sistema educativo, do discurso dos professores e dos jogos que envolveram a própria geometria, que permitem identificar alguns fatores que podem ser considerados como origem das dificuldades que os professores encontraram no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Ainda citam a precariedade na formação inicial dos professores em relação à Geometria, pois, segundo Silva, Manrique e Almouloud (2004), os cursos de Licenciatura não integravam suficientemente uma reflexão profunda a respeito desse ensino e as modalidades de formação contínua ainda não estavam atendendo a esses objetivos.

As situações de ensino que estavam nos livros didáticos e que eram propostas pela maioria dos professores, de uma maneira geral, não apresentavam uma coordenação de registros de representação semiótica; não mostravam a importância da figura na visualização e em fases de exploração; privilegiavam resoluções algébricas nos problemas propostos e poucos eram os que exigem algum raciocínio dedutivo e demonstração.

Nesta pesquisa, o estudo dos livros didáticos, dos Parâmetros Curriculares Nacionais e das informações obtidas a partir de questionários aplicados revelaram certa realidade do ensino de Geometria e a necessidade de uma formação contínua dos professores. Estes resultados guiaram os pesquisadores nas escolhas de hipóteses de trabalho quanto aos conteúdos e as variáveis colocadas em jogo na formação dos professores, e também, nas escolhas das situações de ensino e aprendizagem da Geometria.

Neste artigo foram analisados, essencialmente, os resultados de algumas atividades de formação realizadas com os professores de Matemática que participavam do projeto em que algumas construções de triângulos foram feitas e os professores demonstraram e elaboraram problemas utilizando o Teorema de Pitágoras. O objetivo era observar possíveis mudanças de crenças e comportamentos.

Para cumprir os propósitos da pesquisa, Silva, Manrique e Almouloud (2004) aplicaram os seguintes procedimentos metodológicos no processo de formação de professores: realizar um estudo diagnóstico aplicando testes, entrevistas individuais e observações de práticas pedagógicas. As situações didáticas envolvendo conceitos, construções geométricas, problemas e demonstrações foram trabalhadas com o grupo pesquisado visando sua formação em Geometria. Tais situações eram compostas por atividades que eram realizadas tanto com a ajuda de papel e lápis quanto do ambiente informatizado com o software Cabri Géomètre II e a linguagem Logo.

No decorrer do trabalho percebeu-se que os professores pesquisados preferiam e reivindicavam um trabalho voltado para a Geometria métrica, alegando ser um conteúdo necessário para sua prática de sala de aula e com utilização no cotidiano. O início do trabalho com triângulos solicitava sua construção utilizando alguns instrumentos de desenho: régua, compasso e transferidor e, percebeu-se que alguns professores não sabiam usa-los.

Na realidade, o projeto de formação tentou trabalhar com esses professores a responsabilidade para com a aprendizagem de todos os alunos, e não só de alguns privilegiados, baseados na crença de que todos têm o direito à educação. Cada professor era sempre orientado a fazer as adaptações necessárias em suas salas de aula para que conseguisse alcançar tal objetivo.

Uma mudança no comportamento crítico desses professores, segundo Silva, Manrique e Almouloud (2004), foi observada na discussão de uma das atividades em que o docente apresentou sua resolução aos outros colegas que fizeram diversas críticas e comentários. Percebeu-se, então, que não se desenvolveu no grupo um clima de ofensa, mas de liberdade de opiniões que proporcionou uma aprendizagem coletiva. Em situações desse tipo, notou-se que muitos atributos precisavam ser desenvolvidos para que a aprendizagem ocorra em grupo: reconhecer os momentos de falar e de ouvir, tolerância para com a crítica de produção dos pesquisadores, humildade para reconhecer que errou, paciência para com os outros e vontade de ajudar o colega no sentido de não rebaixá-lo e, sim, incentivá-lo a melhorar.

Além disso, era esperado que os professores desenvolvessem atitudes de questionar, desconfiar, construir e justificar. Tais mudanças foram observadas em outra situação que solicitava que os professores verificassem a possibilidade de construção de triângulos com varetas de medidas variadas.

As atividades propostas para construção de triângulos foram orientadas tanto para serem feitas no papel, quanto com a ajuda do *software Cabri II*, além disso, algumas demonstrações também foram pedidas. Nestas últimas, alguns professores tiveram dificuldades com o uso da linguagem matemática e em identificar o que é hipótese e o que é tese. Para minimizar tais dificuldades, diversas atividades foram trabalhadas tentando estimular uma articulação entre a linguagem matemática, figural e natural em situações de demonstração. Tais discussões estavam apoiadas teoricamente pelos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Como resultados de pesquisa, Silva, Manrique e Almouloud (2004) perceberam pequenas mudanças, porém os comentários de alguns professores apresentaram uma variável que interfere para que as grandes mudanças possam acontecer: a confiança. Confiar nos formadores, nas estratégias empregadas, nas outras pessoas do grupo e na própria capacidade de poder mudar.

3.2.6. Composição de Figuras Geométricas Planas por Alunos do Ensino Médio

Andrade e Manrique (2007) concebe que a geometria está presente no cotidiano nas formas das construções, dos objetos, nas inúmeras imagens com as

quais nos deparamos diariamente. Diversos estudos vinham sendo desenvolvidos e apontavam dificuldades tanto de alunos quanto de professores no entendimento de diferentes conteúdos da geometria.

Andrade e Manrique (2007) tinham como hipótese de que os alunos apresentavam dificuldades no reconhecimento de figuras geométricas planas e na identificação das expressões algébricas que possibilitavam encontrar a área das respectivas figuras. Quanto à composição/decomposição de figuras planas, acreditavam que os alunos apresentavam dificuldades em decompor corretamente uma figura composta de duas ou mais figuras geométricas planas para o cálculo da área solicitada, bem como em compor uma figura geométrica para facilitar o cálculo da área.

Tendo em vista estes pressupostos, os autores levantaram as seguintes questões: *que dificuldades o aluno apresenta no cálculo de área de figuras planas? Se o aluno sabe decompor uma figura em várias outras, será que ele consegue relacionar a figura principal com as da decomposição e a área total com as áreas das figuras da decomposição?*

Buscando as respostas para estas perguntas, Andrade e Manrique (2007) buscaram fundamentação teórica nas representações semióticas, pois somente elas realizam uma função de tratamento intencional, fundamental para a aprendizagem humana.

Em termos metodológicos, Andrade e Manrique (2007) realizaram a investigação numa escola pública, com 30 alunos de uma 3ª série do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido em duas etapas: a primeira consistiu a aplicação de um teste diagnóstico, que permitiu verificar se os alunos tinham conhecimento de figuras geométricas planas e os procedimentos associados ao cálculo de área. Esse teste diagnóstico foi composto de duas atividades, a primeira com 13 itens contendo figuras geométricas planas, e que solicitavam o cálculo de suas respectivas áreas. A segunda atividade foi composta de seis problemas, solicitando a construção de uma figura e o cálculo de sua área.

Estes problemas caracterizaram ainda pela necessidade do aluno interpretar corretamente o enunciado e fazer a visualização geométrica da figura em questão, ou seja, realizava a conversão da representação da linguagem natural para a representação gráfica. Após a aplicação do teste diagnóstico, foi

desenvolvida uma sequência de ensino, com o objetivo de trabalhar o cálculo de área da intersecção de figuras geométricas planas.

A sequência de ensino, composta de 5 atividades, foi aplicada para os mesmos 30 alunos do teste diagnóstico. Para a resolução de cada uma dessas atividades foi necessário que o aluno visualizasse a decomposição dessas figuras geométricas planas para calcular as áreas hachuradas.

Durante a aplicação da sequência de ensino, foram feitos diversos comentários sobre os critérios de resolução. Falou-se da necessidade dos alunos analisarem as figuras apresentadas utilizando o processo da composição e da decomposição, para depois efetuarem o cálculo da parte hachurada. Para explicar tal processo, Andrade e Manrique (2007) utilizaram outra figura, mostrando que a aparente dificuldade de cálculo da área poderia ser resolvida com a decomposição dessa figura.

Durante o processo de discussão foi observado que alguns alunos conseguiam visualizar o que estava sendo pedido em cada item da sequência de ensino, porém, parte dos alunos não conseguia entender como obter a área da figura original pela decomposição.

Nesse momento, com o auxílio da professora desses alunos, os pesquisadores puderam fazer algumas intervenções com o objetivo de fornecer aos alunos informações que permitissem a eles encontrar um caminho para calcular a área hachurada em cada uma das figuras.

A maior parte dos alunos afirmou que jamais haviam trabalhado com exercícios daquele tipo e, portanto, não sabiam por onde começar. Apenas alguns poucos conseguiam decompor corretamente as figuras e alcançar o resultado de forma correta.

Dois dias após a aplicação da sequência de ensino, Andrade e Manrique (2007) compareceram à sala de aula para, em conjunto com os alunos, apresentar os erros cometidos e dar início a um novo processo de discussão com o objetivo de diminuir as dúvidas que ainda persistiam. Acreditavam que alcançariam os objetivos propostos pelo trabalho que foi desenvolvido e que os alunos poderiam compreender melhor o que significa calcular a área hachurada de uma figura geométrica plana.

Na análise da sequência de ensino, os pesquisadores consideravam certos os itens cujas resoluções apresentavam tanto a decomposição correta das figuras geométricas solicitadas, quanto o cálculo também da área procurada. Os itens com resoluções incorretas ou incompletas foram considerados errados. Já os itens sem qualquer tipo de desenvolvimento, isto é, em branco, foram computados em “não fizeram”.

De acordo com os resultados obtidos na sequência de ensino, Andrade e Manrique (2007) puderam observar que a maioria dos alunos demonstraram muita dificuldade, no que diz respeito ao cálculo de área de figuras que necessitam de decomposição ou composição; mais precisamente, quando se trata de figuras com áreas hachuradas ou sombreadas, resultado da sobreposição de duas ou mais figuras geométricas planas.

3.2.7. O Ensino de Semelhança: Uma Proposta de Ensino

O fato de que a Geometria vinha sendo negligenciada no sistema educacional da época motivou Maciel e Almouloud (2007) a realizar o estudo dos fatores que influenciavam no processo ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos. Perceberam que, entre outros, o conteúdo “semelhança” demonstrava causar dificuldade de compreensão entre os alunos. Este trabalho é uma extensão do trabalho “Semelhanças de Figuras Planas: uma Proposta de Ensino”, apresentado pelos autores no ENEM de 2004.

Ainda como motivação para a pesquisa, Maciel e Almouloud (2007) citam que para o aluno, o conceito de semelhança surge como conteúdo sem sentido, uma vez que é introduzido sem nenhuma ligação com a vida cotidiana. O conceito de semelhança é um dos conteúdos que permite compreender e interpretar fenômenos naturais.

Diante dos fatos relatados, os autores tiveram como objetivo, relatar as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança em alunos de 1ª série do Ensino Médio. Para isso, produziram uma sequência de ensino que proporcionou ao aluno a apreensão desse conceito, integrando-o com o de Ótica Geométrica, a fim de que houvesse um aprendizado significativo.

Neste sentido, Maciel e Almouloud (2007), aplicaram uma prática pedagógica interdisciplinar como um possível caminho para chegar à sistematização do conhecimento matemático. Na realização desta pesquisa, não

desconsideraram os aspectos formais e abstratos que sugerem os conteúdos matemáticos utilizando-se apenas de aplicações particulares e empíricas. O objetivo, com essa metodologia, foi favorecer o significado do conceito. Para os pesquisadores, a integração dos conteúdos, de semelhança e de Ótica Geométrica, encontrou respaldo na epistemologia do conceito de semelhança.

Diante do estudo realizado, foi percebido que os conceitos de proporção, propriedades de figuras geométricas, homotetia, ampliação (redução) e semelhança, quando trabalhados, foram encontrados entre conceitos do contexto da Física. Com base na problemática da pesquisa, formulou-se a seguinte questão: *uma sequência de ensino que utilize o conceito de homotetia integrado com a Ótica Geométrica proporciona ao aluno uma aprendizagem significativa do conceito de semelhança?*

O trabalho de campo levou em conta a participação de 33 alunos de uma turma de 9º ano de uma escola pública estadual. Após a aplicação do pré-teste, toda a classe foi convidada a participar de um curso de Geometria que foi realizado no contra turno. Dos 12 alunos inscritos no curso, apenas sete concluíram a sequência. Com a aplicação dessa pesquisa, modificações, tanto nos testes diagnósticos quanto na sequência de ensino foram realizadas.

No estudo principal, a sequência de ensino foi aplicada em uma das duas classes em que se aplicou o pré-teste. No grupo de controle foi aplicado o pré-teste e o pós-teste sem nenhuma intervenção específica durante o período de experimentação. No grupo experimental foi aplicado o pré-teste, o pós-teste e uma sequência de ensino entre esses dois testes.

Durante a aplicação do pré-teste e do pós-teste estavam presentes a aplicadora e a observadora. Esses encontros foram audiogravados, e as observações anotadas em fichas. Após a aplicação do pós-teste, foram realizadas algumas entrevistas para elucidar algumas respostas.

Na elaboração da sequência, os alunos relacionaram os vários registros figurais com suas respectivas representações numéricas no que tange à questão da proporcionalidade. Como resultados da análise do pós-teste, foi observado que, para o grupo de controle, os índices mantiveram-se mais ou menos estáveis e para o grupo Experimental, ocorreram variações relevantes.

Maciel e Almouloud (2007) observaram que os alunos apresentaram avanços significativos com relação à percepção das condições necessárias e suficientes para a semelhança de triângulos, quadriláteros e figuras quaisquer.

Os alunos apresentaram melhores concepções relativas às formações de sombra e de imagem em câmara escura. As situações geométricas de representação da situação de sombra e de imagem em câmara escura propiciaram a percepção de que a propagação retilínea da luz é a responsável por esses fenômenos. Diante desse panorama, acredita-se que a situação no contexto geométrico auxiliou o aluno na compreensão da propriedade de propagação retilínea da luz, que se encontra relacionada ao contexto da Física.

Maciel e Almouloud (2007) concluíram que foi válida a sequência de ensino para esse grupo de alunos. Consideraram que a sequência podia ser melhorada com a introdução de outras atividades e prolongamentos necessários. O conceito de semelhança é adquirido em um espaço de tempo relativamente longo. A contribuição dos pesquisadores também está relacionada com uma pedagogia que considera o processo de aquisição de um conhecimento que se inicia em situações mais próximas do real e do intuitivo e sigam em direção a situações mais estruturadas e, portanto, mais formais.

3.2.8. A Validação de Conjecturas como Parte do Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática

Neste trabalho, Piccelli e Bittar (2010), partem do pressuposto de que uma mudança na forma que geralmente era realizado o processo de ensino pode solucionar as dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática, relatadas em pesquisas acadêmicas.

Piccelli e Bittar (2010) concebem que o aluno deveria ser capaz de elaborar uma conjectura e provar um teorema, por isso, ressaltam a importância de fazer com que eles parem de repetir os exemplos dados pelo professor e comecem a pensar e “fazer Matemática”. Os autores acreditam que o professor é peça fundamental nesse processo, pois ele deve incentivar o aluno criando situações para que este passe de expectador a pesquisador.

Piccelli e Bittar (2010) acrescentaram que os softwares de Geometria Dinâmica poderiam auxiliar nesse processo, como por exemplo, o Cabri-Géomètre; uma ferramenta que poderia ser utilizada para levar o aluno a elaborar suas

conjecturas. O *software* cria inúmeros exemplos quando uma construção era manipulada, permitindo que os alunos visualizassem as propriedades da figura em questão.

Uma área da Matemática que permite uma grande exploração do raciocínio e pode facilitar a elaboração de conjecturas é a Geometria. Na perspectiva de Duval (2009), isso é possível devido ao fato de que o aluno pode visualizar a figura podendo, às vezes, até mesmo manipulá-la. Para Piccelli e Bittar (2010), incentivar os alunos a demonstrar teoremas é algo importante para o ensino da Matemática, pois, pode fazer com que os alunos saiam da posição de espectador e passem para a posição de pensadores, tornando-se sujeitos ativos na aquisição do conhecimento.

Este texto é um recorte da dissertação de Mestrado em Educação Matemática que teve como objetivo investigar a validação de conjecturas por alunos da 1ª série do Ensino Médio. Mais especificamente, para este artigo, os autores apresentaram para 30 alunos divididos em grupos, uma construção elaborada no Cabri-Géomètre. Diante disto, os alunos foram incentivados a manipular a construção para que conseguissem descobrir qual era o teorema que estava implícito na construção para em seguida tentar prová-lo.

O enunciado da atividade, de acordo com Piccelli e Bittar (2010, p.5), é descrita a seguir:

Sessão 06 Atividade Única

- a) Abra o arquivo: Sessão 6 Atividade Única que está em sua pasta;
- b) Movimente os centros das circunferências, lembrando que durante a movimentação das duas circunferências tem que permanecer com a intersecção de dois pontos entre elas.
- c) O que você pode afirmar sobre os pontos B, C e D? Existe alguma relação entre eles?
- d) Caso tenha percebido alguma relação, como você justificaria matematicamente essa relação?

Ao abrir o arquivo os alunos se deparavam com a seguinte construção:

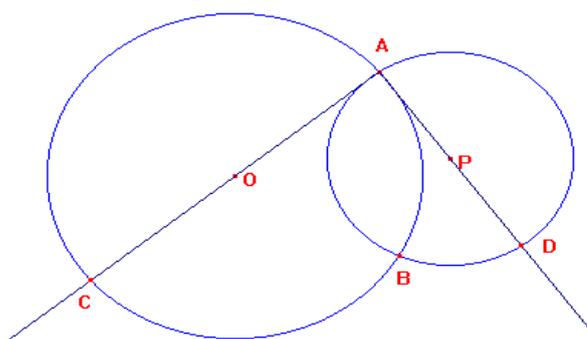


Figura 2: Construção Geométrica, seção 3.2.8.

A análise dos dados coletados mostrou que, como os pesquisadores haviam previsto os alunos não estavam habituados com atividades de validação e foi preciso, então, a interferência durante a realização da sequência, no sentido de realizar uma discussão com a classe sobre o que significava validar uma afirmação.

Nessa sessão abordou-se um resultado até então desconhecido dos alunos, pois o teorema em questão, não estava explícito, mas estava presente nas construções apresentadas e poderia ser deduzido (lembrado) com a observação da figura e com a manipulação no *software*.

Piccelli e Bittar (2010, p.8) argumentaram que essa experiência não se tratou de dar aulas sobre validação, mas sim de propor atividades que permitiram explorar validações matemáticas.

3.2.9. Uma Análise dos Conteúdos de Geometria de uma das Coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio mais Solicitadas pelas Escolas Públicas Brasileiras ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.

Morett e Kaleff (2010) analisou uma coleção de livros didáticos referente às três séries do Ensino Médio, dentre as mais solicitadas pelas escolas públicas ao Fundo Nacional de Desenvolvimento Escolar. Partiu-se da análise do desenvolvimento dos conteúdos e exercícios de Geometria com base no Modelo de van Hiele (desenvolvimento do pensamento geométrico).

Em relação à utilização do Modelo de van Hiele como ferramenta de análise dos dados, buscou-se analisar a aplicação dos níveis de desenvolvimento. No nível da visualização foi analisado como o livro apresentou desenhos e gráficos conjuntamente ao texto, assim como a presença de outros registros semióticos. No nível da análise verificou-se se o autor leva o aluno a observar características relevantes e não-relevantes de um conceito geométrico. No nível da organização

informal foi avaliado se o autor leva o aluno a estabelecer e reconhecer relações informais entre os conteúdos, inclusive por meio de experiências com materiais didáticos concretos. Finalmente, o nível da organização formal, foi considerado se o autor leva o aluno a reconhecer e a estabelecer demonstrações sobre os conteúdos por meio de inferências lógicas.

A análise dos registros gráficos apresentados no livro, segundo Morett e Kaleff (2010) foi avaliado segundo a teoria dos registros de representação semiótica, a qual engloba uma análise cognitiva das conversões de registros semióticos. Duval (2003) pondera que nos livros didáticos, geralmente, aparece uma *linguagem discursiva mista*, apresentando características de ambiguidade de linguagem entre a língua natural e os símbolos matemáticos.

Quanto aos registros semióticos, Morett e Kaleff (2010) concluíram que o autor do livro didático nem sempre apresentou o desenvolvimento dos conteúdos geométricos, por meio de uma explícita conversão de registros. Embora sejam utilizados dois ou mais registros, em geral, o texto nem sempre induz o aluno partir o seu raciocínio de considerações visuais por meio de desenhos, ainda que algumas vezes, leve analisar os conteúdos geométricos de maneira informal; estabelecer e reconhecer características relevantes e não-relevantes de um conteúdo por meio de exemplos de figuras.

Morett e Kaleff (2010) concluíram que o livro embora apresente uma razoável preocupação didática quanto à metodologia a ser empregada para o ensino da Geometria, de forma a estimular a reflexão e a resolução de problemas; com o objetivo de permitir uma aprendizagem dos conteúdos com certo significado e dentro de uma visão construtivista, porém, não contempla os níveis de maneira sequencial como proposto pelo Modelo de van Hiele. O autor do livro didático não menciona ou sugere a sua utilização para o desenvolvimento dos conteúdos e exercícios propostos, tanto no corpo do livro didático quanto no do Manual do Professor.

3.2.10. O Estudo das Noções de Área e Perímetro Considerando os Níveis de Conhecimento Esperado dos Educadores como Ferramenta Didática.

Santos e Curi (2010) apresentaram dados de uma pesquisa para realização da dissertação de Mestrado do primeiro autor. O objetivo foi realizar uma abordagem teórica sobre como os níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e

disponível) esperados dos educandos podem funcionar como ferramenta didática no ensino das noções de área e perímetro.

Foi considerado que o ensino sistemático de fórmulas para o cálculo de área e perímetro de superfícies planas não é suficiente para levar educandos ao êxito na resolução de tarefas onde a noção em jogo é implícita. Contemplam ainda aspectos da formação de professores, pois para que um docente utilize determinadas ferramentas didáticas ele deve desenvolver três vertentes referentes ao conhecimento da disciplina: o conhecimento do conteúdo da disciplina; o conhecimento didático do conteúdo e o conhecimento do currículo.

Em relação às noções de área e perímetro, Santos e Curi (2010) destacaram que todo indivíduo carrega consigo suas próprias noções de espaço e de medidas, visto que são necessárias para a organização da vida diária em sociedade. Então, pode-se levantar a seguinte questão: Por que alunos fazem tanta confusão durante o estudo de área e perímetro? Será que estas noções intrínsecas dos educandos não poderiam auxiliar na elaboração de tarefas potencialmente significativas? Como o professor poderia criar situações levando em conta os conhecimentos prévios dos alunos? As dificuldades dos alunos estão apenas associadas à leitura de enunciados e aplicação de fórmulas? Todo o problema reside no conteúdo matemático ou na forma como se ensina?

Estas questões formuladas levaram Santos e Curi (2010) investigarem soluções quanto à necessidade de evidenciar perante o educando a diferença entre as noções de área e perímetro, evitando confusões.

A importância do estudo dos níveis de conhecimento esperados dos educandos vem do fato de que professores, muitas vezes, mesmo que de maneira implícita, esperam dos alunos certa disponibilidade de conhecimentos e se mostram indignados quando os alunos demonstram desconhecê-los. Esta expectativa, em geral, é reforçada institucionalmente, seja pela própria escola, seja pelos materiais didáticos utilizados com os alunos.

As pesquisadoras ainda ressaltaram que para os educandos mobilizarem esses níveis de conhecimento se faz necessário o domínio de diferentes representações de objetos matemáticos e uso da linguagem própria deste domínio.

Segundo as autoras, o “nível disponível” é aquele em que o aluno deve resolver a tarefa proposta sem nenhuma indicação ou ajuda do professor. Neste

nível é necessário recorrer a conhecimentos anteriores e que transite por diferentes registros de representação semiótica.

Com base nestas considerações foi possível verificar que as noções de área e perímetro no nível técnico depende apenas de um professor que tenha o conhecimento do conteúdo, porém, quando se espera que professores passem com seus alunos do nível técnico aos níveis mobilizável e disponível, ocorre a necessidade de articulação de quadros ou domínios e, nesse momento, surge a dificuldade associada “não ao que ensinar” e sim ao “como ensinar”.

Para o nível mobilizável já existe uma justaposição de saberes de um determinado domínio, ou seja, corresponde à resolução de uma tarefa pelo aluno em que apesar da noção em jogo estar explícita é necessário uma pequena adaptação, em que o aluno é obrigado a mobilizar conhecimentos para resolução da tarefa.

Desta forma, Santos e Curi (2010), observaram a necessidade da formação inicial e continuada contemplar não apenas o conhecimento de conteúdos e do currículo, mas também o conhecimento didático do conteúdo da disciplina, que aqui neste contexto, é o fator que faz toda a diferença na formação de professores. Considerou-se que um professor atua como ator neste jogo com autonomia quando conhece os conceitos didáticos da sua disciplina e reconhece nas dificuldades dos alunos elementos que possibilitam a utilização de abordagens teóricas como ferramentas didáticas.

Ao final foi identificado que o primordial não é o que se ensina e sim como se ensina, quando se deseja que alunos desenvolvam sua própria autonomia e sejam capazes de articular objetos matemáticos típicos da flexibilidade cognitiva esperada.

3.2.11. Crivo-Geométrico: Conservação Única de Partes de Superfícies Reunidas que Formam o Contorno do Sólido Enquanto Objeto Geométrico Fechado

Funato e Henriques (2010) tiveram como objetivo apresentar a técnica instrumental denominada *Crivo-Geométrico*, desenvolvida por Henriques (2006), cujo objetivo é a obtenção da Representação Gráfica (RG) de sólidos isolados descritos a partir da interseção de superfícies que o delimitam. O Crivo-Geométrico designa a conservação única de partes de superfícies reunidas que formam o

contorno do sólido enquanto objeto geométrico fechado. Esta técnica contribui no processo de cálculos de Integrais Múltiplas (IM), além de servir como instrumento de controle nesse processo.

Funato e Henriques (2010) destacaram que a passagem para o ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas é acompanhada com analogias e com mudanças ou rupturas em relação ao lugar ocupado para as funções e suas representações gráficas.

Nessa passagem, uma função não será mais examinada de uma forma isolada. Na maioria dos casos de resolução de problemas, uma função interagirá com outras funções, para formar um domínio de integração, que é um sólido resultante de uma Representação Gráfica e/ou representação analítica no espaço. Essas representações tomam outro aspecto no ensino de Integrais Múltiplas em relação aos estudos precedentes. Os alunos foram confrontados com novos tipos de exercícios e com novas técnicas de cálculos de integrais em conjunto com as Representações Gráficas no espaço.

A princípio, para Funato e Henriques (2010), essas representações são operacionalmente difíceis a realizar com as técnicas tradicionais de representação no ambiente papel/lápis. Pensou-se na utilização de um ambiente computacional como *Maple* foi uma alternativa. Contudo, essa utilização, necessitou da construção de processos de instrumentação das ferramentas do *software* no tratamento dos exercícios propostos aos alunos. Daí foi pensando em como o aluno poderia utilizar o *Maple* para obter os tipos de sólidos delimitados por superfícies presentes no ensino de Integrais Múltiplas que o segundo autor deste texto desenvolveu essa técnica instrumental, a qual se estabelece progressivamente na medida em que o indivíduo participa na construção do sólido, pois ele deve descrever o crivo. Isso mostrou que o ambiente computacional não é neutro nesse processo.

Funato e Henriques (2010) constataram que o ambiente computacional *Maple* oferece possibilidade de estudar as interações possíveis de objetos matemáticos manipuláveis nos dois domínios (RG e IM) graças à estreita relação existente entre a geometria e a álgebra, bem como a utilização simples e lógica das sintaxes de comandos adequados e identificados a partir de uma análise previa das potencialidades e entraves do *software Maple*, relativo ao cálculo de áreas e de volumes por Integrais Múltiplas.

Inicialmente procurou-se traçar os gráficos das superfícies dadas pelas equações do enunciado do problema “a calha vertical e os dois planos secantes”. Privilegiaram a sintaxe relativa à RG de superfícies parametrizadas, evitando assim, os entraves funcional e implícito.

Os pesquisadores, então levantaram a seguinte questão: como proceder para obter os sólidos isolados tal como aparecem repentinamente nos livros didáticos? Para visualizar o sólido isolado é necessário entrar, nas sintaxes de comandos do *Maple*, com os dados que permitem delimitar as partes das superfícies que formam o contorno do sólido da interseção.

A determinação de tais dados é muito próxima do trabalho necessário na pesquisa dos limites da integração. Assim, o trabalho necessário para obter uma Representação Gráfica de um sólido isolado com *Maple* é uma ajuda importante na modelização de cálculos de Integrais Múltiplas, em particular, no cálculo de volume.

O objetivo explícito dessa técnica é obter uma Representação Gráfica de qualquer sólido isolado ou crivado descrito por várias superfícies. Além disso, ela tem uma importância particular na conversão de registros, e consolida a coordenação entre os registros gráfico, analítico e algébrico da integral. Com efeito, conduz o aluno a trabalhar com vários registros em um mesmo exercício. Esse fenômeno está de acordo com Duval (2003), quando ele sublinha que uma das condições essenciais para a apreensão conceitual dos objetos matemáticos é dispor, para um mesmo objeto, de várias representações semióticas.

A Representação Gráfica está presente no ensino, alimentando o nicho geométrico, porém, não é operacional no estudo das integrais. Percebeu-se que a obtenção de um sólido isolado desempenha um papel importante na modelização dos exercícios do tipo emblemático e faz intervir nos conhecimentos geométricos. Mas, existem dificuldades na interação entre os registros gráficos e analíticos. Além disso, falta um ensino que alimente essa interação, tanto com técnicas habituais papel/lápis quanto com técnicas instrumentais no *Maple*.

Apesar das dificuldades encontradas, a apresentação dessa técnica instrumental constituiu um primeiro esboço que pôde servir, sobretudo, aos professores que ministram disciplinas de Cálculo e Geometria e, que têm interesse

de integrar as tecnologias educacionais ou Sistemas de Computação Algébrica na Educação Matemática no ensino superior.

A aplicação desta técnica mostrou-se eficiente diante das dificuldades para a obtenção de Representação Gráfica de qualquer sólido isolado delimitado por várias superfícies. Além disso, merece destacar a sua importância na conversão de registros e consolidação da coordenação entre os registros gráficos e analíticos das Integrais Múltiplas.

3.2.12. As Funções da Demonstração em um Trabalho com Construções Geométricas.

Jesus (2010) apresentou um recorte de uma pesquisa de Mestrado desenvolvida com professores de matemática em formação continuada com foco nas demonstrações em Geometria.

Com parte do referencial teórico, Jesus (2010) apoiou-se nas contribuições de Duval (2003) no que diz respeito à demonstração, que é um discurso diferente do que é praticado na maioria das aulas de matemática. Duval (2003) salientou que a distinção entre um objeto matemático e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão matemática. A confusão entre objeto e representação é quase inevitável, pois, a apreensão dos objetos matemáticos é conceitual, mas, é somente por meio de representações semióticas que uma atividade sobre estes objetos é possível.

Em termos metodológicos, foi elaborada e proposta uma sequência de atividades a dois grupos de professores de matemática em formação continuada, que buscava perceber como as atividades de construções geométricas desenvolvidas com lápis e papel podem contribuir para que os professores de Matemática ampliem seus conhecimentos e habilidades geométricas no que diz respeito às demonstrações em Geometria. Mais especificamente, Jesus (2010, p. 7) analisou o seguinte problema:

- a) Trace uma reta d , e marque um ponto M pertencente à d e um ponto A não pertencente à d . Construa a circunferência tangente à d em M passando por A .
- b) Descreva o processo de construção que você utilizou.
- c) Justifique matematicamente essa construção.

A mudança de registros de representação semiótica (língua natural, registro simbólico e registro figural) proposta por Duval (2003) foi enfocada nas atividades e esperava-se que os professores utilizassem este recurso em suas redações.

Dois grupos de professores voluntários que lecionavam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio ajudaram na aplicação da sequência. As atividades foram desenvolvidas em 9 encontros de 3 horas cada, os quais versavam sobre a construção da definição de mediatriz e justificativa de propriedades decorrentes da definição. A partir dessa definição e/ou propriedade os professores tinham que justificar de maneira formal as construções geométricas (régua e compasso com lápis e papel) envolvidas.

Os dados foram coletados pelos observadores, que tinham como função registrar por escrito as ações ocorridas durante o processo de formação, gravar as falas em áudio e redigir as informações obtidas e enviar aos autores semanalmente. Para analisar os dados, Jesus (2010) recorreu às observações enviadas e, em muitos momentos, se reportou ao áudio para sanar possíveis dúvidas.

No que diz respeito aos registros de representação semiótica, Jesus (2010) constatou sua potencialidade durante o trabalho, pois na atividade, os professores trabalharam com, pelo menos, dois registros de representação, efetuando mudança de registros. A mudança de registros além de favorecer uma melhor compreensão da solução em questão, contribuiu para que os professores pudessem perceber que um registro tem vantagens em relação ao outro, quer seja na economia da escrita, como é o caso do registro simbólico, ou no que diz respeito a explicitar informações não presentes em outro.

Com esse estudo, Jesus (2010) notou que as construções geométricas podem contribuir para desencadear um processo de demonstrações em Geometria, pois ao refletir o que fundamentou a construção realizada, os professores construíram conhecimentos geométricos e potencializaram o trabalho com demonstrações.

Capítulo 4 – Análise dos Trabalhos Selecionados

Na descrição dos trabalhos relativos aos ENEM's e Anped optamos pela ordem cronológica das pesquisas e em dois blocos, de acordo com os eventos em questão. Neste momento de sistematização do conjunto dos 16 trabalhos catalogados, optamos por criar categorias não-excludentes como forma de agrupamento dos trabalhos, tendo em vista o foco de cada relato de pesquisa.

Esta forma de sistematização deve contribuir para a resposta de nossa questão de investigação: *quais as contribuições deste referencial teórico para o processo de ensino-aprendizagem da geometria na Educação Básica?* Neste sentido, vamos excluir o trabalho de Funato e Henriques (2010) pelo fato do foco de investigação ter sido o conceito de integral múltipla, pertinente ao contexto de Ensino Superior. Logo, o conjunto de categorias elencadas, levou em conta 15 trabalhos ao todo.

Na categoria demonstração agrupamos as pesquisas de Almouloud e Mello (2000), Piccelli e Bittar (2010) e Jesus (2010). Os dois primeiros trabalhos contemplaram a aplicação de sequencia didática para alunos do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (Almouloud e Mello, 2000) e alunos da 1ª série do Ensino Médio (Piccelli e Bittar, 2010). Já o trabalho de Jesus (2010) contou com atividades de construções geométricas desenvolvidas com lápis e papel, as quais instigaram os professores de matemática na ampliação dos seus conhecimentos e habilidades geométricas no que diz respeito às demonstrações em Geometria.

Os resultados do trabalho de Almouloud e Mello (2000) apontaram que os alunos foram capazes de mobilizar diferentes tipos de registros de representação semiótica (língua natural, algébrica e figural), a medida que reconheceram o estatuto do que é definição e teorema.

Piccelli e Bittar (2010) abordaram a validação de conjecturas por alunos da primeira série do Ensino Médio, a partir de construções geométricas em um software.

Uma característica comum nestes três trabalhos é o uso do registro figural como meio de articulação a outros registros de representação.

A categoria ensino-aprendizagem engloba três trabalhos correlacionados: Almouloud e Manrique (2001) e Manrique, Silva e Almouloud (2002, 2004). No primeiro relato a ênfase ficou contra a análise das representações dos professores participantes do projeto, por meio de questionário, em relação ao papel da Geometria na formação do aluno, no ensino e aprendizagem de conceitos/habilidades geométricas.

As pesquisas de Manrique, Silva e Almouloud (2002, 2004) apresentaram resultados de sequências didáticas aplicadas para professores, em contexto de formação continuada. Na pesquisa de 2002, os autores constaram que a mobilização de diversos registros esta associada à apreensão conceitual. O *déficit* por parte dos professores participantes do estudo quanto à definição do conceito de distância prejudicou este processo de mobilização. Já em 2004, as atividades propostas para os professores envolveram a construção de triângulos feitas tanto no papel, quanto com a ajuda do *software Cabri II*; além disso, algumas demonstrações também foram pedidas. Nestas últimas, alguns professores tiveram dificuldades com o uso da linguagem matemática e em identificar o que é hipótese e o que é tese. Para minimizar tais dificuldades diversas atividades foram trabalhadas tentando uma articulação entre a linguagem matemática, a linguagem figural e a linguagem natural em situações de demonstração.

Falar de registro de representação semiótica, da conversão e da coordenação de registros (linguagem matemática, figural e natural), segundo Manrique, Silva e Almouloud (2004) significa colocar em jogo o problema da aprendizagem e disponibilizar ao professor instrumentos que deverão ajudá-lo a tornar mais acessível à compreensão da matemática.

Nesta categoria agrupamos também, o trabalho teórico de Santos e Curi (2010) sobre os níveis de conhecimento desejáveis dos alunos quanto ao ensino das noções de área e perímetro. Em termos semióticos, se faz necessário a transição entre diversos registros, bem como a busca da representação mais adequada do objeto para o desenvolvimento da tarefa proposta.

Há apenas o trabalho de Morett e Kaleff (2010), o qual se enquadra na categoria análise do livro didático. Estes autores analisaram uma coleção de livro didático apresentada em um único volume, destinada às três séries do Ensino Médio. A análise cognitiva das conversões de registros semióticos revelou uma

linguagem discursiva mista, apresentando características de ambiguidade de linguagem entre a língua natural e os símbolos matemáticos. No que diz respeito aos registros figurais, o texto nem sempre induz o aluno partir o seu raciocínio de considerações visuais por meio de desenhos, ainda que algumas vezes, leve a analisar os conteúdos geométricos de maneira informal.

A categoria conceitos matemáticos agregou o maior número de trabalhos: Haruna e Almouloud (2001) tratou o Teorema de Thales, Maciel e Almouloud (2004) e Maciel e Almouloud (2007) discutiram o conceito de semelhança, Flores e Moretti (2004) estudaram o papel intuitivo e heurístico das figuras na representação geométrica, Facco e Almouloud (2004) e Andrade e Manrique (2007) abordaram o conceito de área e Kaleff (2005) interessou-se por geometria não-euclidiana destinada a professores da Educação Básica.

Haruna e Almouloud (2001) analisaram a apreensão do conceito do teorema de Thales por meio de suas significações, mais especificamente, três formas de estabelecer a proporção entre segmentos de retas.

O conceito de semelhança foi tratado em dois trabalhos dos mesmos autores, levando em conta um contexto interdisciplinar. Em Maciel e Almouloud (2004), foi proposto uma sequência didática para trabalhar o conteúdo de homotetia associado à ótica geométrica. Neste trabalho não houve a aplicação da sequência didática devido ao seu estágio de planejamento. Em termos de embasamento teórico, os registros de representação semiótica, foram utilizados sob os seguintes aspectos: necessidade de diversificar e coordenar esta forma de registro; transformação dos registros semióticos na forma de conversão e tratamento.

No relato de pesquisa de Maciel e Almouloud (2007) houve a aplicação de uma prática pedagógica interdisciplinar como um possível caminho para chegar à sistematização do conceito de semelhança. As situações geométricas de representação da sombra e de imagem em câmara escura propiciaram a percepção de que a propagação retilínea da luz é a responsável por esses fenômenos. Em termos da utilização de registros semióticos, instigou-se os alunos a relacionarem os registros figurais com suas respectivas representações numéricas no que tange à questão da proporcionalidade.

Do montante de trabalhos catalogados, o de Flores e Moretti (2004) foi o único cujo foco é o papel intuitivo e heurístico das figuras na representação geométrica. Segundo estes autores, a busca por caminhos heurísticos, para a resolução de problemas, possibilita lidar com as figuras para além da função estritamente perceptiva, ou seja, com a apreensão operatória. Esta forma de apreensão é centrada sobre as modificações possíveis de uma figura inicial e, em seguida, sobre as reorganizações perceptivas que estas modificações acarretam.

O conceito de área foi tratado em dois trabalhos. Facco e Almouloud (2004) tiveram por objetivo apresentar um estudo dos fenômenos de ensino e aprendizagem na construção do conceito de superfície e de área por meio de uma sequência de atividades constituída por três eixos: superfície como conjunto de pontos, área como grandeza e medida de área como número positivo. A teoria de registros de representação semiótica foi aplicada nas situações-problemas envolvendo a (re)configuração de figuras planas, bem como a comparação de polígonos, por recorte-colagem, ladrilhamento, decomposição e composição.

Já no trabalho de Andrade e Manrique (2007), o foco foi o cálculo de área de figuras que necessitavam de decomposição ou composição; mais precisamente, quando se tratava de figuras com áreas hachuradas ou sombreadas, resultado da sobreposição de duas ou mais figuras geométricas planas.

Por último temos o relato de pesquisa de Kaleff (2005) que contribuiu para uma reflexão sobre o comportamento de uma professora em formação continuada, quanto ao papel dos registros de representação semiótica e sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos (axiomática da geometria não-euclidiana), a partir da transformação dos registros semióticos, através da conversão e coordenação desses registros. Neste processo, a autora observou que a coordenação entre registros não pode ser somente consequência da apreensão conceitual, ao contrário é uma condição essencial.

Considerações finais

Nesta pesquisa buscamos identificar as contribuições dos registros de representação semiótica para o campo da Geometria, especificamente, na Educação Básica. A difusão da teoria de Raymond Duval no cenário brasileiro, por meio de cursos em Universidades, assim como a publicação de um capítulo no livro “Aprendizagem em matemática: Registros de representações semióticas”, instigou-nos avaliar a repercussão deste assunto em artigos publicados nos anais dos ENEM e nas reuniões anuais da Anped, tendo em vista o tema geometria.

A descrição quantitativa dos trabalhos apresentados na ANPED mostra-nos que os mesmos foram publicados no período de 2000 a 2005. Já em relação às edições dos ENEM (2001, 2004, 2007 e 2010), a distribuição dos trabalhos é heterogêna em todas as edições deste evento. No entanto, este panorama de distribuição irregular dos trabalhos impede-nos de esboçar qualquer consideração.

Para a sistematização das contribuições dos registros semióticos aplicados nos trabalhos selecionados, elegemos as seguintes categorias de análise: demonstração, ensino-aprendizagem, livro didático e conceito matemático.

Na maioria dos trabalhos avaliados com o tema geometria observamos a importância do referencial de Raymond Duval na transformação dos registros (conversão e tratamento), tendo em vista a linguagem natural, algébrica, numérica e os registros figurais. Outros fatores importantes são a coordenação dos registros e a apreensão conceitual por meio de suas significações.

Referências

ALMOULOU, Saddo Ag; MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. Iniciação à Demonstração Aprendendo Conceitos Geométricos. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 23, 2000, Caxambu, **Anais...** 18p. Caxambu, 2000. CD-ROM.

ALMOULOU, Saddo Ag; MANRIQUE, Ana Lúcia. A Geometria no Ensino Fundamental: Concepções de Professores e de Alunos. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 24, 2001, Caxambu, **Anais...** 22p. Caxambu, 2001. CD-ROM.

ANDRADE, João Batista de; MANRIQUE Ana Lúcia; Composição e Decomposição de Figuras Geométricas Planas por Alunos do Ensino Médio; In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte, **Anais...** 15p. Belo Horizonte, 2007. CD-ROM.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática:** Registros de representações semióticas. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-34.

FACCO, Sônia Regina; ALMOULOU, Saddo Ag; Uma abordagem de ensino-aprendizagem do conceito de área; In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** 11p., Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

FARIAS, Luiz Márcio Santos; *Estudo do Papel Recíproco entre os Domínios Numérico-Algébrico e Geométrico no Ensino Secundário: Caso dos Sistemas Educativos Brasileiros e Francês* ; In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. Anais 4p., Belo Horizonte – MG: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

FARIAS, Luiz Márcio Santos; FARIAS, Virginia Lúcia Nogueira; *Construção de Situações de Aprendizagem em Geometria Plana Utilizando o Software Cabri-*

Géomètre: O Deslocamento no Ambiente Computacional Cabri-Géomètre, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, BELO HORIZONTE, 9, 2007, Belo Horizonte. Anais 26p., Belo Horizonte – MG: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, Ano 19, n.26, p.77-102, 2006.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Mércles Thadeu; O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais...** 10p., Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

FUNATO, Maria Rosane Leite; HENRIQUES, Afonso. Crivo-geométrico: conservação única de partes de superfícies reunidas que formam o contorno do sólido enquanto objeto geométrico fechado, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Salvador. **Anais...** 8p. Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Teorema de Thales**: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2000, 235p.

HARUNA, Nancy Cury Andraus; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teorema de Thales: Análise das variáveis de situação didática e adidática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais...** 9p. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001. CD-ROM.

JESUS, Gilson Bispo de; As funções da demonstração em um trabalho com construções geométricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** 11p. Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

KALEFF, Ana Maria M. R.. Registros semióticos e sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos: o estudo de caso de uma professora frente à resolução de um problema introdutório às geometrias não-euclidianas. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28, 2005, Caxambu, **Anais...** 7p. Caxambu, 2005. CD-ROM.

MACIEL, Alexsandra Camara; ALMOULOUD, Saddo Ag; Semelhança de figuras planas: uma proposta de ensino. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 12p., Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

MACIEL, Alexsandra. Camara; ALMOULOUD, Saddo Ag; O Ensino de Semelhança: Uma Proposta de Ensino; In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** 15p. Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. CD-ROM.

MANRIQUE, Ana Lúcia; SILVA, Maria José Ferreira da; ALMOULOUD, Saddo Ag. Conceitos Geométricos e Formação de Professores do Ensino Fundamental. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 25, 2002, Caxambu, **Anais...** 20p. Caxambu, 2002. CD-ROM.

MORETT, Guilherme Thomaz; KALEFF, Ana Maria; Uma análise dos conteúdos de geometria de uma das coleções de livros didáticos do ensino médio mais solicitadas pelas escolas públicas brasileiras ao fundo nacional de desenvolvimento da educação, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** 10p. Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

OLIVEIRA, Paulo César et al. SARESP 2009: múltiplos olhares em questões do 9º ano via registros de representação semiótica. In: OLIVEIRA, Paulo César. (Org.). **O contexto curricular do Estado de São Paulo: reflexões via registros de representação semiótica.** São Carlos: EDUFSCar, 2011, p.19-38.

PICCELLI, Paulo Humberto; BITTAR, Marilena; A Validação de Conjecturas como Parte do Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** 9p. Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

SANTOS, Cintia A. B. dos; CURI, Edda; O estudo das noções de área e perímetro considerando os níveis de conhecimento esperado dos educandos como ferramenta didática, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** 8p., Salvador: UCSal, 2010. CD-ROM.

SILVA, Maria José Ferreira; MANRIQUE Ana Lúcia; ALMOULOUD Saddo Ag; Possíveis mudanças de postura em professores do ensino fundamental trabalhando com geometria; In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 14p. Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.